应用数学和力学，第6卷第5期（1985年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

首次积分与临界情形运动稳定性*

徐业宜

（合肥工业大学机械二系，1984年4月24日收到）

摘　要

本文指出1946年苏联学者Четаев提出用首次积分的线性组合来构造李雅普诺夫函数后Четаев及其学生们解决保守系统的运动稳定性问题均用此方法，但是由于用试凑的方法解决起来比较麻烦，而且用他们的方法所得出的稳定性条件也不够完全，只能解决问题的纯虚根的情形，零根的情形却未考虑。

本文提出利用降阶方法，也就是将微分方程通过消除循环坐标变换成标准形式，这样稳定性条件可直接由能量积分得出，用此方法计算起来不仅很简捷，而且零根情形亦可以考虑，因此对于具有两个循环坐标问题可以化成二阶系统并且很简捷地得到稳定性条件新结论。至于一个循环坐标问题，事实上Четаев及其学生们并未解决，例如外环为水平或任意角的陀螺仪的运动稳定性问题，但是用我们的方法却给出条件稳定与不稳定的条件。

一、引　言

临界情形运动稳定性问题不好解决，Четаев提出用力学首次积分的线性组合构造李雅普诺夫函数，虽然解决了一些问题，比如文[1]，[2]，[3]，[4]，但是由于用试凑的方法解决起来比较麻烦。所得的稳定性条件也不够全面。而他们所解决的刚体力学问题，虽然是三个自由度，但是却有两个循环坐标，至于力学系统少于两个循环坐标，比如文[5]，[6]，[7]只有一个循环坐标，由于力学首次积分不能构造成李雅普诺夫函数，于是他们凑一个一次近似的首次积分，所谓Четаев积分[8]，这样的线性组合构造成的V函数，显然不能算解决。因为这些问题属于第二临界情形。本文提出用消除坐标法。将微分方程降阶，根据能量积分判定稳定性。对于具有两个循环坐标问题化成二阶系统，很简捷地得到稳定性条件的新结论。（作者于1962年全国一般力学会议上提出的，报告的题目是“陀螺运动稳定性的Poincare方法”）。至于只有一个循环坐标问题，将微分方程化成四阶系统，根据能量积分，得出条件稳定的判定方法。

二、具有两个循环坐标的三个自由度系统

卡尔丹陀螺仪外环轴为垂直时的稳定性问题，由于有两个循环坐标总可以化为二阶系统。

* 李骊推荐

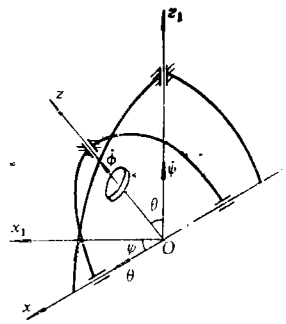

图 1

所采用的坐标如图 1 所示：

x_1，y_1，z_1 为固定坐标，其中 z_1 轴与陀螺仪外环的转动轴重合，z_1 位于铅垂位置；x，y，z 为与内环连在一起的动坐标，其中 z 轴又与同内环连在一起的陀螺 G 的转动轴重合；O 是这两种坐标共同的原点。

J 为外环对 z_1 轴的转动惯量，A'，B'，C' 与 A，B，C，分别为内环与陀螺 G 对于动坐标轴的转动惯量，且设 $A=B$；p'，q'，r' 与 p，q，r 分别为内环和陀螺 G 的绝对角速度在 x，y，z 三轴上的投影，l 为内环及陀螺 G 的重心到 O 点的距离，其质量记作 m；$\dot\psi$ 为外环绕 z_1 轴的角速度；$\dot\theta$ 为内环的 z 轴章动运动的角速度；$\dot\varphi$ 为陀螺 G 绕 z 轴转动的角速度。

不难得出：

$$p=\dot\theta \qquad q=\dot\psi\sin\theta \qquad r=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi$$
$$p'=\dot\theta \qquad q'=\dot\psi\sin\theta \qquad r'=\dot\psi\cos\theta$$

