应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

外推法对奇异摄动问题数值解的应用

苏煜城

（南京大学，1984年4月4日收到）

摘　要

在本文中讨论了外推法对椭圆—抛物奇异摄动问题数值解的应用，提高了解的精度，估出了精度的阶数，并对文[1]中的一致收敛性在附录中给出证明。

众所周知，Richardson外推方法可用来提高数值解的精度。这一方法亦可用于奇异摄动问题，但须对方法加以变形，在外推公式中的系数将依赖于小参数 ε。

本文对椭圆—抛物奇异摄动问题的一致差分格式构造其解的外推公式，并估计了这一公式的精度。在文章的最后一部分对[1]中所研究的差分格式的一致收敛性给出证明。

一、摄动问题和差分问题

1. 摄动问题

在矩形区域 $R:(0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T)$ 内讨论椭圆型方程第一边值问题：

$$\mathscr{L}_\varepsilon u\equiv\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y) \tag{1.1}$$

$$u\Big|_\Gamma=0 \tag{1.2}$$

其中 ε 是正的小参数，Γ是矩形R的边界。

我们假定：

1) $a(x,y)\geqslant\alpha>0\qquad(\alpha=\text{const})$；　(1.3)

2) $c(x,y)\leqslant 0$；

3) 方程的系数$a(x,y)$，$c(x,y)$和右端函数$f(x,y)$充分光滑；

4) $f(0,y)=0$，$f(l,y)=0$，$(0\leqslant y\leqslant T)$；在矩形$R$的四个角点上

$$a_x(x,y)=0,\quad \varepsilon f_{yy}-f_{xx}-a(x,y)f_y=0. \tag{1.4}$$

退化问题$(\varepsilon=0)$：

$$\mathscr{L}_0 w(x,y)\equiv\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-a(x,y)\frac{\partial w}{\partial y}+c(x,y)w=f(x,y) \tag{1.5}$$

$$w\Big|_{y=0}=0 \tag{1.6}$$

$$w\Big|_{x=0}=0,\quad w\Big|_{x=l}=0 \tag{1.7}$$

2．差分问题

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}u^{(h,\tau)}(x,y)\equiv\gamma(x,y,\tau)u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)}(x,y)+u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}(x,y)-a(x,y)u_{\mathring{y}}^{(h,\tau)}(x,y)$$
$$+c(x,y)u^{(h,\tau)}(x,y)=f(x,y) \tag{1.8}$$

$$u^{(h,\tau)}\Big|_{\Gamma_{h,\tau}}=0 \tag{1.9}$$

这里 h,τ 分别是沿 x 轴和 y 轴方向的步长，$x_i=ih$，$y_j=j\tau$，$i=0,1,\cdots,N_1$，$j=0,1,\cdots,N_2$，$N_1h=l$，$N_2\tau=T$。$\gamma(x,y,\tau)$ 是 Il'in 因子：

$$\gamma(x,y,\tau)=\frac{a(x,y)\tau}{2}\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon} \tag{1.10}$$

$\Gamma_{h,\tau}$ 是网格区域的边界，

$$u_{y\bar{y}}^{(h,\tau)}=(u^{(h,\tau)}(x,y+\tau)-2u^{(h,\tau)}(x,y)+u^{(h,\tau)}(x,y-\tau))/\tau^2$$

$$u_{x\bar{x}}^{(h,\tau)}=(u^{(h,\tau)}(x+h,y)-2u^{(h,\tau)}(x,y)+u^{(h,\tau)}(x-h,y))/h^2$$

$$u_{\mathring{y}}^{(h,\tau)}=(u^{(h,\tau)}(x,y+\tau)-u^{(h,\tau)}(x,y-\tau))/2\tau$$

如果我们用网格$(2h,2\tau)$，则相应的差分问题为

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(2h,2\tau)}u^{(2h,2\tau)}(x,y)\equiv\gamma(x,y,2\tau)u_{y\bar{y}}^{(2h,2\tau)}(x,y)+u_{x\bar{x}}^{(2h,2\tau)}(x,y)$$
$$-a(x,y)u_{\mathring{y}}^{(2h,2\tau)}(x,y)+c(x,y)u^{(2h,2\tau)}(x,y)=f(x,y) \tag{1.11}$$

$$u^{(2h,2\tau)}\Big|_{\Gamma_{2h,2\tau}}=0 \tag{1.12}$$

为统一起见，将网格 (h,τ) 和 $(2h,2\tau)$ 上的差分问题写为

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(\mu,\nu)}u^{(\mu,\nu)}(x,y)\equiv\gamma(x,y,\nu)u_{y\bar{y}}^{(\mu,\nu)}(x,y)+u_{x\bar{x}}^{(\mu,\nu)}(x,y)$$
$$-a(x,y)u_{\mathring{y}}^{(\mu,\nu)}(x,y)+c(x,y)u^{(\mu,\nu)}(x,y)=f(x,y) \tag{1.13}$$

$$u^{(\mu,\nu)}(x,y)\Big|_{\Gamma_{\mu,\nu}}=0 \tag{1.14}$$

其中 $\mu=h$ 或 $2h$，$\nu=\tau$ 或 2τ。

在附录中我们将证明，差分格式(1.8)，(1.9)关于小参数 ε 一致收敛，其收敛阶为 $O(\tau^{\frac{1}{2}}+h^2)$。如果在渐近解中取更多项，则可达到 $O(\tau+h^2)$。下面利用外推方法提高这一逼近精度。

二、外 推 方 法

我们知道，摄动问题(1.1)、(1.2)在 $y=T$ 附近出现边界层。为了构造这一问题在全区域内的一致有效渐近展开式，按 Люстерник–Вишик 方法需在$y=T$ 隣域内对原来摄动算子

$\mathscr{L}_\varepsilon$作第二次分解以构造边界层校正项。为此，作伸长变换 $t=(T-y)/\varepsilon$，并将方程中的系数 $a(x,y)$，$c(x,y)$ 在 $y=T$ 附近展开，从而有

$$\mathscr{L}_\varepsilon u\equiv\varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a(x,T)\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c(x,T)$$

$$-\varepsilon t c'_y(x,T)+\frac{\varepsilon^2 t^2}{2!}c''_{y^2}(x,T)+\cdots \tag{2.1}$$

