应用数学和力学，6第卷第5期（1985年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

论二个自变量常系数线性偏微分方程 $\sum\limits_{i+j\leqslant n} a_{ij}p^iq^j\varphi=0$ 的解的构造*

盖 秉 政

（哈尔滨工业大学，1982年10月22日收到）

摘　要

本文是文[1]的继续，对更广泛的一类二个自变量常系数线性偏微分方程 $\sum\limits_{i+j\leqslant n}a_{ij}p^iq^j\varphi=0$ 的求解方法作了详细地研究，给出了解的一般表示，这种表示可用来逼近具体问题的定解条件。为说明所得结果的运用，文中举出了具体的力学应用实例。

一、引　言

二个自变量常系数线性偏微分方程

$$f(p,\ q)\varphi\equiv\sum_{i+j\leqslant n}a_{ij}p^iq^j\varphi=0 \tag{1.1}$$

$$p=\partial/\partial x,\ q=\partial/\partial y,\ a_{ij}=\text{const}$$

是研究变形体力学问题时经常碰到的方程，因此寻求它的一般解在力学上是十分必要的。方程（1.1）的一种特殊情况，即方程 $\sum\limits_{i+j=4}a_{ij}p^iq^j\varphi=0$ 的一般解早已由С. Г. Михлин得到[2]，方程(1.1)的另一种特殊情况，即方程 $\sum\limits_{i+j\leqslant n}a_{ij}p^{2i}q^{2j}\varphi=0$ 的一般解И. Н. Викуа与笔者也作了详细讨论[1]。本文的目的则是来研究方程（1.1）的一般情况，文中给出了它的显式一般解，这个解对解决力学问题特别方便。

二、分 解 定 理

为寻求方程（1.1）的解，把它分解为次数较低的方程，一般来说是有利的。然而，这种分解并非永远可以办到。具体地来说，设 $\varnothing$ 是一复数域，$a_{ij}\in\varnothing$，则方程（1.1）左边的

* 钱伟长推荐。

$f(p,\ q)$是p，q二文字的n次多项式，这种多项式的全体作成一整环，记为$\varnothing[p,\ q]$，称为复数域$\varnothing$上二文字p，q的多项式环。依代数学中的已知结果，在$\varnothing[p,\ q]$中因式分解定理一定成立，即若$f(p,\ q)\in\varnothing[p,\ q]$，则$f(p,\ q)$一定可唯一地表为它的质式的乘积。但是，$f(p,\ q)$的质式次数并非在所有情况下都低于$f(p,\ q)$的次数。如果$f(p,\ q)$本身即是一质式（或更严格些说是一本原质式），则方程（1.1）便不可再分解。从 Eisenstain 定理我们知道，若把$f(p,q)$看成$\varnothing[q]$上p的n次多项式，$p^k(k=0,\ 1,\ 2,\cdots,n)$前的系数记为$S_k(q)$，则在$\varnothing[q]$中若存在质式$r(q)$，满足$r(q)\nmid S_0(q), r(q)|S_1(q),\cdots,r(q)|S_n(q)$，$r^2(q)\nmid S_n(q)$，则$f(p,\ q)$即是不可再分解的，即$f(p,\ q)$是一质式。那么$f(p,\ q)$可分解为低次式的条件是什么？其分解式如何求得？下面我们就来稍许详细地说明一下这个问题。

令
$$g(p,\ q)=\sum_{i+j\leq k} b_{ij}p^iq^j\equiv\sum_{j=0}^{k}T_j(q)p^j \tag{2.1}$$

是$f(p,\ q)$的k次因式，$(k\leqslant n)$，即$g(p,\ q)|f(p,\ q)$，则$f(p,\ q)$，$g(p,\ q)$的结式对任意的q应恒等于零，即

$$R[f,\ g]\equiv\begin{vmatrix} S_0(q)\ S_1(q)\cdots\cdots S_n(q)\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad S_0(q)\ S_1(q)\cdots\cdots S_n(q)\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad S_0(q)\ S_1(q)\cdots\cdots S_n(q) \\ T_0(q)\ T_1(q)\cdots\cdots T_k(q)\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad T_0(q)\ T_1(q)\cdots\cdots T_k(q)\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots T_0(q)\ T_1(q)\cdots\cdots T_k(q)\cdots \end{vmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}k\text{行}\\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}n\text{行}\end{matrix}=0\quad(\forall q) \tag{2.2}$$

由此有，
$$\left.\frac{\partial^j R[f,\ g]}{\partial q^j}\right|_{q=0}\equiv 0\quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n) \tag{2.3}$$

从行列式的微分规则，上式即为：

$$\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=j}\binom{j}{i_1}\binom{j-i_1}{i_2}\cdots 1\begin{vmatrix} u_1^{(i_1)}\Big|_{q=0} \\ u_2^{(i_2)}\Big|_{q=0} \\ \vdots \\ u_n^{(i_n)}\Big|_{q=0}\end{vmatrix}=0\qquad(j=0,\ 1,\ \cdots,\ n^k) \tag{2.4}$$

式中，

$$u_m=\begin{cases}(\overbrace{0,0,\cdots,0}^{m},\ S_0(q)\cdots\cdots S_n(q),\ \overbrace{0,0,\cdots,0}^{(k-m)}) \\ (\overbrace{0,0,\cdots,0}^{(m-k-1)},\ T_0(q)\cdots\cdots T_k(q),\ \overbrace{0,0,\cdots,0}^{(n+k-m+1)})\end{cases}$$

$u_m^{(i_m)}$表u_m对q的i_m次导数，于$q=0$的值。

$\binom{j-i_1-\cdots\cdots-i_m}{i_m}$表$(j-i_1-\cdots\cdots-i_m)$中取$i_m$的组合值。

(2.4) 式是$f(p,\ q)$的系数a_{ij}间以及a_{ij}与因式$g(p,\ q)$的系数b_{ij}间应满足的关系式，亦是从a_{ij}确定b_{ij}的方程。由此我们有：

定理1 $f(p,\ q)$可分解为低次式的充要条件是存在$k<n$，使得关于p，q的k次多项式的系数b_{ij}与$f(p,\ q)$的系数a_{ij}间满足n^k+1个方程(2.4)。