整个陀螺仪系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}J\dot\psi^2+\frac{1}{2}(A'\dot\theta^2+B'\dot\psi^2\sin^2\theta+C'\dot\psi^2\cos^2\theta)+\frac{1}{2}[A\dot\theta^2+A\dot\psi^2\sin^2\theta+C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)^2] \tag{2.1}$$

势能为

$$V=mgl\cos\theta \tag{2.2}$$

拉格郎日函数为

$$L=T-V$$

据此按拉格郎日方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_s}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \qquad (s=1,2,3) \tag{2.3}$$

得到整个系统的运动微分方程式，因为 ψ，φ 为循环坐标，显然有两个首次积分及一个二阶微分方程，即

$$\left.\begin{aligned}&J\dot\psi+B'\dot\psi\sin^2\theta+C'\dot\psi\cos^2\theta+A\dot\psi\sin^2\theta+C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)\cos\theta=\beta_1\\&C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)=\beta_2\\&(A+A')\ddot\theta-[(A+B'-C')\dot\psi^2\cos\theta-C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)\dot\psi+mgl]\sin\theta=0\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

取常数

$$\left.\begin{aligned}&\beta_1=Cr_0+\dot\psi_0(J+C')\\&\beta_2=Cr_0\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

则这组方程有如下的一组特解

$$\psi_0=\dot\psi_0 t, \qquad \theta_0=0, \qquad \varphi_0=(r_0-\dot\psi_0)t \tag{2.6}$$

从方程(2.4)的第一式得出

$$\dot\psi=\frac{Cr_0+\dot\psi_0(J+C')-C(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)\cos\theta}{J+B'\sin^2\theta+C'\cos^2\theta+A\sin^2\theta}$$

$$=\frac{Cr_0(1-\cos\theta)+\dot\psi_0(J+C')}{J+C'+(A+B'-C')\sin^2\theta} \tag{2.7}$$

展开上式到 θ 的二次项，得

$$\psi=\psi_0+\frac{1}{2}\ \frac{Cr_0-2\psi_0(A+B'-C')}{J+C'}\theta^2+O(\theta^3) \tag{2.7$'$}$$

消除方程组(2.4)第三式中的 ψ，$\dot{\varphi}$，并展开 θ 到三次项，得

$$(A+A')\ddot{\theta}-[(A+B'-C')\psi_0{}^2-Cr_0\psi_0+mgl]\theta+\Big\{\frac{1}{3!}[(A+B'-C')\psi_0{}^2-Cr_0\psi_0$$

$$+mgl]+\frac{1}{2}[Cr_0-2\psi_0(A+B'-C')]^2+\frac{1}{2}\psi_0{}^2(A+B'-C')\Big\}\theta^3+O(\theta^4)=0 \tag{2.8}$$

系统的能量积分为

$$H=T+V=\frac{1}{2}J\,\psi^2+\frac{1}{2}(A'\dot{\theta}^2+B'\psi^2\sin^2\theta+C'\psi^2\cos^2\theta)$$

$$+\frac{1}{2}[A\dot{\theta}^2+A\psi^2\sin^2\theta+C(\dot{\varphi}+\psi\cos\theta)^2]+mgl\cos\theta \tag{2.9}$$

消除式中的 ψ，$\dot{\varphi}$，并以 H_0 表示 $\theta=\dot{\theta}=0$ 的能量积分 (2.9) 的值，则有

$$H-H_0=\frac{1}{2}(A+A')\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}[-\psi_0{}^2(A+B'-C')+Cr_0\psi-mgl]\theta^2$$

$$+\Big\{[-\psi_0{}^2(A+B'-C')+Cr_0\psi_0-mgl]+\frac{1}{2}[Cr_0{}^2-2\,\psi_0\,(A+B'-C')\,]^2\frac{1}{J+C'}$$

$$+\frac{1}{2}\psi_0{}^2(A+B'-C')\Big\}\frac{1}{4}\theta^4+O(\theta^5) \tag{2.10}$$