这是算子 $\mathscr{L}_\varepsilon$ 的第二次分解。在这分解中的主要部份是

$$M_0 u\equiv\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-a(x,T)\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.2}$$

利用它能求得边界层函数 $v_0=-w(x,T)\exp(-a(x,T)(T-y)/\varepsilon)$，它满足

$$M_0 v_0\equiv\varepsilon\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-a(x,T)\frac{\partial v_0}{\partial y}=0 \tag{2.3}$$

$$v_0\Big|_{y=T}+w(x,T)=0 \tag{2.4}$$

对算子 M_0 我们可以构造相应的差分算子：

$$M_0^{(h,\tau)}\equiv\gamma(x,y,\tau)\Delta_{y\bar{y}}-a(x,T)\Delta_{\bar{y}} \tag{2.5}$$

$$M_0^{(2h,2\tau)}\equiv\gamma(x,y,2\tau)\Delta_{y\bar{y}}-a(x,T)\Delta_{\hat{y}} \tag{2.6}$$

为了提高数值解的精度，我们利用外推公式

$$\tilde{u}^{(h,\tau)}(x,y)=Au^{(h,\tau)}(x,y)+Bu^{(2h,2\tau)}(x,y) \tag{2.7}$$

其中 $u^{(h,\tau)}(x,y)$，$u^{(2h,2\tau)}(x,y)$ 是分别利用网格 (h,τ) 和 $(2h,2\tau)$ 所求得的差分问题的解。系数将依赖于 τ 和 ε。在 A,B 是常数的情况下精度不能提高[2]。

现选取 A,B，要求对于函数 $U(x,y)=a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2+d_1$ 有下面关系式成立：

$$(AM_0^{(h,\tau)}+BM_0^{(2h,2\tau)})U(x,y)=M_0U(x,y) \tag{2.8}$$

如此我们有

$$A\gamma(x,y,\tau)+B\gamma(x,y,2\tau)=\varepsilon,\quad A+B=1 \tag{2.9}$$

因而

$$A=\frac{\varepsilon-\gamma(x,y,2\tau)}{\gamma(x,y,\tau)-\gamma(x,y,2\tau)},\quad B=-\frac{\varepsilon-\gamma(x,y,\tau)}{\gamma(x,y,\tau)-\gamma(x,y,2\tau)} \tag{2.10}$$

这样我们就得到提高差分问题解的精度的外推公式(2.7)，(2.10)。

三、摄动问题和差分问题的渐近解

1．摄动问题的渐近解

我们将摄动问题(1.1)，(1.2)的解表示为以下形式：

$$u(x,y)=U_N(x,y)+V_N(x,y) \tag{3.1}$$

$$U_N(x,y)=w_0(x,y)+\varepsilon w_1(x,y)+\cdots+\varepsilon^N w_N(x,y) \tag{3.2}$$

这里 $w_0(x,y)$，$w_i(x,y)$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 分别表示下面问题的解：

$$\mathscr{L}_0 w_0(x,y)=f(x,y),\quad w_0\Big|_S=0 \tag{3.3}$$

$$\mathscr{L}_0 w_i(x,y) = -\frac{\partial^2 w_{i-1}}{\partial y^2},\quad w_i\Big|_S = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,N) \tag{3.4}$$

而$V_N(x,y)$由微分问题

$$\mathscr{L}_\varepsilon V_N(x,y) = -\varepsilon^{N+1}\frac{\partial^2 w_N}{\partial y^2} \tag{3.5}$$

$$V_N(0,y) = V_N(l,y) = 0 \tag{3.6}$$

$$V_N(x,0) = 0,\ V_N(x,T) = -U_N(x,T) \tag{3.7}$$

确定，其中$S=\{(x,0), 0\leqslant x\leqslant l\}\cup\{(0,y),\ 0\leqslant y<T\}\cup\{(l,y),\ 0\leqslant y<T\}$.

以下我们总假定$a(x,y)=a=\text{const}$.

2. 差分问题的渐近解

我们先将差分算子(1.13)进行改写. 已知,

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(\mu,\nu)} \equiv \gamma(\nu)\Delta_{y\bar{y}} + \Delta_{x\bar{x}} - a\Delta_{\hat{y}} + c(x,y)$$

$$\gamma(\nu) = \frac{a\nu}{2}\,\text{cth}\frac{a\nu}{2\varepsilon} \to \frac{a\nu}{2} \qquad (\varepsilon\to 0)$$

所以相应的退化差分算子为

$$\mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)} = \Delta_{x\bar{x}} - a\Delta_{\hat{y}} + c(x,y) + \frac{a\nu}{2}\Delta_{y\bar{y}} = \Delta_{x\bar{x}} - a\Delta_{\bar{y}} + c(x,y) \tag{3.8}$$

因此,

$$\Delta_{x\bar{x}} - a\Delta_{\hat{y}} + c(x,y) = \mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)} - \frac{a\nu}{2}\Delta_{y\bar{y}}$$

从而我们有

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(\mu,\nu)} \equiv \gamma(\nu)\Delta_{y\bar{y}} + \mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)} - \frac{a\nu}{2}\Delta_{y\bar{y}} \tag{3.9}$$

我们将差分问题的解表示为以下形式:

$$u^{(\mu,\nu)}(x,\ y) = U_N^{(\mu,\nu)}(x,\ y) + V_N^{(\mu,\nu)}(x,y) \tag{3.10}$$

$$U_N^{(\mu,\nu)}(x,\ y) = \sum_{i=0}^{N}\gamma^i(\nu)w_i^{(\mu,\nu)}(x,y) \tag{3.11}$$