若$f(p,\ q)$是可分解为低次式的，则探讨$f(p,\ q)$分解为低次式的程度对求解方程(1.1)会有进一步的意义。最简单的情况是$f(p,\ q)$可分解为一次式的乘积，此时我们说$f(p,\ q)$是最简可分的，简称可分的，相应的方程（1.1）称为可分方程。

令
$$f(p,\ q)=a_{n0}\prod_{k=1}^{n}(p+b_k(q+c_k)) \tag{2.5}$$

式中，b_k，$c_k\in\mathscr{D}(k=1,\ 2,\ \cdots,n)$。则依高次代数方程根与系数间的熟知关系，有：

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}b_k(q+c_k)=\frac{S_{n-1}}{S_n}\equiv\frac{1}{a_{n0}}(a_{(n-1)1}q+a_{(n-1)0})\\
&\sum_{i_1<i_2}b_{i_1}b_{i_2}(q+c_{i_1})(q+c_{i_2})=\frac{S_{n-2}}{S_n}\equiv\frac{1}{a_{n0}}(a_{(n-2)2}q^2+a_{(n-2)1}q+a_{(n-2)0})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\sum_{i_1<i_2\cdots<i_k}b_{i_1}b_{i_2}\cdots b_{i_k}(q+c_{i_1})(q+c_{i_2})\cdots(q+c_{i_k})=\frac{S_{n-k}}{S_n}\equiv\frac{1}{a_{n0}}(a_{(n-k)k}q^k\\
&\qquad+a_{(n-k)(k-1)}q^{k-1}+\cdots+a_{(n-k)0})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_1\cdot b_2\cdot\cdots\cdot b_n(q+c_1)(q+c_2)\cdots(q+c_n)=\frac{S_0}{S_n}\equiv\frac{1}{a_{n0}}(a_{0n}q^n+a_{0(n-1)}q^{n-1}+\cdots+a_{00})
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

从上式，我们求得：

$$\sum_{i_1<i_2\cdots<i_r}(b_{i_1}b_{i_2}\cdots b_{i_r}c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_r}\sum_{(r+1)<j_1<j_2<\cdots<j_{k-r}}b_{i_{j_1}}b_{i_{j_2}}\cdots b_{i_{j_{(k-r)}}})$$
$$=\frac{a_{(n-k)(k-r)}}{a_{n0}} \tag{2.7}$$
$$(k=1,\ 2,\cdots,n;\ r=0,\ 1,\ \cdots,k;\ i_1,\ i_2,\cdots,i_n=0,\ 1,\ \cdots,n)$$

在上式中令$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ r=0$，则有

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{a_{(n-1)1}}{a_{n0}},\qquad \sum_{i_1<i_2}b_{i_1}\cdot b_{i_2}=\frac{a_{(n-2)2}}{a_{n0}},\ \cdots\\
&\sum_{i_1<i_2\cdots<i_k}b_{i_1}\cdot b_{i_2}\cdots b_{i_k}=\frac{a_{(n-k)k}}{a_{n0}},\cdots,\ b_1\cdot b_2\cdots b_n=\frac{a_{0n}}{a_{n0}}
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

这是关于$-b_1$，$-b_2$，……，$-b_n$这n个未知数的n个方程，它的求解与求n次代数方程
$$a_{n0}x^n+a_{(n-1)1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{0n}=0 \tag{2.9}$$
的n个代数根是等价的。从(2.6)，(2.8)式的最后一式可知c_1，c_2，$\cdots$，c_n是n次代数方程
$$a_{0n}x^n+a_{0(n-1)}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{00}=0 \tag{2.10}$$
的n个代数根。由此可见，若$f(p,\ q)$可分解为一次式的乘积（(2.5)式），则其系数及分解式的b_j，$c_j(j=1,\ 2,\cdots,n)$由$a_{ij}(i+j=n)$及a_{0j}（$j=0,\ 1,\ \cdots,\ n$）完全决定（(2.7),(2.9),(2.10)式）；反之，若$f(p,\ q)$的系数a_{ij}间有(2.7)，(2.9)，(2.10)式所示的关系，则依b_j，

c_j写出的一次式乘积（(2.5)式）必恒等于$f(p, q)$，由此我们有：

定理2 多项式$f(p, q)$为可分的充要条件是其系数a_{ij}间借b_j，c_j（$j=1, 2, \cdots, n$）满足(2.7)式，而b_j，c_j分别是方程（2.9）及（2.10）的n个代数根。

三、可分方程的解

n阶可分方程的最普遍形式可写为：

$$f(p, q)\varphi=\prod_{k=1}^{m}(p+b_k+\alpha_k)^{j_k}\varphi=0 \tag{3.1}$$

$$(j_1+j_2+\cdots+j_m=n)$$

式中，$\alpha_k=b_kc_k$（$k=1, 2, \cdots, m$），而b_k，c_k分别是方程（2.9）及（2.10）的根。若方程$(p+b_kq+\alpha_k)^{j_k}\varphi=0$的一般解为$\varphi_k$，则方程（3.1）的一般解可写为：

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_m=\sum_{k=1}^{m}\varphi_k \tag{3.2}$$

于是方程（3.1）的求解，归结为方程

$$(p+b_kq+\alpha_k)^{j_k}\varphi=0 \tag{3.3}$$

的求解。记，

$$(p+b_kq+\alpha_k)^{j_k-r}\varphi=\overset{(r)}{\varphi},\quad \overset{(0)}{\varphi}\equiv 0, \overset{(j_k)}{\varphi}\equiv\varphi \tag{3.4}$$

则

$$(p+b_kq+\alpha_k)\overset{(1)}{\varphi}=0 \tag{3.5}$$

这是$\overset{(1)}{\varphi}$的一阶线性偏微分方程。令，

$$\omega(x, y, \overset{(1)}{\varphi})=\text{const}$$

则关于ω的一阶偏微分方程为：

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}+b_k\frac{\partial\omega}{\partial y}-\alpha_k\overset{(1)}{\varphi}\frac{\partial\omega}{\partial\overset{(1)}{\varphi}}=0$$