取 $H-H_0$为 V 函数，如

$$-(A+B'-C')\psi_0{}^2+Cr_0\psi_0-mgl>0 \tag{2.11}$$

此时方程 (2.8)为一对纯虚根，显然式 $V=H-H_0$ 为定号函数，因此满足(2.11)一定稳定．

如

$$-(A+B'-C')\psi_0{}^2+Cr_0\psi_0-mgl=0 \tag{2.12}$$

此时方程(2.8)为一对零根情形，只要$(A+B'-C')>0$则式(2.10)亦为定号函数，所以满足(2.12)也一定稳定．因此得到稳定条件为

$$-(A+B'-C')\psi_0{}^2+Cr_0\psi_0-mgl\geqslant 0 \tag{2.13}$$

若把 ψ_0 看作参数，则满足 (2.13) 取等式的 ψ_0 的允许范围是

$$\psi_{02}\leqslant\psi_0\leqslant\psi_{01}$$

其中

$$\left.\begin{matrix}\psi_{01}\\ \psi_{02}\end{matrix}\right\}=\frac{Cr_0}{2(A+B'-C')}\left[\pm\sqrt{1-\frac{4mgl(A+B'-C')}{C^2r_0^2}}\right]$$

对应于陀螺仪实际运动 $\dot{\psi}_0$ 的解都要为实数，则必须

$$C^2r_0{}^2\geqslant 4(A+B'-C')mgl \tag{2.14}$$

可见这为稳定的必要条件，若初始值$\dot{\psi}_0$ 满足

$$\dot{\psi}_{02}\leqslant\dot{\psi}_0\leqslant\dot{\psi}_{01}$$

则易知条件 (2.14) 又是充分的．

对于拉格郎日情形垂直陀螺的稳定性，用我们所提出的方法，同样得到稳定条件的新结

论。即稳定的必要与充分条件为

$$C^2r_0^2 \geqslant 4Amgl$$

三、具有一个循环坐标的三个自由度系统

这样系统总可以化成四阶系统，即

$$\dot{x}_s = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + p_{s3}x_3 + p_{s4}x_4 + X_s(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$(s=1,2,3,4) \qquad (3.1)$$

我们现在讨论方程(3.1)有两对纯虚根$\pm\lambda_1 i$与$\pm\lambda_2 i$，经过非奇异线性变换$y=Ax$方程(3.1)总可以化成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\lambda_1 y_2 + Y_1(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dot{y}_2 &= \lambda_1 y_1 + Y_2(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dot{y}_3 &= -\lambda_2 y_4 + Y_3(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ \dot{y}_4 &= \lambda_2 y_3 + Y_4(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{aligned}\right\} \qquad (3.2)$$

其中$Y_i(y_1, y_2, y_3, y_4)$为y_1，y_2，y_3，y_4的非线性项，如有首次积分

$$H = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 + \cdots \qquad (3.3)$$

则一定条件稳定。

因为$y_3=y_4=0$（或$y_1=y_2=0$）时，方程(3.2)，(3.3)分别退化为

$$\left.\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\lambda_1 y_2 + Y_1(y_1, y_2, 0, 0) \\ \dot{y}_2 &= \lambda_1 y_1 + Y_2(y_1, y_2, 0, 0) \end{aligned}\right\} \qquad (3.4)$$

$$H(y_1, y_2, 0, 0) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots \qquad (3.5)$$

方程(3.5)对y_1，y_2来说为定号函数，所以方程(3.4)的零解$y_1=y_2=0$为稳定的，因此扰动方程(3.1)对于零解$x_1=x_2=x_3=x_4=0$，只要有首次积分

$$H = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 + \cdots$$

其中y与x的关系由$y=Ax$确定，则在条件

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0 \\ y_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