这里的函数$w_i^{(\mu,\nu)}(x,y)$由下面一系列边值问题确定:

$$\mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)}\bar{U}_0^{(\mu,\nu)}(x,y) = f(x,y),\quad \bar{U}_0\Big|_{S_{\mu,\nu}} = 0 \tag{3.12$_0$}$$

$$\mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)}w_0^{(\mu,\nu)}(x,y) = f(x,y) + \frac{a\nu}{2}\Delta_{y\bar{y}}\bar{U}_0^{(\mu,\nu)}(x,y),\quad w_0^{(\mu,\nu)}\Big|_{S_{\mu,\nu}} = 0 \tag{3.13$_0$}$$

$$\mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)}\bar{U}_k^{(\mu,\nu)}(x,\ y) = -\Delta_{y\bar{y}}w_{k-1}^{(\mu,\nu)}(x,\ y),\quad \bar{U}_k^{(\mu,\nu)}\Big|_{S_{\mu,\nu}} = 0 \qquad (k=1,2,\cdots,N) \tag{3.12$_k$}$$

$$\mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)}w_k^{(\mu,\nu)}(x,y) = \frac{a\nu}{2}\Delta_{y\bar{y}}\bar{U}_k^{(\mu,\nu)}(x,\ y) - \Delta_{y\bar{y}}w_{k-1}^{(\mu,\nu)}(x,\ y),\quad w_k^{(\mu,\nu)}\Big|_{S_{\mu,\nu}} = 0$$

$$(k=1,2,\cdots,N) \tag{3.13$_k$}$$

而$V_N^{(\mu,\nu)}(x,y)$是下面问题的解：

$$\mathcal{L}_\varepsilon^{(\mu,\nu)}V_N^{(\mu,\nu)}(x,y)=\frac{a\nu}{2}\Delta_{y\bar{y}}\sum_{i=0}^{N}\gamma^i(\nu)(w_i^{(\mu,\nu)}-\bar{U}_i^{(\mu,\nu)})-\gamma^{N+1}(\nu)\Delta_{y\bar{y}}w_N^{(\mu,\nu)}(x,y) \tag{3.14}$$

$$V_N^{(\mu,\nu)}(0,y)=V_N^{(\mu,\nu)}(l,y)=0 \tag{3.15}$$

$$V_N^{(\mu,\nu)}(x,0)=0,\quad V_N^{(\mu,\nu)}(x,T)=-U_N^{(\mu,\nu)}(x,T) \tag{3.16}$$

其中$S_{\mu,\nu}$是网格边界。

四、几 个 引 理

众所周知，对于退化微分算子

$$\mathcal{L}_0\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}-a\frac{\partial}{\partial y}+c(x,y)$$

和退化差分算子

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\equiv\Delta_{x\bar{x}}-a\Delta_{\bar{y}}+c(x,y)$$

来说有极值原理成立。

引理 1 若$w\geqslant 0$（在S上），并且$\mathcal{L}_0 w\leqslant 0$，则对一切$(x,y)\in\bar{Q}:(0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y<T)$有$w\geqslant 0$。

若$w^{(\mu,\nu)}\geqslant 0$（在$S_{\mu,\nu}$上），并且$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}w^{(\mu,\nu)}\leqslant 0$，则对一切$(x,y)\in\bar{Q}_{\mu,\nu}$有$w^{(\mu,\nu)}\geqslant 0$，其中$\bar{Q}_{\mu,\nu}$是$\bar{Q}$的网格区域，$S_{\mu,\nu}$是其边界。

引理 2 设$w=w(x,y)$是$\bar{Q}$内任意一个光滑函数，$w^{(\mu,\nu)}=w^{(\mu,\nu)}(x,y)$是$\bar{Q}_{\mu,\nu}$内任意一个网格函数，则有

$$|w(x,y)|\leqslant\max_S|w(x,y)|+\frac{T}{a}\max_{\bar{Q}}|\mathcal{L}_0 w(x,y)| \tag{4.1}$$

$$|w^{(\mu,\nu)}(x,y)|\leqslant\max_{S_{\mu,\nu}}|w^{(\mu,\nu)}(x,y)|+\frac{T}{a}\max_{\bar{Q}_{\mu,\nu}}|\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}w^{(\mu,\nu)}(x,y)| \tag{4.2}$$

证 构造辅助函数

$$F_\pm(x,y)=\max_S|w(x,y)|+\frac{y}{a}\max_{\bar{Q}}|\mathcal{L}_0 w(x,y)|\pm w(x,y)$$

$$F_\pm^{(\mu,\nu)}(x,y)=\max_{S_{\mu,\nu}}|w^{(\mu,\nu)}(x,y)|+\frac{y}{a}\max_{\bar{Q}_{\mu,\nu}}|\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}w^{(\mu,\nu)}(x,y)|\pm w^{(\mu,\nu)}(x,y)$$

利用引理 1 即得到引理 2 的论断。

现对展开式(3.1)中的边界层校正项$V_N(x,y)$和展开式(3.10)中的$V_N^{(\mu,\nu)}(x,y)$作出估计。

引理 3 对于函数$V_N(x,y)$和$V_N^{(\mu,\nu)}(x,y)$分别有如下的估计：

$$|V_N(x,y)|\leqslant M(\varepsilon^{N+1}+\exp(-\alpha(T-y)/\varepsilon)) \tag{4.3}$$

$$|V_N^{(\mu,\nu)}(x,y)|\leqslant M(\gamma^{N+1}+\nu\eta+\exp(-\alpha(T-y)/\varepsilon)) \tag{4.4}$$

其中$\eta=\max\limits_i|\Delta_{y\bar{y}}(w_i^{(\mu,\nu)}-\bar{U}_i^{(\mu,\nu)})|$， $w_i^{(\mu,\nu)}$， $\bar{U}_i^{(\mu,\nu)}$分别是由(3.13$_0$),(3.13$_i$)；(3.12$_0$),(3.12$_i$)确定的函数。

证 我们知道，对于算子$\mathscr{L}_\varepsilon$和$\mathscr{L}_\varepsilon^{(\mu,\nu)}$来说极值原理成立。作辅助函数

$$F_\pm(x,y)=M\left(\frac{1}{\alpha}y\varepsilon^{N+1}+\exp(-\alpha(T-y)/\varepsilon)\right)\pm V_N(x,y)$$

$$F_\pm^{(\mu,\nu)}(x,y)=M\left(\frac{1}{\alpha}y(\gamma^{N+1}+\nu\eta)+\exp(-\alpha(T-y)/\varepsilon)\right)\pm V_N^{(\mu,\nu)}(x,y)$$