它对应的常微分方程组为：

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{b_k}=-\frac{d\overset{(1)}{\varphi}}{\alpha_k\overset{(1)}{\varphi}}$$

亦即

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{b_k},\quad \frac{d(x+\mu_ky)}{2}=-\frac{d\overset{(1)}{\varphi}}{\alpha\overset{(1)}{\varphi}} \tag{3.6a,b}$$

积分(3.6)的第一式，有： $x-\mu_ky=\text{const}$

积分(3.6)的第二式，并注意到上式，有

$$\overset{(1)}{\varphi}=\varphi_{0k}(x-\mu_ky)\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}(x+\mu_ky)\right] \tag{3.7}$$

式中，$\varphi_{0k}(x-\mu_ky)$为（$x-\mu_ky$）的任意函数。

依（3.4）式，(3.7)式又可写为：

$$\overset{(1)}{\varphi}=(p+b_kq+\alpha_k)\overset{(2)}{\varphi}=\varphi_{0k}(x-\mu_ky)\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}(x+\mu_ky)\right] \tag{3.8}$$

这是$\overset{(2)}{\varphi}$的一阶线性偏微分方程。其解用与上面相同的方法求得为：

$$\overset{(2)}{\varphi}=((x+\mu_ky)\varphi_{1k}(x-\mu_ky)+\varphi_{0k}(x-\mu_ky))\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}(x+\mu_ky)\right] \tag{3.9}$$

式中，$\varphi_{1k}(x-\mu_ky)$为（$x-\mu_ky$）的任意函数。

如此进行下去，直到j_k次，则有：

$$\varphi_k\equiv\overset{(j_k)}{\varphi}=\left(\sum_{s=0}^{j_k-1}(x+\mu_ky)^s\varphi_{sk}(x-\mu_ky)\right)\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}(x+\mu_ky)\right] \tag{3.10}$$

把（3.10）式代入（3.2）式，得：

$$\varphi=\sum_{k=1}^{m}\varphi_k=\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{s=0}^{j_k-1}(x+\mu_ky)^s\varphi_{sk}(x-\mu_ky)\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}(x+\mu_ky)\right]\right) \tag{3.11}$$

$$(j_1+j_2+\cdots+j_m=n)$$

此即可分方程（3.1）的一般解。

取$\alpha_k=0\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，$n=4$，则（3.11）式可具体写为：

$$\varphi=\begin{cases}\varphi_{01}(x-\mu_1y)+\varphi_{02}(x-\mu_2y)+\varphi_{03}(x-\mu_3y)+\varphi_{04}(x-\mu_4y) & \text{(单根)}\\ \varphi_{01}(x-\mu_1y)+(x+\mu_1y)\varphi_{11}(x-\mu_1y)+\varphi_{02}(x-\mu_2y)+\varphi_{03}(x-\mu_3y) & \text{(一个重根)}\\ \varphi_{01}(x-\mu_1y)+(x+\mu_1y)\varphi_{11}(x-\mu_1y)+\varphi_{02}(x-\mu_2y)+(x+\mu_2y)\varphi_{12}(x-\mu_2y) & \\ & \text{(一对重根)}\\ \varphi_{01}(x-\mu_1y)+(x+\mu_1y)\varphi_{11}(x-\mu_1y)+(x+\mu_1y)^2\varphi_{21}(x-\mu_1y)+\varphi_{02}(x-\mu_2y) & \\ & \text{(一个三重根)}\\ \varphi_{01}(x-\mu_1y)+(x+\mu_1y)\varphi_{11}(x-\mu_1y)+(x+\mu_1y)^2\varphi_{21}(x-\mu_1y) & \\ \qquad+(x+\mu_1y)^3\varphi_{31}(x-\mu_1y) & \text{(一个四重根)}\end{cases} \tag{3.12}$$

它是方程，$\sum\limits_{i+j=4}a_{ij}p^iq^j\varphi=0$的一般解，亦较C.Γ.Михлин给出的结果广泛。

取$\alpha_k=0\,(k=1,\ 2,\ \cdots m,)$，$m=2$，$\mu_1=i$，$\mu_2=-i$（$i$——虚数单位），并记$\zeta=x+iy$，$\bar{\zeta}=x-iy$，则（3.11）式可具体写为：

$$\varphi=\sum_{s=0}^{j_1-1}(x+\mu_1y)^s\varphi_{s1}(x-\mu_1y)+\sum_{s=0}^{j_2-1}(x+\mu_2y)^s\varphi_{s2}(x-\mu_2y)$$

$$=\sum_{s=0}^{j_1-1}(x+iy)^s\varphi_{s1}(x-iy)+\sum_{s=0}^{j_2-1}(x-iy)^s\varphi_{s2}(x+iy)$$

$$=\sum_{s=0}^{r-1}(\bar{\zeta}^s\Phi_s(\zeta)+\zeta^s\Psi_s(\bar{\zeta})) \tag{3.13}$$

式中，$\Phi_s(\zeta)\equiv\varphi_{s2}(\zeta),\Psi_s(\bar\zeta)\equiv\varphi_{s1}(\bar\zeta),r=\frac{n}{2}$（因为复根成对，必有 $j_1=j_2$，又$j_1+j_2=n$，所以$j_1=j_2=\frac{n}{2}=r$）。它是方程，$\prod_{k=1}^{2}(p+b_kq)^{j_k}\varphi\equiv\left(p+\frac{1}{\mu_1}q\right)^{j_1}\left(p+\frac{1}{\mu_2}\right)^{j_2}\varphi=\Delta^r\varphi=0$的一般解，即是说$\varphi$应是$r$重调和函数。由此可见（3.13）式表示的即是$r$重调和方程的一般解，这正是我们熟知的Bekya公式。

四、一般方程的解

下面我们来考虑二个自变量，常系数，线性偏微分方程的最一般形式，即方程（1.1）的解。我们先来求方程（1.1）的形为 $\varphi(x, y)=\varphi(x+\mu y)$，$(\mu\in\mathscr{D})$的解。为此把它代入方程(1.1)，有：

$$f(p,\ q)\varphi=\sum_{i+j<n}a_{ij}p^iq^j\varphi=\sum_{i+j<n}a_{ij}\mu^jD^{(i+j)}\varphi=\sum_{i=0}^{n}f_i(\mu)D^i\varphi=0 \tag{4.1}$$