情况下，方程(3.1)未扰运动为条件稳定。

至于扰动方程(3.2)，具有首次积分(3.3)，没有条件(3.6)的限制是否稳定呢？我们将进一步论证。

下面讨论卡尔丹陀螺仪，外环轴为水平情形的稳定性，可以论证为条件稳定。

所采用的坐标如图2(a)所示，符号规定如下：取对称陀螺固定点O作为定坐标$O\eta\zeta\xi$原点，其中$O\xi$轴垂直向上，$O\zeta$轴位于水平位置且与外环的转轴重合，动坐标系$Oxyz$连在内环上，Ox轴与内环的旋转轴重合，而Oz轴又与同内环连在一起陀螺G的转动轴重合，$O\eta$与Oy轴的方向按右手坐标系定出、设x，y，z轴为内环及陀螺G通过O点的惯性主轴。

J——外环对定轴$O\zeta$的转动惯量；A'，B'，C'——内环对动坐标x，y，z三轴的转动惯量：$A=B$，C——陀螺对动坐标轴x，y，z的转动惯量；l为内环和陀螺G的重心至原点O的距离；θ——内环的章动角，ψ为外环绕$O\zeta$轴的转角；φ——陀螺绕Oz轴的转角；$\dot{\theta}$，$\dot{\psi}$，$\dot{\varphi}$为其相应的角速度。

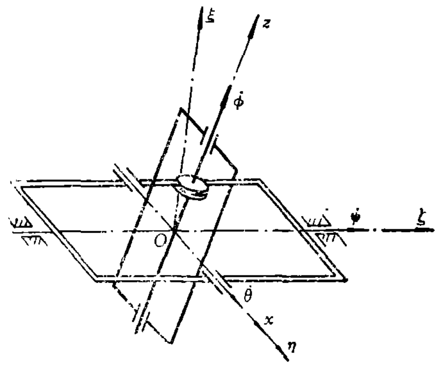

图 2(a)

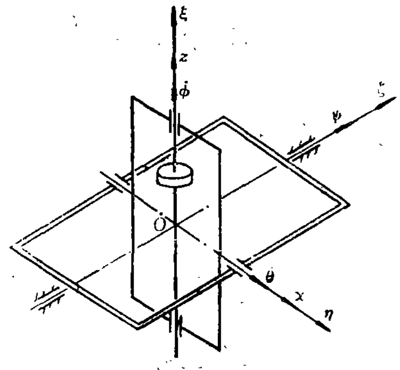

图 2(b)

当外环为水平时整个系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}\left\{(A+A')\dot{\theta}^2+[(A+B')\sin^2\theta+C'\cos^2\theta+J]\dot{\psi}^2+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2\right\}$$

势能为

$$V=mgl\sin\theta\sin\psi$$

$T-V$ 组成拉格郎日函数，因此按拉格郎日方程式得出下面方程组

$$\left.\begin{aligned}&(A+A')\ddot{\theta}-(A+B'-C')\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\dot{\psi}\sin\theta+mgl\cos\theta\sin\psi=0\\&\frac{d}{dt}\left\{[(A+B')\sin^2\theta+C'\cos^2\theta+J]\dot{\psi}+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta\right\}+mgl\sin\theta\cos\psi=0\\&C\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)=0\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

这些方程组有如下特解

$$\theta=\frac{1}{2}\pi,\qquad \dot{\theta}=0,\qquad \psi=\frac{1}{2}\pi,\qquad \dot{\psi}=0,\qquad \dot{\varphi}=r_0$$

正对应陀螺 G 铅直向上，如图 2(b) 所示，今分析此时陀螺以等角速度 r_0 绕 z 轴转动时的稳定性。

因而方程组 (3.7) 有一个首次积分为

$$C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)=Cr_0$$

以此式消除 (3.7) 的前二式中的 $\dot{\varphi}$ 得方程组

$$\left.\begin{aligned}&(A+A')\ddot{\theta}-(A+B'-C')\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta+Cr_0\dot{\psi}\sin\theta+mgl\cos\theta\sin\psi=0\\&\frac{d}{dt}\left\{[(A+B')\sin^2\theta+C'\cos^2\theta+J]\dot{\psi}+Cr_0\cos\theta\right\}+mgl\sin\theta\cos\psi=0\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