即可证得所要结果。

为了建立函数$w_i(x,y)$ $(i=0,1,\cdots,N)$（参看(3.3)和(3.4)）及其导数和网格函数$\bar{U}_i^{(\mu,\nu)}(x,y)$，$w_i^{(\mu,\nu)}(x,y)$及其差商的估计，现考虑下面的微分问题和差分问题：

$$\mathscr{L}_0 z(x,y)\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)z=\psi(x,y),\quad z\Big|_S=0 \tag{4.5}$$

$$\mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)}z^{(\mu,\nu)}(x,y)\equiv\Delta_{x\bar{x}}z^{(\mu,\nu)}-a\Delta_{\bar{y}}z^{(\mu,\nu)}+c(x,y)z^{(\mu,\nu)}=\Psi(x,y),\ z^{(\mu,\nu)}\Big|_{S_{\mu,\nu}}=0 \tag{4.6}$$

对于问题(4.5)和(4.6)的解$z(x,y)$，$z^{(\mu,\nu)}(x,y)$有下面二个引理成立。

引理 4

设

1) 函数$\psi(x,y)$有有界导数，$\psi(0,y)=0$，$\psi(l,y)=0$

2) $\Psi(x,y)$有有界差商，$\Psi(0,y)=\Psi(l,y)=0$

3) $|(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l[\psi''_{xx}(x,y)-\Delta_x\Delta_{\bar{x}}\Psi(x,y)]|\leqslant Mr$ (4.7)

4) $|(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l[\psi_{y^n}^{(n)}(x,y)-(\Delta_{\bar{y}})^{n-j}(\Delta_y)^j\Psi(x,y)]|\leqslant Mr$ (4.8)

则对问题(4.5)的解$z(x,y)$和问题(4.6)的解$z^{(\mu,\nu)}(x,y)$有估计式：

1) $|(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l[z''_{xx}(x,y)-\Delta_x\Delta_{\bar{x}}z^{(\mu,\nu)}(x,y)]|\leqslant M(\nu+\mu^2+r)$ (4.9)

2) $|(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l[z_{y^n}^{(n)}(x,y)-(\Delta_{\bar{y}})^{n-j}(\Delta_y)^j z^{(\mu,\nu)}(x,y)]|\leqslant M(\nu+\mu^2+r)$ (4.10)

其中n,k,j,l都是整数，$k,n\geqslant0$，$l=0,1,\cdots,k$；$j=0,1,\cdots,n$。

证 为了证明估计式(4.9)只须证明

$$|\Delta_x\Delta_{\bar{x}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r) \tag{4.11}$$

即可。为此，对方程(4.5)的二端关于x微分二次，则有

$$\mathscr{L}_0 z_{xx}(x,y)=\psi_{xx}(x,y)-2c_x(x,y)z_x-c_{xx}(x,y)z \tag{4.12}$$

对方程(4.6)的二端以算子$\Delta_{x\bar{x}}$作用之，则有

$$\mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{x\bar{x}}z^{(\mu,\nu)}(x,y)=\Delta_{x\bar{x}}(\Delta_{x\bar{x}}-a\Delta_{\bar{y}})z^{(\mu,\nu)}(x,y)+c(x,y)\Delta_{x\bar{x}}z^{(\mu,\nu)}(x,y) \tag{4.13}$$

利用关系式

$$\Delta_{x\bar{x}}(c\varphi)=\Delta_x c\Delta_x\varphi(x,y)+\Delta_{\bar{x}}\varphi(x,y)\Delta_{\bar{x}}c+\varphi(x,y)\Delta_{x\bar{x}}c+c(x,y)\Delta_{x\bar{x}}\varphi(x,y)$$

可将(4.13)改写为

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{x\bar{x}}z^{(\mu,\nu)}(x,y)=\Delta_{x\bar{x}}\Psi(x,y)-\Delta_x c\Delta_x z^{(\mu,\nu)}(x,y)-\Delta_{\bar{x}}z^{(\mu,\nu)}(x,y)\Delta_{\bar{x}}c$$
$$-z^{(\mu,\nu)}(x,y)\Delta_{x\bar{x}}c \tag{4.14}$$

根据(4.12)和(4.14)在引理的条件下可得估计式：

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{x\bar{x}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))=O(\nu+\mu^2+r)$$

再由引理的条件我们知道，表达式 $\Delta_{x\bar{x}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))$ 在 $x=0$，$x=l$ 和 $y=0$ 这三条边上都为零．从而由极值原理推得估计式(4.11)．

现证估计式(4.10)．由于

$$|(\Delta_{\bar{y}})^{n-l}(\Delta_y)^l[z_{y^n}^{(n)}(x,y)-(\Delta_{\bar{y}})^{n-j}(\Delta_y)^j z(x,y)]|\leqslant M\nu$$

为了证明(4.10)只须证明

$$|(\Delta_{\bar{y}})^{n-j}(\Delta_y)^j(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r) \tag{4.15}$$

以归纳法证之．对于 $n=0$，因为

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))=(\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}-\mathcal{L}_0)z(x,y)+\psi(x,y)-\Psi(x,y)$$

$$|(\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}-\mathcal{L}_0)z(x,y)|\leqslant M(\nu+\mu^2)$$

由引理条件$|\psi(x,y)-\Psi(x,y)|\leqslant Mr$，故有

$$|\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r) \tag{4.16}$$

又 $z\Big|_S=0$，$z^{(\mu,\nu)}\Big|_{S_{\mu,\nu}}=0$．因而由极值原理得到

$$|z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y)|\leqslant M(\nu+\mu^2+r) \tag{4.17}$$

对于 $n=1$，我们考虑

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))=\Delta_{x\bar{x}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))$$
$$+a\Delta_{\bar{y}}(z^{(\mu,\nu)}(x,y)-z(x,y))+c(x,y)(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))$$

由(4.11)，(4.16)和(4.17)推得

$$|\Delta_{\bar{y}}(z^{(\mu,\nu)}(x,y)-z(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r) \tag{4.18}$$

据此我们亦有

$$|\Delta_y(z^{(\mu,\nu)}(x,y)-z(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r)$$

对于 $n=2$，我们先导出公式

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{\bar{y}}\varphi(x,y)=\Delta_{\bar{y}}\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\varphi(x,y)+c(x,y)\Delta_{\bar{y}}\varphi(x,y)-\Delta_{\bar{y}}(c(x,y)\varphi(x,y)) \tag{4.19}$$

由此公式我们有

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))=\Delta_{\bar{y}}\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))]$$
$$+c(x,y)\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))-\Delta_{\bar{y}}(c(x,y)(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y)))$$

根据(4.9)，(4.17)，(4.18)和引理中的条件得到

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))=O(\nu+\mu^2+r) \tag{4.20}$$