式中，

$$f_i(\mu)\equiv\sum_{j=0}^{i}a_{(i-j)j}\mu^j,\quad D\equiv\frac{d}{d\xi},\quad \xi=x+\mu y$$

方程（4.1）是以ξ为自变量，μ为参数的n阶常系数线性常微分方程。令，

$$\varphi=e^{\lambda\xi}$$

把它代入（4.1）式，求得确定λ的特征方程：

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(\mu)\lambda^i=0 \tag{4.2}$$

从此特征方程中可求出确定的λ值的充要条件是方程组，$f_i(\mu)=0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 没有公根。先假定这一条件是满足的，于是从方程（4.2）可求得：

$$\lambda=\lambda_i(\mu) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

若在上列根中互不相同的根有$m(\leqslant n)$个；$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，其重数分别为$r_1$，$r_2\cdots r_m(r_1+r_2+\cdots+r_m=n)$，则方程（4.1）的解为：

$$\varphi=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{r_i-1}f_{ij}(\mu)\xi^j\exp[\lambda_i\xi] \tag{4.3}$$

式中，$f_{ij}(\mu)$为参数μ的任意函数。

因为对于任意的$\mu\in\mathscr{D}$，(4.3)式均为方程(4.1)（即方程(1.1)）的解，所以它的形为$\varphi(x+\mu y)$的一般解是对所有μ的叠加，即：

$$\varphi=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{r_i-1}\int_\Gamma f_{ij}(\mu)(x+\mu y)^j\exp[\lambda_i(x+\mu y)]\,d\mu \tag{4.4}$$

式中，Γ为μ平面上任一使积分收敛的积分路径。

现在我们来看$f_i(\mu)=0(i=1, 2, \cdots n)$有公根的情况。不妨设$-\mu_1=-\dfrac{1}{b_1}$，$-\mu_2=-\dfrac{1}{b_2}, \cdots, -\mu_k=-\dfrac{1}{b_k}$是它们的$s_1, s_2, \cdots, s_k(s_1+s_2+\cdots+s_k\leqslant n)$重根。此时方程（1.1)显然可以分解为：

$$f(p, q)\varphi=\tilde{f}(p, q)\prod_{i=1}^{k}(p+b_iq)^{s_i}\varphi=0 \tag{4.5}$$

式中，$\tilde{f}(p, q)$是$f(p, q)$的$n-(s_1+s_2+\cdots+s_k)$次质式。

$$\left.\begin{aligned} &\text{若方程}\quad \tilde{f}(p, q)\varphi=\sum_{i+j\leqslant n-(s_1+s_2+\cdots+s_k)}\tilde{a}_{ij}p^iq^j\varphi=0 \quad (a_{ij}=\text{const})\\ &\text{及方程}\quad (p+b_iq)^{s_i}\varphi=0 \quad (i=1, 2, \cdots, k)\end{aligned}\right\} \tag{4.6a,b}$$

的解分别为φ^*，$\varphi_i(i=1, 2, \cdots, k)$，则方程(4.5)（即(1.1)）的解可写为：

$$\varphi=\varphi^*+\sum_{i=1}^{k}\varphi_i$$

从前面的讨论，我们知道方程（4.6）第一式的形为$\varphi(x+\mu y)$的解为：

$$\varphi^*=\sum_{i=1}^{n-(s_1+s_2\cdots+s_k)}\sum_{j=0}^{r_i-1}\int_{\Gamma}\tilde{f}_{ij}(\mu)(x+\mu y)^j\exp[\lambda_i(x+\mu y)]d\mu$$

式中，$\tilde{f}_{ij}(\mu)$是μ的任意函数，λ_i是方程

$$\sum_{j=0}^{i}\tilde{a}_{(i-j)j}\mu^j=0$$

的r_i重根，$r_1+r_2+\cdots\cdots+r_k=n-(s_1+s_2+\cdots+s_k)$

方程（4.6）的第二式又可写为：

$$\lim_{\alpha_i\to 0}(p+b_iq+\alpha_i)^{s_i}\varphi=0$$

若把方程$(p+b_iq+\alpha_i)^{s_i}\varphi=0$的形为$\varphi(x+\mu y)$的解记为$\varphi_{\alpha_i}$，则方程$(p+b_iq)^{s_i}\varphi=0$的形为$\varphi(x+\mu y)$的解为：

$$\varphi=\lim_{\alpha_i\to 0}\varphi_{\alpha_i} \tag{4.7}$$

φ_{α_i}可写为：

$$\varphi_{\alpha_i}=\sum_{j=0}^{s_i-1}\int_{\Gamma}f_{ij}^{\alpha_i}(\mu)(x+\mu y)^j\exp\left[\frac{-\alpha_i}{1+b_i\mu}(x+\mu y)\right]d\mu \qquad (i=1, 2, \cdots, k)$$

式中，$f_{ij}^{\alpha_i}(\mu)$是μ的任意函数。

若我们把（4.7）式的极限过程也并入（4.4）式的表示中，则从上面的讨论我们看到方程（1.1）有形为$\varphi(x+\mu y)$的解，且其一般表示即为（4.4）式。现在我们进一步来证明，若$\varphi(x, y)$是方程（1.1）的解，则它只能取$\varphi(x+\mu y)$这种函数形式，由此我们可以断定方程（1.1）的一般解即为（4.4）式所示。下面我们用数学归纳法来完成这一任务。

取$n=1$，则方程（1.1）变为：

$$(p+b_iq+a_i)\varphi=0$$

式中，$b_i=\dfrac{a_{01}}{a_{10}}$，$a_i=\dfrac{a_{00}}{a_{10}}$．这是我们前面讨论过的可分方程，它的一般解，依（3.11）式可写为：

$$\begin{aligned}\varphi&=\varphi_{i0}(x-\mu_iy)\exp\left[-\frac{a_i}{2}(x+\mu_iy)\right]\qquad\left(\mu_i=\frac{1}{b_i}\right)\\&=\exp\left[-\frac{a_i}{2}(x+\mu_iy)\right]\int_\Gamma f_{i0}(\mu)\exp\left[-\frac{a_i}{2}\mu(x+\mu_iy)\right]d\mu\\&=\int_\Gamma f_{i0}(\mu)\exp\left\{-\frac{a_i}{2}[(1+\mu)x+(1-\mu)\mu_iy]\right\}d\mu\\&=\int_\Gamma f_{i0}(\mu)\exp\left[-\frac{a_i}{2}(1+\mu)\left(x+\frac{1-\mu}{1+\mu}\mu_iy\right)\right]d\mu\end{aligned}$$