为了得到扰动方程，引入符号

$$\theta=\frac{1}{2}\pi+\eta_1,\qquad \dot{\theta}=\dot{\eta},\qquad \psi=\frac{1}{2}\pi+\eta_2,\qquad \dot{\psi}=\dot{\eta}_2$$

以此代入 (3.8) 式，并考虑到未扰运动，得

$$\left.\begin{aligned}&(A+A')\ddot{\eta}_1+(A+B'-C')\dot{\eta}_1^2\cos\eta_1\sin\eta_1+Cr_0\dot{\eta}_2\cos\eta_1-mgl\sin\eta_1\cos\eta_2=0\\&[(A+B')\cos^2\eta_1+C'\sin^2\eta_1+J]\ddot{\eta}_2+2\dot{\eta}_2[-(A+B')\dot{\eta}_1\sin\eta_1\cos\eta_1\\&\quad+C'\dot{\eta}_1\sin\eta_1\cos\eta_1]-Cr_0\dot{\eta}_1\cos\eta_1-mgl\cos\eta_1\sin\eta_2=0\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

此式变量按泰勒级数展开，同时令

$$a=\frac{1}{J+B'+A},\quad b=\frac{1}{A+A'},\quad mql=e,\ l>0$$

$$z_1=\eta_1,\ z_2=\dot{\eta}_1,\quad z_3=\eta_2,\quad z_4=\dot{\eta}_2$$

于是扰动方程 (3.9) 可以写成如下正则形式

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt}&=z_2\\ \frac{dz_2}{dt}&=-Cr_0bz_4+ebz_1+Z_2(z_1,z_2,z_3,z_4)\\ \frac{dz_3}{dt}&=z_4\\ \frac{dz_4}{dt}&=a(Cr_0z_2+ez_3)+Z_4(z_1,z_2,z_3,z_4)\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

其中

$$Z_2=b[-(A+B'-C')z_4^2\cos z_1\sin z_1-Cr_0z_4\cos z_1-e\sin z_1\cos z_3]-ebz_1+Cr_0bz_4$$

$$Z_4=\frac{1}{(A+B')\cos^2z_1+C'\sin^2z_1+J}\Big\{2z_4[-(A+B')z_2\cos z_1\sin z_1+C'z_2\sin z_1\cos z_1]$$
$$-Cr_0z_2\cos z_1-e\cos z_1\sin z_3)\Big\}-a(Cr_0z_2+ez_3)$$

式 (3.10) 一次近似特征方程为

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 0\\ eb & -\lambda & 0 & -Cr_0b\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 0 & aCr_0 & ae & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

即
$$\lambda^4+\lambda^2(abC^2r_0^2-ae-be)+abe^2=0$$
$$\lambda^2=\frac{-(abC^2r_0^2-ae-be)\pm\sqrt{(abC^2r_0^2-ae-be)^2-4e^2ab}}{2}$$

若
$$(abC^2r_0^2-ae-be)^2-4e^2ab>0\text{亦即}$$
$$C^2r_0^2>mgl[(J+2A+A')\pm2\sqrt{(J+B'+A)(A+A')}]\tag{3.11}$$

显然特征方程为两对纯虚根；即 $\lambda=\pm\lambda_ji\ (j=1,2)$

我们所研究的系统是保守系统，对扰动方程 (3.9)，有如 (3.3) 类型的首次积分，即

$$H-H_0=\frac{1}{2}(A+A')\dot{\eta}_1^2+\frac{1}{2}(A+B'+J)\dot{\eta}_2^2-mgl\left(\frac{1}{2}\eta_1^2+\frac{1}{2}\eta_2^2\right)+\cdots$$

所以只要满足条件 (3.6) 以及

$$C^2r_0^2>mgl[J+2A+A'\pm2\sqrt{(J+B'+A)(A+A')}]$$

则一定条件稳定.