但另一方面，

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))=\Delta_{x\bar{x}}[\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))]$$
$$-a\Delta_{\bar{y}}[\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))]+c(x,y)\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))$$

由(4.20)，(4.18)和(4.9)我们得到

$$|\Delta_{\bar{y}}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r) \tag{4.21}$$

类似地可证得

$$|\Delta_{y}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r) \tag{4.22}$$

及

$$|\Delta_{y}\Delta_{y}(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r) \tag{4.23}$$

对于 $n>2$ 的证明是类似的。

最后再由 $(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l\varphi(x,y)=|\Delta_{\bar{y}})^k\varphi(x,y+l\nu)$ 及估计式 $|(\Delta_{\bar{y}})^k(z(x,y)-z^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r)$ 即完全证得我们的引理。

现考虑微分问题

$$\mathscr{L}_0 z(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a\frac{\partial z}{\partial y}+c(x,y)z=\varphi(x,y),\quad z|_S=0 \tag{4.24}$$

和差分问题

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)}z_1^{(\mu,\nu)}(x,y)=\Delta_{x\bar{x}}z_1^{(\mu,\nu)}(x,y)-a\Delta_{\bar{y}}z_1^{(\mu,\nu)}(x,y)+c(x,y)z_1^{(\mu,\nu)}(x,y)\\&\qquad=\Psi(x,y)+\frac{a\nu}{2}\Delta_{y\bar{y}}z^{(\mu,\nu)}(x,y)\\&z_1^{(\mu,\nu)}\Big|_{S_{\mu,\nu}}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

其中 $z^{(\mu,\nu)}(x,y)$ 由差分问题(4.6)确定。

引理 5 假定引理 4 的条件成立，则对问题(4.24)的解 $z(x,y)$ 和问题(4.25)的解 $z_1^{(\mu,\nu)}(x,y)$ 有估计式：

$$|(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l(z''_{xx}(x,y)-\Delta_x\Delta_{\bar{x}}z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r) \tag{4.26}$$

$$|(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l(z^{(n)}_{y^n}(x,y)-(\Delta_{\bar{y}})^{n-j}(\Delta_y)^j z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2+r) \tag{4.27}$$

其中 n,k,j,l 都是正整数，$k,n\geqslant 0, l=0,1,\cdots,k$；$j=0,1,\cdots,n$。

甚之，若

$$|(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l(\psi^{(2n)}_{y^{2n}}(x,y)-(\Delta_{\bar{y}})^n(\Delta_y)^n\Psi(x,y))|\leqslant Mr' \tag{4.28}$$

则

$$|(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l(z''_{xx}(x,y)-\Delta_x\Delta_{\bar{x}}z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r') \tag{4.29}$$

$$|(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l(z^{(2n)}_{y^{2n}}(x,y)-(\Delta_{\bar{y}})^n(\Delta_y)^n z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r') \tag{4.30}$$

证 不等式(4.26)，(4.27)和(4.29)的证明与引理 4 中的证明类似。现证估计式(4.30)，亦以归纳法证之。

为了证明(4.30)只须证明

$$|(\Delta_{\bar{y}})^n(\Delta_y)^{n-j}[z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y)]|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r') \tag{4.31}$$

即可。

对于 $n=0$，我们考虑表达式 $\mathscr{L}_0^{(\mu,\nu)}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))$

因为

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))=\frac{\mu^2}{4!}\left[z_{x^4}^{(4)}(\xi,y)+z_{x^4}^{(4)}(\eta,y)\right]+\frac{a\nu}{2}\left[z''_{y^2}(x,y)\right.$$

$$\left.-\Delta_{y\bar{y}}z^{(\mu,\nu)}(x,y)\right]+\frac{a\nu^2}{3!}z_{y^3}^{(3)}(x,\tilde{y})+\psi(x,y)-\Psi(x,y)$$

所以由引理 4 及引理中的条件(4.28)我们得到

$$|\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r') \tag{4.32}$$

从而由极值原理推得

$$|z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y)|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r') \tag{4.33}$$

对于 $n=1$，由(4.32)，(4.29)和(4.33)得到

$$|\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r') \tag{4.34}$$

因而亦有

$$|\Delta_y(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r') \tag{4.35}$$

对于 $n=2$，我们考虑表达式 $\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))$

它可改写为

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{\bar{y}}(z(x,z)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))=\Delta_{\bar{y}}\,\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))$$

$$+c(x,y)\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))-\Delta_{\bar{y}}(c(x,y)(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y)))$$

由引理 4 和引理中的条件以及已证得的结果(4.32)，(4.33)，(4.34)可对上式右端各项逐一进行估计便得到

$$|\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r') \tag{4.36}$$

另一方面，

$$\mathcal{L}_0^{(\mu,\nu)}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))=\Delta_{x\bar{x}}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))$$

$$-a\Delta_{\bar{y}}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))+c(x,y)\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))$$

故由(4.36)，(4.34)及不等式

$$|\Delta_{\bar{y}}\Delta_{x\bar{x}}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r')$$

推得

$$|\Delta_{\bar{y}}\Delta_{\bar{y}}(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r')$$

因而亦有

$$|\Delta_y\Delta_y(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r')$$

$$|\Delta_{\bar{y}}\Delta_y(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r')$$

对于 $n>2$ 证明是类似的。

最后利用关系式 $(\Delta_{\bar{y}})^{k-l}(\Delta_y)^l\varphi(x,y)=(\Delta_{\bar{y}})^k\varphi(x,y+l\nu)$ 和已证估计式 $|(\Delta_{\bar{y}})^k(z(x,y)-z_1^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2+\nu r+r')$ 即得到引理的完全证明。

五、外推解的精度估计

为了对外推解 (2.7) 作出精度估计我们先证明不等式

$$|U_N(x,y)-AU_N^{(h,\tau)}(x,y)-BU_N^{(2h,2\tau)}(x,y)|\leqslant M(h^2+\tau^2) \tag{5.1}$$

及不等式

$$|V_N(x,y)-AV_N^{(h,\tau)}(x,y)-BV_N^{(2h,2\tau)}(x,y)|$$
$$\leqslant M(h^2+\tau^2+\varepsilon^{N+1}+\gamma^{N+1}+\exp(-a(T-y)/\varepsilon)) \tag{5.2}$$