作代换，$\dfrac{1-\mu}{1+\mu}\mu_i\to\mu$，则上式变为：

$$\begin{aligned}\varphi&=\int_\Gamma f_{i0}(\mu)\exp\left[-\frac{a_i\mu_i}{\mu+\mu_i}(x+\mu y)\right]d\mu\\&=\int_\Gamma f_{i0}(\mu)\exp[\lambda_i(x+\mu y)]d\mu\end{aligned}$$

式中，$\lambda_i=-\dfrac{a_i\mu_i}{\mu+\mu_i}$显然是特征方程$\left(1+\dfrac{\mu}{\mu_i}\right)\lambda+a_i=0$的根．

由此看出，$n=1$时命题是正确的．若假定$(n-1)$时命题是正确的，现在我们来看n的情况．为此令，

$$\varphi(x,\ y)=\frac{\varphi(x,\ y)}{\tilde{\varphi}(x,\ y)}\tilde{\varphi}(x,\ y)=X(x,\ y)\tilde{\varphi}(x,\ y)\tag{4.8}$$

是方程（1.1）的解，而$\tilde{\varphi}(x,\ y)$是方程（1.1）的形为$\varphi(x+\mu y)$的一个解，不妨取它为$\exp[\lambda(x+\mu y)]$，且$\lambda=\lambda(\mu)$对任意的$\mu\in\varnothing$可得任意的$\lambda\in\varnothing$．于是我们只须证明$X(x,\ y)$有$X(x+\mu y)$这种函数形式．

把（4.8）式代入方程（1.1），并注意到$\tilde{\varphi}$是方程（1.1）的解，则有：

$$\begin{aligned}&\sum_{i+j\leq n}a_{ij}p^iq^j\varphi=\sum_{i+j\leq n}a_{ij}p^iq^j(X\tilde{\varphi})\\&=\tilde{\varphi}\sum_{1\leq i+j\leq n}a_{ij}p^iq^jX+\lambda\sum_{1\leq i+j\leq n-1}W(a_{ij},\ \mu)p^iq^jX+X\sum_{0\leq i+j\leq n}a_{ij}p^iq^j\tilde{\varphi}\\&=\tilde{\varphi}\sum_{1\leq i+j\leq n}a_{ij}p^iq^jX+\lambda\sum_{1\leq i+j\leq n-1}W(a_{ij},\ \mu)p^iq^jX\end{aligned}$$

式中，$W(a_{ij},\mu)=\displaystyle\sum_{i+j+2\leq k+r\leq n}a_{kr}\binom{k}{i}\binom{r}{j}\lambda^{(k+r)-(i+j)-1}(\mu)\mu^{r-j}$

对任意的λ上式恒成立的充要条件是：

$$\sum_{1\leq i+j\leq n}a_{ij}p^iq^jX=0,\qquad\sum_{1\leq i+j\leq n-1}W(a_{ij},\ \mu)p^iq^jX=0$$

即$X(x,\ y)$是二方程的公解。但其中的一个是（$n-1$）次方程，依归纳假定，对这个方程命题是正确的，即它的解必取$X(x+\mu y)$这种函数形式（其一般表示即(4.4)式）。因此，此二方程的公解自然不能超出这种函数形式之外，于是命题得证。上述结果可写成：

定理3，方程（1.1）有且仅有形为$\varphi(x+\mu y)$这种函数形式的解，且它的最一般表示即为（4.4）式。

现在我们来证明，对可分方程（4.4）式与（3.11）式是等价的。为此只须讨论方程，

$$(p+b_kq+\alpha_k)^{j_k}\varphi=0$$

的解即可。式中$\lambda_k=\dfrac{-\alpha_k\mu_k}{\mu+\mu_k}\left(\mu_k=\dfrac{1}{b_k}\right)$，是此方程特征方程的$j_k$重根。于是依定理3（(4.4)式）在不计及任意函数记法符号上的不同，我们有：

$$\varphi=\varphi_k=\sum_{j=0}^{j_k-1}\int_\Gamma f_{kj}(\mu)(x+\mu y)^j\exp\left[\frac{-\alpha_k\mu_k}{\mu+\mu_k}(x+\mu y)\right]d\mu$$

$$=\sum_{j=0}^{j_k-1}\int_\Gamma f_{kj}(\mu)\frac{\partial^j}{\partial\alpha_k^j}\exp\left[\frac{-\alpha_k\mu_k}{\mu+\mu_k}(x+\mu y)\right]d\mu$$

$$=\sum_{j=0}^{j_k-1}\frac{\partial^j}{\partial\alpha_k^j}\int_\Gamma f_{kj}(\mu)\exp\left[\frac{-\alpha_k\mu_k}{\mu+\mu_k}(x+\mu y)\right]d\mu$$

$$=\sum_{j=0}^{j_k-1}\frac{\partial^j}{\partial\alpha_k^j}\int_\Gamma f_{kj}(\mu)\exp\left[-\frac{\alpha_k(1+\mu)}{2}\left(x+\frac{1-\mu}{1+\mu}\mu_ky\right)d\mu\right.$$

$$=\sum_{j=0}^{j_k-1}\frac{\partial^j}{\partial\alpha_k^j}\int_\Gamma f_{kj}(\mu)\exp\left\{-\frac{\alpha_k}{2}[(1+\mu)x+(1-\mu)\mu_ky]\right\}d\mu$$

$$=\sum_{j=0}^{j_k-1}\frac{\partial^j}{\partial\alpha_k^j}\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}(x+\mu_ky)\right]\int_\Gamma f_{kj}(\mu)\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}\mu(x-\mu_ky)\right]d\mu$$

$$=\sum_{j=0}^{j_k-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^j\left((x+\mu_ky)^j\int_\Gamma f_{kj}(\mu)\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}\mu(x-\mu_ky)\right]d\mu\right.$$

$$\left.+\int_\Gamma\mu f_{kj}(\mu)\ (x-\mu_ky)^j\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}\mu(x-\mu_ky)\right]d\mu\right)\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}(x+\mu_ky)\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{j_k-1}\left((x+\mu_ky)^jf_{kj}(x-\mu_ky)+\tilde{f}_{kj}(x-\mu_ky)\right)\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}(x+\mu_ky)\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{j_k-1}(x+\mu_ky)^j\varphi_{kj}(x-\mu_ky)\exp\left[-\frac{\alpha_k}{2}(x+\mu_ky)\right]$$

