

开口薄壁梁的翘曲与应力在 节点处的传递*

杨 钦 樑

(交通部广州救捞局科研所, 1984年2月15日收到)

摘 要

本文在梁的近代工程理论的位移函数基础上, 讨论了开口薄壁梁截面翘曲的规律, 从而推导出以不同方式相连接的开口薄壁梁之间的翘曲位移和双力矩的传递关系, 简要地介绍了作者所作过的实验及从中得出的某些结论和进一步完善的设想。

一、约束扭转的位移函数

在梁的近代工程理论中, 薄壁梁中间面的点的位移函数 $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ 确定为:

$$\left. \begin{aligned} U(x, y, z) &= u(z) - (y - y_0)\theta(z) \\ V(x, y, z) &= v(z) + (x - x_0)\theta(z) \\ W(x, y, z) &= w(z) + x\dot{u}(z) - y\dot{v}(z) + \dot{\theta}(z)\omega(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中 $\theta(z)$ 为 z 截面中线的扭转角, $w(z)$ 是 z 截面的平均轴向位移。点 $A(x_0, y_0, z)$ 为截面 z 上的任意固定点, 称为基点。当 z 变化时, 这些点组成一条平行 Oz 轴的轴, 称为基轴。 $u(z)$ 和 $v(z)$ 是基点 A 的侧向位移, 平面曲线 $x = u(z)$, $y = v(z)$ 则是基轴在两个坐标平面 Oxz , Oyz 的挠度曲线。上标“ \cdot ”表示对 z 的导数。当取截面形心为基点时, (1.1) 式即为文 [5] 中的位移函数。 $\omega(x, y)$ 为圣文南 (Saint-Venant) 扭转问题的规范化翘曲函数。

可以证明, 对开口薄壁梁, 翘曲函数 $\omega(x, y)$ 即为扇性面积坐标函数:

$$\omega(s) = \int_{s_0}^s \vec{r}(t) \cdot \vec{n}(t) dt \quad (1.2)$$

式中 $\vec{r}(s) = (x - x_0, y - y_0)$ 为以 A 点为极点的中线 $P(x, y)$ 点的矢径。 $\vec{n} = (-y'(s), x'(s))$ 为中线 P 点的单位法向量, 它由切矢量 \vec{s} 沿逆时针旋转 90° 而得到 (图 1)。 s_0, s 表以中线上任意点 C 为起点的到 P_0 和 P 点的弧长。(1.2) 式表示的 $\omega(s)$ 为扇形 P_0AP 面积二倍的代数值

* 周履推荐。

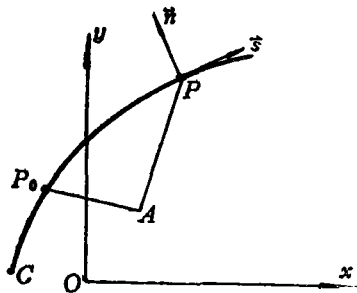


图 1

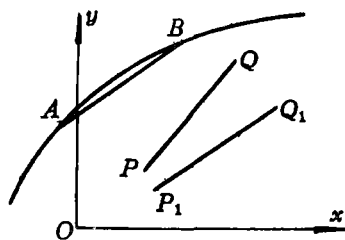


图 2

二、在连接处翘曲的传递

在纯扭转情形, 因 $u(z)=v(z)=w(z)=0$, (1.1) 式的第三式简化为 $W(x,y,z)=\theta(z)\omega(x,y)$. 因为 $\omega(x,y)$ 只与截面形状有关, 故相对扭转角 $\theta(z)$ 决定了在外载作用下的翘曲位移, 故称 θ 为翘曲位移.

为了研究翘曲位移如何从一个梁通过连接处传递到另一梁, 我们引入某些新概念并把单个梁受载时截面翘曲位移搞清楚.

(1) 翘曲转角

在薄壁梁静力学理论中, 总是假设截面中线在轴向平面投影不变形——刚截面. 刚体的转动可用一个与刚体固连的矢量的转动表示, 矢量 \vec{OA} 转动到 \vec{PQ} 由转角矢量 $\vec{\varphi}$ 决定, 其大小等于 \vec{OA} 与 \vec{PQ} 的交角, 方向与矢量积 $\vec{OA} \times \vec{PQ}$ 相同.