现证不等式(5.1)。由(3.2)和(3.11)我们有

$$|U_N(x,y)-AU_N^{(h,\tau)}(x,y)-BU_N^{(2h,2\tau)}(x,y)|\leqslant\sum_{i=0}^{N}|(\varepsilon^i-A\gamma^i(\tau)-B\gamma^i(2\tau))w_i(x,y)|$$

$$+A\sum_{i=0}^{N}\gamma^i(\tau)|w_i(x,y)-w_i^{(h,\tau)}(x,y)|+B\sum_{i=0}^{N}\gamma^i(2\tau)|w_i(x,y)-w_i^{(2h,2\tau)}(x,y)|$$

(5.3)

下面利用引理 4 和引理 5 对 $|w_i(x,y)-w_i^{(\mu,\nu)}(x,y)|$ 以及 $w_i(x,y)$ 的导数和 $w_i^{(\mu,\nu)}(x,y)$ 的差商作出估计，
即

$$|w_i(x,y)-w_i^{(\mu,\nu)}(x,y)|\leqslant M(\nu^2+\mu^2) \tag{5.4}$$

并且对于 $n>0$

$$|(\Delta_{\bar y})^{k-l}(\Delta_y)^l(w_{i,y^n}^{(n)}(x,y)-(\Delta_{\bar y})^{n-j}(\Delta_y)^j w_i^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2) \tag{5.5}$$

$$|(\Delta_{\bar y})^{k-l}(\Delta_y)^l(w_{i,y^{2n}}^{(2n)}(x,y)-(\Delta_{\bar y})^n(\Delta_y)^n w_i^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2) \tag{5.6}$$

对于 $i=0$，此时 $\psi(x,y)=\Psi(x,y)=f(x,y)$，由引理 5 直接得到所要的估计，即对于 $n\geqslant0$ 有

$$|(\Delta_{\bar y})^{k-l}(\Delta_y)^l(w_{0,y^n}^{(n)}(x,y)-(\Delta_{\bar y})^{n-j}(\Delta_y)^j w_0^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2) \tag{5.7}$$

$$|(\Delta_{\bar y})^{k-l}(\Delta_y)^l(w_{0,y^{2n}}^{(2n)}(x,y)-(\Delta_{\bar y})^n(\Delta_y)^n w_0^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2) \tag{5.8}$$

利用引理 5 于 $w_1(x,y)$，$w_1^{(\mu,\nu)}(x,y)$，由(5.8)

$$|\psi(x,y)-\Psi(x,y)|=\left|\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-\Delta_{y\bar y}w_0^{(\mu,\nu)}(x,y)\right|\leqslant M(\nu^2+\mu^2)$$

因而得到 $i=1$ 时的论断。有了 $w_1(x,y)$，$w_1^{(\mu,\nu)}(x,y)$ 的估计以后再利用引理 5 可得到关于 $w_2(x,y)$，$w_2^{(\mu,\nu)}(x,y)$ 的同样的论断。如此继之，可证得我们的论断对于一切 i $(i=0,1,\cdots,N)$ 都成立。

现估计 $w_i(x,y)$ $(i=0,1,\cdots,N)$ 的系数 $\varepsilon^i-A\gamma^i(\tau)-B\gamma^i(2\tau)$。由 (2.8) 知，$i=0,1$ 时这些系数为零。现考虑 $i\geqslant2$ 情形。因为 $A+B=1$，所以

$$\varepsilon^i-A\gamma^i(\tau)-B\gamma^i(2\tau)=A(\varepsilon^i-\gamma^i(\tau))+B(\varepsilon^i-\gamma^i(2\tau))$$

表达式

$$\varepsilon^i-\gamma^i(\nu)=\varepsilon^i\lambda^i(\lambda^{-1}-\mathrm{cth}\lambda)\sum_{j=0}^{i-1}(\lambda^{-1})^{i-j-1}\mathrm{cth}^i\lambda$$

其中 $\lambda=a\nu/2\varepsilon$。根据 $\gamma(\nu)\to\varepsilon(\nu\to0)$ 及估计式 $\left|\frac{1}{\lambda}-\mathrm{cth}\lambda\right|\leqslant M\lambda$ 我们有

$$|\varepsilon^i-\gamma^i(\nu)|\leqslant M\nu^2\qquad(i\geqslant2)$$

上一不等式对 $i=0$ 和 $i=1$ 亦成立，因此

$$|\varepsilon^i-\gamma^i(\nu)|\leqslant M\nu^2\qquad(i\geqslant0)\tag{5.9}$$

由于 A,B 有界，所以在(5.3)中 $w_i(x,y)$ 的系数都是 $O(\nu^2)$ 的量，于是估计式(5.1)得证。

现证估计式 (5.2)。因为 A 和 B 有界，由估计式 (4.3)，(4.4) 知，只须对 $\eta=\max_i|\Delta_{y\bar y}(w_i^{(\mu,\nu)}(x,y)-\bar U_i^{(\mu,\nu)}(x,y))|$ 作出估计。我们反复应用引理4和引理5于问题(3.12_0)，(3.13_0)，(3.12_i)，(3.13_i)即可证得

$$|\Delta_{y\bar y}|w_i(x,y)-w_i^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu^2+\mu^2)\tag{5.10}$$

$$|\Delta_{y\bar y}(w_i(x,y)-\bar U_i^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2)\tag{5.11}$$

从而我们有

$$\eta=\max_i|\Delta_{y\bar y}(\bar U_i^{(\mu,\nu)}(x,y)-w_i^{(\mu,\nu)}(x,y))|\leqslant M(\nu+\mu^2)\tag{5.12}$$

有了(5.1)，(5.2)这二个估计式以后我们可以得到下面的主要结果。

定理 若系数 $c(x,y)$ 和右端函数 $f(x,y)$ 充分光滑，条件 (1.4) 成立，并且 $a(x,y)=a=\mathrm{const}$，则外推解 (2.7) 关于小参数 ε 一致逼近于摄动问题(1.1)，(1.2)的解，并当 $N\geqslant N_0=6/\zeta$ 时有估计式

$$|u(x,y)-\tilde u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(\delta,\zeta)(\tau^{2-\zeta}+h^2)\qquad(0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y\leqslant T-\delta)\tag{5.13}$$