式中，$\varphi_{kj}(x-\mu_ky)\equiv f_{k0}(x-\mu_ky)+\sum\limits_{j=0}^{j_k-1}\tilde{f}_{kj}(x-\mu_ky)$，$f_{kj}(x-\mu_ky)$，$\tilde{f}_{kj}(x-\mu_ky)$均为（$x$

$-\mu_k y$）的任意函数。

上式正是我们前面得出的可分方程（3.3）的一般解（(3.11)式）。由此看来，可分方程的一般解以（4.4）式的形式给出或以（3.11）式的形式给出，它们只在表面形式上有所不同，实质上它们是彼此等价的。

五、力学上的应用

应用上面的结果，下面我们来讨论二个具体力学实例。

例1，刚性矩形薄板问题，它归结为求解[8]：

$$\Delta^2 w-\gamma w=0;\quad L(w)|_{边}=0 \tag{5.1a,b}$$

式中，w为板的挠度，l为作用于w上的运算子，γ是与具体问题有关的待定常数。

方程（5.1）的第一式的一般解，依（4.4）式可写为：

$$w=\sum_{\lambda}\int_{\Gamma} f(\mu)\exp[\lambda(x+\mu y)]d\mu$$

令 $$f(\mu)=\sum_{s}a_{\lambda s}\delta(\mu-s)\quad (s=\lambda\mu,\ \delta为\delta函数,\ a_{\lambda s}=\text{const})$$

则 $$w=\sum_{\lambda}\sum_{s}a_{\lambda s}\exp(\lambda x+sy) \tag{5.2}$$

在上式中λ，s取纯虚有理数时，它即是挠度w的一般复式Fourier展开。

对矩形薄板，改写（5.2）式为：

$$w=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\tilde{a}_\lambda\cos\lambda x+a_\lambda\sin\lambda x)(\tilde{b}_s\cos sy+b_s\sin sy) \tag{5.3}$$

式中，a_λ，$\tilde{a}_\lambda$，b_s，$\tilde{b}_s$为待定常数。它们及λ，s的选择应满足边界条件（5.1）的第二式；λ，s又应满足方程（5.1）的第一式的特征方程((4.2)式)。下面仅就简支边界来讨论这一问题，此时（5.1）的第二式可具体写为：

$$w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\quad (x=0,\ a);\quad w=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\quad (y=0,\ b) \tag{5.4}$$

在（5.3）式中，若取$\tilde{a}_\lambda=\tilde{b}_s=0$，$\lambda=\frac{m\pi}{a}$，$s=\frac{n\pi}{b}$（$m$，$n$为正整数），则边界条件（5.4）显然可以得到满足。于是我们有：

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\quad (A_{mn}=a_\lambda b_s) \tag{5.5}$$

此即刚性简支薄板问题中惯用的双三角级数解。

依（4.2）式，方程（5.1）的第一式的特征方程为：

$$(\lambda^2+s^2)^2-\gamma=0 \tag{5.6}$$

由此有： $$\gamma=(\lambda^2+s^2)^2=\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right)^2\pi^4$$

若令1) $\gamma w=q(x, y)/D$,（q为板面上的横向载荷，D为板的弯曲刚度）

则有： $A_{mn}=\dfrac{q_{mn}}{\gamma D}$，$q_{mn}=\int_0^a\int_0^b q(x, y)\sin\dfrac{m\pi}{a}x\sin\dfrac{n\pi}{b}y dxdy$

从而我们得到四边简支矩形刚性板受横向载荷作用时的双三角级数解：

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{mn}}{\gamma D}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \tag{5.7}$$

若令2) $\gamma=\dfrac{\omega^2\bar{m}}{D}$（$\omega$为板振动圆频率，$\bar{m}$为单位板面质量）

则有： $\dfrac{\omega^2\bar{m}}{D}=\left(\left(\dfrac{m}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n}{b}\right)^2\right)^2\pi^4$

从而我们得到四边简支矩形薄板的自振圆频率：

$$\omega=\pi^2\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right)\sqrt{\frac{D}{\bar{m}}} \tag{5.8}$$

若令3) $\gamma w=\dfrac{p_x}{D}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$,（$p_x$为板$x$向所受压力）

则有： $\gamma=\dfrac{p_x}{D}\left(\dfrac{m}{a}\right)^2\pi^2$

从而我们得到四边简支矩形薄板x向受压时的临界载荷：

$$p_x=\frac{\pi^2a^2D\left(\left(\frac{m}{a}\right)^3+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right)^2}{m^2} \tag{5.9}$$

例2，圆柱壳为圆孔削弱时的应力集中问题，它归结为求解[4]：

$$\Delta^2\Phi+i\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Rh}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0;\quad L(\Phi)|_{边}=0 \tag{5.10a,b}$$

式中，$\Phi=w+i\varphi$为复应力函数，w为壳的挠度函数，φ为壳的膜应力函数，R为柱壳圆半径，h为壳厚，ν为材料的Poisson比，L为作用于Φ上的运算子，x,y为壳面坐标，$i=\sqrt{-1}$。

方程（5.10）的第一式的特征方程为：

$$(1+\mu^2)^2\lambda^4+i8\beta^2\lambda^2=0 \qquad \left(\beta^2=\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4Rh}\right)$$