设截面 z 中线上任两点 $A(x_1, y_1, z)$, $B(x_2, y_2, z)$ 在受载后分别移到 P, Q 两点如图 2 所示. 设

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta \omega = \omega(x_2, y_2) - \omega(x_1, y_1)$$

则有:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (\Delta x, \Delta y, 0) \\ P &= (x_1 + U(x_1, y_1, z), y_1 + V(x_1, y_1, z), z + W(x_1, y_1, z)) \\ Q &= (x_2 + U(x_2, y_2, z), y_2 + V(x_2, y_2, z), z + W(x_2, y_2, z)) \end{aligned}$$

其中 U, V, W 为 (1.1) 式所确定的位移函数. 应用该式, 可求得:

$$\left. \begin{aligned} \vec{PQ} &= (\Delta x', \Delta y', \Delta z') \\ \Delta x' &= \Delta x - \Delta y \theta(z), \quad \Delta y' = \Delta y + \Delta x \theta(z), \quad \Delta z' = -\Delta x \dot{u}(z) - \Delta y \dot{v}(z) + \dot{\theta}(z) \Delta \omega \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

设 $\vec{\varphi}_{AB}$ 为加载后 \vec{AB} 产生的转角矢量, 因 φ_{AB} 甚小, 故 $\varphi_{AB} \approx \sin \varphi_{AB}$, 且 $|\vec{PQ}| \approx |\vec{AB}|$, 于是:

$$\vec{\varphi}_{AB} = \frac{\vec{AB} \times \vec{PQ}}{|\vec{AB}| |\vec{PQ}|} = \frac{\vec{AB} \times \vec{PQ}}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (2.2)$$

将 (2.1) 式代入并经矢量运算后, 可得

$$\vec{AB} \times \vec{PQ} = (-\Delta y (\Delta x \dot{u} + \Delta y \dot{v} - \Delta \omega \dot{\theta}), \Delta x (\Delta x \dot{u} + \Delta y \dot{v} - \Delta \omega \dot{\theta}), \theta (\Delta x^2 + \Delta y^2))$$

代回 (2.2) 式, 可得重要的分解式:

$$\vec{\varphi}_{AB} = \vec{\theta} + \vec{\alpha}_{AB} + \vec{\beta}_{AB} \quad (2.3)$$

其中 $\vec{\theta} = \theta(0, 0, 1)$ 为 $\vec{\varphi}_{AB}$ 的轴向分量，它与截面上点 A, B 的位置无关且等于该截面的扭转角，称为扭转角矢量。矢量

$$\vec{\alpha}_{AB} = \Delta\omega\hat{\theta}(\Delta y, -\Delta x, 0)/(\Delta x^2 + \Delta y^2) \quad (2.4)$$

$$\vec{\beta}_{AB} = (\Delta x\dot{u} + \Delta y\dot{v})(-\Delta y, \Delta x, 0)/(\Delta x^2 + \Delta y^2) \quad (2.5)$$

分别称之为 \vec{AB} 的翘曲与弯曲转角矢量。它们具有如下特点：

1° $\vec{\alpha}_{AB}$ 平行于 $\vec{\beta}_{AB}$ ；

2° 当 AB 在截面 z 平行移动时，例如命 $\Delta y = k\Delta x$ ， k 为常量，则 $\vec{\beta}_{AB} = (\dot{u} + k\dot{v})(-k, 1, 0)/(1 + k^2)$ ，其方向保持不变。特别是，当 $\vec{AB} // \vec{Oy}$ 时， $\Delta x = 0$ ， $\vec{\beta}_{AB} = -\dot{v}(1, 0, 0)$ 恰为该截面绕 Ox 轴的弯曲转角，亦即梁轴在平面 Oyz 内的弯曲转角。当 $\vec{AB} // \vec{Ox}$ 时， $\Delta y = 0$ ， $\vec{\beta}_{AB} = \dot{u}(0, 1, 0)$ 为该截面绕 Oy 轴（梁轴在 Oxz 平面内）的弯曲转角；

3° 当 \vec{AB} 平行移动时， $\vec{\alpha}_{AB}$ 随 $\Delta\omega/\Delta x$ （或 $\Delta\omega/\Delta y$ ）的变化而变化。这是 α_{AB} 与 β_{AB} 本质不同之处。它表明由于扭转（ $\hat{\theta} \neq 0$ ），同一截面的不同点不再保持在同一平面而产生了翘曲位移（变形）。

如果将 \vec{PQ} 投影到 Oxy 平面得到 $\vec{P_1Q_1}$ （图 2），不难证明， $\vec{\alpha}_{AB}$ 正是 $\vec{P_1Q_1}$ 移到 \vec{PQ} 的转角矢量。分解式（2.3）的几何解释是： \vec{AB} 的移动，可以看成随截面一同扭转与弯曲之后，加上离开该平面的纯翘曲合成的结果。

令 $B \rightarrow A$ ，割线 AB 趋向 A 点切线。设 Δs 表示 \widehat{AB} 的弧长，注意到 $\lim_{B \rightarrow A} \Delta s^2/(\Delta x^2 + \Delta y^2) = 1$ ，可得：

$$\vec{\alpha}_A = \lim_{B \rightarrow A} \vec{\alpha}_{AB} = -\hat{\theta} \frac{d\omega}{ds} (-y', x', 0)$$