其中 ζ，$\delta\in(0,1)$ 的任意常数，M 不依赖于 h,τ 和 ε。

证 $u(x,y)-\tilde u^{(h,\tau)}(x,y)=U_N(x,y)-AU_N^{(h,\tau)}(x,y)-BU_N^{(2h,2\tau)}(x,y)$

$$+V_N(x,y)-AV_N^{(h,\tau)}(x,y)-BV_N^{(2h,2\tau)}(x,y)$$

由(5.1)，(5.2)我们有

$$|u(x,y)-\tilde u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(h^2+\tau^2+\varepsilon^{N+1}+\gamma^{N+1}+\exp(-a(T-y)/\varepsilon))\tag{5.14}$$

对任意 $\delta\in(0,1)$ 可找到这样的 $M(\delta)$，当 $T-y\geqslant\delta$ 时使有不等式 $M\exp(-a(T-y)/\varepsilon)\leqslant M(\delta)\varepsilon^{N+1}$ 成立。故有

$$|u(x,y)-\tilde u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(\delta)(h^2+\tau^2+\varepsilon^{N+1}+\gamma^{N+1})\qquad(0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y\leqslant T-\delta)\tag{5.15}$$

由[1]中的古典估计（参看本文附录）推得

$$|u(x,y)-\tilde u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M\left(\frac{\tau^2}{\varepsilon^3}+h^2\right)\tag{5.16}$$

因为 $|\gamma(\tau)|\leqslant M(\varepsilon+\tau)$，所以(5.15)可改写为

$$|u(x,y)-\tilde u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(\delta)(h^2+\tau^2+\varepsilon^{N+1}+(\varepsilon+\tau)^{N+1})\qquad(0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y\leqslant T-\delta)\tag{5.17}$$

由 (5.16) 和 (5.17) 推得，当 $N\geqslant N_0=6/\zeta$ 时有

$$|u(x,y)-\tilde{u}^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(\delta,\zeta)(\tau^{2-\zeta}+h^2) \qquad (0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y\leqslant T-\delta)$$

于是定理得证。

附 录

现对文[1]中差分格式给出一致收敛性的证明。

按 Люстерник-Вишик 方法我们可构造摄动问题（1.1），（1.2）的渐近解：

$$u(x,y)=w(x,y)+v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)+O(\varepsilon) \tag{A.1}$$

其中 $w(x,y)$是退化问题(1.5)，(1.6)的解，$v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)$是边界层函数：$v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)=-w(x,T)\cdot\exp(-a(x,T(T-y)/\varepsilon)$根据渐近解(A.1)，相容性条件(1.4)和不等式$t^k\exp(-t)\leqslant M\exp(-t/2)(t\geqslant 0)$可以证得

$$|D^i_{x^i}u|\leqslant M,\ |D^i_{y^i}u|\leqslant M[\varepsilon^{-i}\exp(-a(x,T)(T-y)/\varepsilon)+1],\ i=\overline{1,4} \tag{A.2}$$

此外，

$$|\varepsilon-\gamma(x,y,\tau)|\leqslant M\tau^2/\varepsilon \tag{A.3}$$

$$|u_{y\bar{y}}|\leqslant\tau^{-1}\int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}}\left|\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right|dy\leqslant M\varepsilon^{-2} \tag{A.4}$$

因此，

$$\left|\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}(u^{(h,\tau)}(x,y)-u(x,y))\right|\leqslant\frac{\varepsilon\tau^2}{12}\left|\frac{\partial^4u}{\partial y^4}\right|+\frac{h^2}{12}\left|\frac{\partial^4u}{\partial x^4}\right|+\frac{1}{6}m\tau^2\left|\frac{\partial^3u}{\partial y^3}\right|$$

$$+|\varepsilon-\gamma(x,y,\tau)||u_{y\bar{y}}|\leqslant M\left(\frac{\tau^2}{\varepsilon^3}+h^2\right) \tag{A.5}$$

在$\Gamma_{h,\tau}$上$u^{(h,\tau)}(x,y)-u(x,y)=0$。故由极值原理得到误差的古典估计：

$$|u^{(h,\tau)}(x,y)-u(x,y)|\leqslant M\left(\frac{\tau^2}{\varepsilon^3}+h^2\right),\ (x,y)\in\overline{R}_{h,\tau} \tag{A.6}$$

现在来作非古典估计。由(A.1)只须对差

$$u^{(h,\tau)}(x,y)-\left(w(x,y)+v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)\right) \tag{A.7}$$

作出估计即可。以差分算子$\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}$作用于表达式(A.7)，我们有

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}\left[u^{(h,\tau)}(x,y)-\left(w(x,y)+v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)\right)\right]$$

$$=O(\tau^2+h^2+\varepsilon)-\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)$$

$$=O(\tau^2+h^2+\varepsilon)-[\gamma(x,y,\tau)v_{0y\bar{y}}-a(x,y)v_{0\bar{y}}+v_{0x\bar{x}}+c(x,y)v_0] \tag{A.8}$$

设 $Q_1(x,y)=\gamma(x,y,\tau)v_{0y\bar{y}}-a(x,y)v_{0\bar{y}}$

$Q_2(x,y)=v_{0x\bar{x}},\ Q_3(x,y)=c(x,y)v_0$

则（A.8）可改写为

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}\left[u^{(h,\tau)}(x,y)-\left(w(x,y)+v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)\right)\right]$$

$$=O(\tau^2+h^2+\varepsilon)-[Q_1(x,y)+Q_2(x,y)+Q_3(x,y)] \tag{A.9}$$

现在来逐一估计$Q_i(x,y)\ (i=1,2,3)$。因为$v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)$满足方程$\gamma(x,T,\tau)v_{0y\bar{y}}-a(x,T)v_{0\bar{y}}=0$，所以

$$Q_1(x,y)=[\gamma(x,y,\tau)-\gamma(x,T,\tau)]v_{0y\bar{y}}-[a(x,y)-a(x,T)]v_{0\bar{y}}$$
$$=-w(x,T)\left\{\frac{a(x,y)}{2\tau}\left(\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon}-\operatorname{cth}\frac{a(x,T)\tau}{2\varepsilon}\right)\right.$$
$$\cdot 4\sinh^2(a(x,T)\tau/2\varepsilon)\exp(-a(x,T)(T-y)/\varepsilon)$$