若

$$(abC^2r_0^2-ae-be)^2-4e^2ab<0$$

此时令

$$u=\frac{abC^2r_0^2-ae-be}{2},\qquad V_i=\frac{[(abC^2r_0^2-ae-be)^2-4e^2ab]^{\frac{1}{2}}}{2}$$

则

$$\lambda_{1,2}^2 = -u \pm v_i$$

$$\lambda = r^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta_j+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta_j+2k\pi}{2}\right)\right] \quad (k=0,1;\ j=1,\ 2.)$$

显然可以看出特征根的实部有两正，两负，因此为不稳定。

至于外环轴为任意角时，用我们的方法同样可得条件稳定和不稳定的条件。

四、结　束　语

1946年 Четаев 提出用力学首次积分线性组合构造 Ляпунов 函数后，Четаев 及其学生们解决保守系统的运动稳定性问题，均用此方法，但是这种方法，由于用试凑的方法比较繁，另外所解决的问题只限于纯虚根的情形，而零根情形却未考虑，因此所得的稳定性条件也不全面，而用消除循环坐标法，我们就可以得到新结论。比如拉格郎日情况下陀螺的铅直旋转稳定的条件是

$$C^2 r_0^{\,2} \geqslant 4Amgl$$

而且计算非常简便，至于外环轴为水平或任意角时，事实上他们未解决，而用降阶法（或称消除循环坐标法）却给出条件稳定和不稳定的判定方法。

参　考　文　献

[1] Четаев Н. Г., Об устойчивости вращательных движении снаряда, *ПММ*, вып., 1 (1946).

[2] Четаев Н. Г., Об устойчивости вращений твердого тела с одной неподвижной точкой в случае лагранжа, *ПММ* вып. 1 (1954).

[3] Магнус К., Об устойчивости движения тяжелого симмтричного гироскопа в кардановом подвесе, *ПММ*, вып. 2 (1958)

[4] Ккементуло В. В., Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе находящегося в потенцильном силовом поле, *ПММ*, вып. 1 (1962).

[5] Румянцев В.В., Об устойчивости гироскопа в кардановом подвесе II. *ПММ*. вып. 4 (1958).

[6] Чжан Сы-ин, К устойчивости движения гироскопа, *ПММ*, вып. 3 (1959).

[7] Табаровский А. М., Об устойчивости движения тяжелого гироскопа в кардановом подвесе, *ПММ*, вып. 3 (1960).

[8] Четаев Н. Г., О некоторых задачах об устойчивости движения в механике, *ПММ*. вып. 3 (1956).

First Integral and Stability of Motion in the Critical Cases

Xu Ye-yi

(*Anhui Economical Management College, Hefei*)

Abstract

In this paper, we indicate that after the Liapunov function by using linear combination of mechanical first integral was suggested by Chetayev in 1946. He and his students solved stability of conservative system by means of this method. But it has trouble to solve the problems by means of cut and try, moreover. The condition of stability is imperfect. Solution by this method is limited for problems of purely imaginary roots. The cases of zero roots have not been considered. Condition of stability secured is more strict.

This paper suggests that the differential equation can be transformed into standard form by method of cancellation of cyclic coordinates (method of lowering degree off order), and condition of stability can be determined by energy integral. By this method not only the computation is clear and concise. But also zero roots can be considered. Therefore the problems of two cyclic coordinates can be transformed into second order system, and we get new conclusion of the condition of stability simply. As for problems of single cyclic coordinate, in fact, Chetayev and his students did not solve the stability of the gyroscope of which outer-gimal with horizontal axis or arbitrary angle. In this paper, it shows that method suggested here is useful for stability of these problems. The condition of conditional stability and instability were derived.