解之得： $\lambda_{1,2}=\pm 2i\sqrt{2i}\beta^2/(1+\mu^2)$，$\lambda_{3,4}=0$

于是方程（5.10）第一式的一般解，依（4.4）式，可写为：

$$\begin{aligned}\Phi=&\int_\Gamma f_1(\mu)\exp[\lambda_1(x+\mu y)]d\mu+\int_\Gamma f_2(\mu)\exp[\lambda_2(x+\mu y)]d\mu\\&+\int_\Gamma f_2(\mu)\exp[\lambda_3(x+\mu y)]d\mu+\int_\Gamma(x+\mu y)f_4(\mu)\exp[\lambda_4(x+\mu y)]d\mu\\=&\int_\Gamma f_1(\mu)\exp\left[2i\sqrt{2i}\beta\frac{x+\mu y}{1+\mu^2}\right]d\mu+\int_\Gamma f_2(\mu)\exp\left[-2i\sqrt{2i}\beta\frac{x+\mu y}{1+\mu^2}\right]d\mu+Ax+By+C\end{aligned}$$

式中，f_1，f_2，f_3，f_4为μ的任意函数，A，B，C=const。去掉不影响应力状态的线性项，

我们有：

$$\Phi=\int_{\Gamma}f_1(\mu)\exp\left[2i\sqrt{2i}\,\beta\frac{x+\mu y}{1+\mu^2}\right]d\mu+\int_{\Gamma}f_2(\mu)\exp\left[-2i\sqrt{2i}\,\beta\frac{x+\mu y}{1+\mu^2}\right]d\mu=\Phi_++\Phi_-$$

式中， $\Phi_+=\int_{\Gamma}f_1(\mu)\exp\left[2i\sqrt{2i}\,\beta\frac{x+\mu y}{1+\mu^2}\right]d\mu$, $\Phi_-=\int_{\Gamma}f_2(\mu)\exp\left[-2i\sqrt{2i}\,\beta\frac{x+\mu y}{1+\mu^2}\right]d\mu$

引入复变数$\zeta=x+iy$, $\bar{\zeta}=x-iy$，则有：

$$\begin{aligned}
\Phi_+&=\int_{\Gamma}f_1(\mu)\exp\left[2i\sqrt{2i}\,\beta\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i\mu}+\frac{1}{1-i\mu}\right)\left(\frac{\zeta-\bar{\zeta}}{2}+\mu\frac{\zeta-\bar{\zeta}}{2i}\right)\right]d\mu\\
&=\int_{\Gamma}f_1(\mu)\exp\left[i\sqrt{2i}\,\frac{\beta}{2}\left(\zeta+\bar{\zeta}+\frac{1-i\mu}{1+i\mu}\zeta+\frac{1+i\mu}{1-i\mu}\bar{\zeta}\right)\right]d\mu\\
&=\int_{\Gamma}f_1(\mu)\exp\left[i\sqrt{2i}\,\beta\frac{\zeta+\bar{\zeta}}{2}+i\frac{\sqrt{2i}\beta}{2}\left(\frac{1-i\mu}{1+i\mu}\zeta+\frac{1+i\mu}{1-i\mu}\bar{\zeta}\right)\right]d\mu\\
&=\exp\left(i\sqrt{2i}\,\beta x\right)\int_{\Gamma}f_1(\mu)\exp\left[\frac{i\sqrt{2i}\beta}{2}\left(\frac{1-i\mu}{1+i\mu}\zeta+\frac{1+i\mu}{1-i\mu}\bar{\zeta}\right)\right]d\mu\\
&=\exp(i\sqrt{2i}\beta x)\int_{\Gamma}f(t)\exp\left[i\frac{\sqrt{2i}\beta}{2}\left(t\zeta+\frac{\bar{\zeta}}{t}\right)dt\right.\qquad\left(t=\frac{1-i\mu}{1+i\mu}\right)\\
&=\exp(i\sqrt{2i}\beta x)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{a}_n^+H_n(\sqrt{2i}\beta\rho)\exp(in\theta)^{[1]}\\
&=\exp(i\sqrt{2i}\beta x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^+H_n(\sqrt{2i}\beta\rho)\cos n\theta\qquad(H_{-n}=(-1)^nH_n)
\end{aligned}$$

式中，$H_n(\sqrt{2i}\beta\rho)$为n阶柱函数（J_n——n阶Bessel函数，$H_n^{(1)}$，$H_n^{(2)}$——1、2类n阶Hankel函数），$\tilde{a}_n^+$，$a_n^+=\text{const}$，$\zeta=\rho e^{i\theta}$。

同理对Φ_-我们有：

$$\Phi_-=\exp(-i\sqrt{2i}\beta x)\sum_{n=0}^{\infty}a_n^-H_n(\sqrt{2i}\beta\rho)\cos n\theta,\qquad(a_n^-=\text{const})$$

于是，$\Phi=\Phi_++\Phi_-=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^+\exp(i\sqrt{2i}\beta\rho\cos\theta)+a_n^-\exp(-i\sqrt{2i}\beta\rho\cos\theta)H_n(\sqrt{2i}\beta\rho)\cos n\theta$

(5.11)

此即方程（5.10）第一式的一般解。

若取，$a_n^+=a_n^-=\frac{1}{4}a_n$，$(n=0, 2,\cdots)$

$$a_n^+=a_n^-=\frac{1}{4}(1+i)a_n,\ (n=1,\ 3,\ \cdots)$$

则有：

$$\begin{aligned}\Phi=&\sum_{n=0,2\cdots}a_n\Lambda_{ev}(\beta\rho\cos\theta)H_n(\sqrt{2i}\beta\rho)\cos n\theta\\&+\sum_{n=1,3\cdots}a_n\Lambda_{od}(\beta\rho\cos\theta)H_n(\sqrt{2i}\beta\rho)\cos n\theta\end{aligned}\qquad(5.12)$$

式中，$$\Lambda_{ev}(\xi)\equiv\frac{1}{4}(\exp(i\sqrt{2i}\xi)+\exp(-i\sqrt{2i}\xi)),\ (\xi\text{的偶函数})$$

$$\Lambda_{od}(\xi)\equiv\frac{1}{4}(1+i)(\exp(i\sqrt{2i}\xi)-\exp(-i\sqrt{2i}\xi),\ (\xi\text{的奇函数})$$