因此,

$$|Q_1(x,y)|\leqslant M\frac{a(x,y)}{2\tau}\left|\left(\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon}-\operatorname{cth}\frac{a(x,T)\tau}{2\varepsilon}\right)\right.$$
$$\left.\cdot 4\sinh^2(a(x,T)\tau/2\varepsilon)\exp(-a(x,T)(T-y)/\varepsilon)\right| \tag{A.10}$$

以下分 $\tau/\varepsilon\leqslant 1$ 和 $\tau/\varepsilon\geqslant 1$ 二种情况分别利用不等式 $c_2t\leqslant \sinh t\leqslant c_1t$ $(0\leqslant t\leqslant c)$ 和不等式 $c_1\exp t\leqslant \sinh t\leqslant c_2\exp t$ $(c\leqslant t<\infty)$ 对 $\frac{a(x,y)}{2\tau}\left|\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon}-\operatorname{cth}\frac{a(x,T)\tau}{2\varepsilon}\right|$ 作出估计. 我们得到,

当 $\tau/\varepsilon\leqslant 1$ 时
$$\frac{a(x,y)}{2\tau}\left|\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon}-\operatorname{cth}\frac{a(x,T)\tau}{2\varepsilon}\right|\leqslant M\frac{\varepsilon(T-y)}{\tau^2} \tag{A.11}$$

当 $\tau/\varepsilon\geqslant 1$ 时
$$\frac{a(x,y)}{2\tau}\left|\operatorname{cth}\frac{a(x,y)\tau}{2\varepsilon}-\operatorname{cth}\frac{a(x,T)\tau}{2\varepsilon}\right|\leqslant M\frac{a(x,y)}{\tau}\exp(-a\tau/\varepsilon) \tag{A.12}$$

据此易证

$$|Q_1(x,y)|\leqslant M\exp(-a(T-y)/2\varepsilon)\quad (x,y)\in R_{h,\tau}$$

对 $Q_2(x,y)$, 根据 $v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)$ 的表达式, 利用不等式 $|v_{0x\bar{x}}|\leqslant h^{-1}\int_{x-h}^{x+h}|v''_{0x^2}|dx$ 可以证得:

$$|Q_2(x,y)|=|v_{0x\bar{x}}|\leqslant M\exp(-a(T-y)/2\varepsilon)$$

对 $Q_3(x,y)$ 显然有

$$|Q_3(x,y)|\leqslant M\exp(-a(T-y)/2\varepsilon)$$

因此,

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}\left[u^{(h,\tau)}(x,y)-\left(w(x,y)+v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)\right)\right]$$
$$\leqslant M(\tau^2+h^2+\varepsilon+\exp(-a(T-y)/2\varepsilon)),\quad (x,y)\in R_{h,\tau} \tag{A.13}$$

构造闸函数

$$W(x,y)=c_1(T+y)+c_2\exp(-a(T-y)/2\varepsilon) \tag{A.14}$$

其中 c_1, c_2 都是正的常数, 我们取

$$c_1=M(\tau^2+h^2+\varepsilon)/a,\quad c_2=\max(\varepsilon,\tau)/c \tag{A.15}$$

以差分算子 $\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}$ 作用于函数 $W(x,y)$ 便得到

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}W(x,y)\leqslant -M(\tau^2+h^2+\varepsilon)-M\exp(-a(T-y)/2\varepsilon) \tag{A.16}$$

设

$$Z(x,y)=W(x,y)\pm\left[u^{(h,\tau)}(x,y)-\left(W(x,y)+v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)\right)\right] \tag{A.17}$$

则有

$$\mathscr{L}_\varepsilon^{(h,\tau)}Z(x,y)\leqslant 0 \tag{A.18}$$

此外, 易证在 $\Gamma_{h,\tau}$ 上 $Z(x,y)\geqslant 0$. 因此由极值原理推得

$$\left|u^{(h,\tau)}(x,y)-\left(w(x,y)+v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)\right)\right|\leqslant W(x,y),\quad (x,y)\in \overline{R}_{h,\tau} \tag{A.19}$$

故有

$$\left|u^{(h,\tau)}(x,y)-\left(w(x,y)+v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)\right)\right|\leqslant M(\tau+h^2+\varepsilon) \tag{A.20}$$

从而得到误差的非古典估计

$$|u^{(h,\tau)}(x,y)-u(x,y)|\leqslant\left|u(x,y)-\left(w(x,y)+v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)\right)\right|$$

$$+\left|u^{(h,\tau)}(x,y)-\left(w(x,y)+v_0\left(x,\frac{T-y}{\varepsilon}\right)\right)\right|$$

$$\leqslant M\varepsilon+M(\tau+h^2+\varepsilon)\leqslant M(\tau+h^2+\varepsilon) \tag{A.21}$$

当 $\varepsilon^2\geqslant\tau$ 时利用古典估计(A.6)，当 $\varepsilon^2\leqslant\tau$ 时利用非古典估计（A.21）即得到我们所要证明的一致误差估计：

$$|u(x,y)-u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(\tau^{\frac{1}{2}}+h^2) \tag{A.22}$$

其中 M 是与 ε,h,τ 无关的常数。

若在渐近解中取更多的项以得到非古典估计

$$|u(x,y)-u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(\tau+h^2+\varepsilon^3) \tag{A.23}$$

则可得到更精确的一致误差估计

$$|u(x,y)-u^{(h,\tau)}(x,y)|\leqslant M(\tau+h^2) \tag{A.24}$$

参 考 文 献

[1] 苏煜城、吴启光，椭圆-抛物偏微分方程奇异摄动问题的差分解法，应用数学和力学，1，2（1980），167—176.

[2] Подкорытов Е. М., Экстраполяционный метод повышения точности приближенных решений для уравнения $\varepsilon y''(x)+by'(x)-c(x)y(x)=f(x)$, *Дифференциальные Уравнения с Малым Параметром* (1980), 118—129.

Applications of the Extrapolation Method to the Numerical Solution of Singular Perturbation Problems

Su Yu-cheng

(Nanjing University, Nanjing)

Abstract

In this paper we consider applications of extrapolation method to the numerical solution of singular perturbation problem for elliptic-parabolic equation in order to manifesting accuracy of approximations and estimate the order of accuracy. Concerning the uniform convergence in ref.[1], its proof is given in the appendix.