如果注意到函数$\Lambda_{ev}(\xi)$，$\Lambda_{od}(\xi)$与A. H. Крылов函数

$$\begin{cases}\Omega_1(\xi)=\mathrm{ch}\xi\cos\xi;\quad \Omega_2(\xi)=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\xi\sin\xi+\mathrm{sh}\xi\cos\xi)\\ \Omega_3(\xi)=\frac{1}{2}\mathrm{sh}\xi\sin\xi;\quad \Omega_4(\xi)=\frac{1}{4}(\mathrm{ch}\xi-\mathrm{sh}\xi\cos\xi)\end{cases}$$

之间的如下函数关系，

$$\Lambda_{ev}=\Omega_1-2i\Omega_3,\quad \Lambda_{od}=\Omega_2-2i\Omega_4$$

则不难看出（5.12）式实质上就是A. И. Лурье在研究这一问题时所提供的解，这里我们只不过是把它作为我们一般结果的一个自然推论而已。

下面我们来考虑壳面圆孔附近的应力状态。假定壳面“远处”受到膜向拉力$N_x=ph$，$N_y=qh$（其中p，q为x，y向单位厚度的拉伸强度），壳面为半径为r_0的圆孔所削弱。则壳体的内力状态为：

$$\left.\begin{aligned}
&N_\rho=-4RD\beta^2\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\varphi+N_\rho^\infty\\
&N_\theta=-4RD\beta^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+N_\theta^\infty;N_{\rho\theta}=4RD\beta^2\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\varphi+N_{\rho\theta}^\infty\\
&M_\rho=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\nu}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)w+M_\rho^\infty\\
&M_\theta=-D\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{\nu}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)w+M_\theta^\infty\\
&M_{\rho\theta}=-D(1-\nu)\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)w+M_{\rho\theta}^\infty\\
&Q_\rho=-D\frac{\partial}{\partial\rho}(\Delta w)+Q_\rho^\infty;\quad Q_\theta=-D\frac{\partial}{\rho\partial\theta}(\Delta w)+Q_\theta^\infty\\
&Q_\rho^*=-D\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\Delta+(1-\nu)\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)w+Q_\rho^{*\infty}\right.\\
&Q_\theta^*=-D\left(\frac{\partial}{\rho\partial\theta}\Delta+(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right)w+Q_\theta^{*\infty}
\end{aligned}\right\}\quad(5.13)$$

式中，N_ρ，N_θ，$N_{\rho\theta}$分别为膜向拉，剪力；M_ρ，M_θ，$M_{\rho\theta}$分别为横向弯，扭矩；Q_ρ，Q_θ，Q_ρ^*，Q_θ^*分别为横力及广义Kirchihoff横力；$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$为极坐标下的Laplace算子；上标∞表相应量于“无穷远”处的值，它们是：

$$\left.\begin{aligned}&N_\rho^0=\frac{1}{2}h(p+q)+\frac{1}{2}h(p-q)\cos 2\theta;\quad N_\theta^\infty=\frac{1}{2}h(p+q)-\frac{1}{2}h(p-q)\cos 2\theta\\&N_{\rho\theta}^\infty=-\frac{1}{2}h(p-q)\sin 2\theta;\quad \text{其余各量}\equiv 0\end{aligned}\right\}\tag{5.14}$$

应用（5.13）式，边界条件（5.10）的第二式可具体写为：

$$\left.\begin{aligned}&N_\rho=N_{\rho\theta}=M_\rho=Q_\rho^*=0,\quad(\rho=r_0)\\&(\text{内力})\ T\to(\text{内力})\ T^\infty,\ (\rho\to\infty)\end{aligned}\right\}\tag{5.15}$$

边界条件（5.15）的第二式即是要求 $\rho\to\infty$ 时，$\Phi\to 0$；于是按柱函数的渐近性质，只要取 $H_n=H_n^{(1)}$，此条件即可得到满足。

把（5.11）式代入（5.15）式，可获得确定待定系数 a_n^+ 及 a_n^- 的无穷代数方程组，用截断法解此代数方程组即可得到问题的最终解答，它适于任意大小的孔径 r_0。对于小孔 $\left(\text{即}\frac{r_0}{R}\ll\sqrt{\frac{h}{R}}\text{的孔}\right)$，则在孔边附近 $\beta\rho\ll 1$，于是（5.12）式中的各函数以及系数 a_n 均可按小参数 βr_0 展开，然后摄动地去满足边界条件（5.15）的第一式，从而求得待定系数 a_n。这就是 A. И. Лурье 的作法（其详情可阅他的原文，我们这里将不赘述）。他的精确到 $(\beta r_0)^2$ 项的最后结果是：

$$\left(\frac{N_\theta}{h}\right)_{\rho=r_0}=(p+q)-2(p-q)\cos 2\theta+\pi(\beta r_0)^2(2q-(p-3q)\cos 2\theta)\tag{5.16}$$

参考文献

[1] 盖秉政，椭圆型方程 $\sum_{k=0}^{n}a_k\Delta^k\varphi=0$ 的解及其在力学上的应用，应用数学和力学，2，4(1981)，445.

[2] Михлин С. Г., Плоская деформация в анизотропной среде, *Труды Сейсмологич*, Ин-та АН СССР, 76(1936).

[3] Timoshenko. S. P, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York(1940).

[4] Лурье А. И., Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра, *ПММ*, 10, 3 (1946), 397.

On the Structure of Solutions of Linear Partial Differential Equation $\sum\limits_{i+j\leqslant n} a_{ij}p^i q^j \varphi=0$ With Two Independent Variables and Constant Coefficients

Gai Bing-zheng

(*Harbin Institute of Technology, Harbin*)

Abstract

This paper is a continuation of [1]. In this paper, the solutions of the more general linear partial differential equation $\sum\limits_{i+j\leqslant n} a_{ij}p^i q^j \varphi=0$ with two independent variables and constant coefficients are discussed in detail. The general solution which can be used in the approximation to the conditions of the definite solution of the practical problems is presented. To illustrate the use of the results obtained in this paper, some practical examples in mechanics are given.