据公式（1.2）和 $\vec{n} = (-y', x', 0)$ ，有：

$$\vec{\alpha}_A = -\hat{\theta} \frac{d\omega}{ds} \vec{n} = -\hat{\theta}(z) \vec{r}(s) \cdot \vec{n}(s) \vec{n}(s) \quad (2.6)$$

称 $\vec{\alpha}_A$ 为截面中线在 A 点切线的翘曲转角矢量。由（2.6）式，还可得

$$\dot{\alpha}(z) = d\alpha_A/dz = -\hat{\theta}(z) \vec{r}(s) \cdot \vec{n}(s) \quad (2.7)$$

（2）腹板方向的相对翘曲转角

考虑如图 3 所示的截面 z 。E 和 O 分别为其扭心和形心。如果平行 Oy 的直线 AB 一般与中线相交两点 A, B ，则称 Ox 方向为腹板方向。此时， $\Delta x = 0$ ，（2.4）式变为：

$$\vec{\alpha}_{AB} = \Delta\omega\hat{\theta}(\Delta y, 0, 0)/\Delta y^2 = \Delta\omega/\Delta y \hat{\theta}(1, 0, 0)$$

令 x 为 AB 与 Ox 轴交点的坐标，则 $\vec{\alpha}_{AB}$ 的代数值：

$$\alpha(x) = -\hat{\theta}(\omega(A) - \omega(B))/AB \quad (2.8)$$

称 $\beta(x) = d\alpha(x)/dx$ 为腹板方向的相对翘曲转角。由（2.8）式可得：

$$\beta = -\frac{\theta}{AB} \left(\frac{d\omega}{ds} \frac{ds}{dx} \Big|_A - \frac{d\omega}{ds} \frac{ds}{dx} \Big|_B \right) + \frac{\hat{\theta}}{AB^2} (\omega(A) - \omega(B)) \frac{dAB}{dx} \quad (2.9)$$

当 A, B 分别为最低（高）点或 AB 取得其极值时， $dAB/dx = 0$ 。任取一端点 P 为弧长起点如

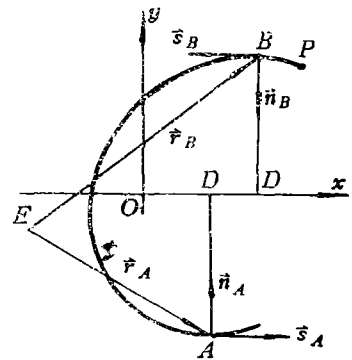


图 3

图 3, 我们有 $ds/dx|_A=1$, $ds/dx|_B=-1$. 于是 (2.9) 式变为:

$$\beta = -\frac{\dot{\theta}}{AB} \left(\frac{d\omega}{ds} \Big|_A + \frac{d\omega}{ds} \Big|_B \right) = -\frac{\dot{\theta}}{AB} [(\vec{r}_A \cdot \vec{n}_A + \vec{r}_B \cdot \vec{n}_B)] = \frac{\dot{\theta}}{AB} (BD + DA) = \dot{\theta}$$

即

$$\beta(x) = \dot{\theta}(z) \quad (2.10)$$

易知, 此结果与弧长起点选择无关. 当梁的翼缘是由两条平行线段组成时, (2.10) 式处处成立. 但当翼缘是两相交线段时, (2.10) 式将不保持. 例如, 对于角形截面梁, 易知 $\Delta\omega = \omega(B) - \omega(A) = 0 - 0 = 0$. 由 (2.9) 式, 有 $\beta = 0$, 即截面没有翘曲. 但在扭转时, $\dot{\theta} \neq 0$.

(3) 翼缘方向的平均相对翘曲转角

与腹板方向相垂直的方向 (即图 3 的 \vec{Oy} 方向) 称为翼缘方向. 这里本质不同的是, 即使翼缘由平行线段组成, 除翼缘自身外, 别的平行于翼缘的直线与中线至多交于一点, 故只能求平均相对翘曲转角.

返回到图 3 并设翼缘的最上、下两点 A, B 的切线相互平行 (平行于 Ox 轴). 这对翼缘由两平行线段组成的情形当然成立, 对一般光滑曲线翼缘 (最上、下两点不在端点) 也如此. 取 P 为弧长起点, A, B 不必在平行于 \vec{Oy} 的直线上. 在此两点的单位切线矢量为 $\vec{s}_A = (1, 0)$, $\vec{s}_B = (-1, 0)$, 单位法矢量则为 $\vec{n}_A = (0, 1)$, $\vec{n}_B = (0, -1)$ (均作为平面矢量考虑). 据 (2.6) 式, 可求得在 A, B 两点的切线的翘曲转角矢量分别为:

$$\vec{\alpha}_A = -\dot{\theta} \vec{r}_A \cdot \vec{n}_A \vec{n}_A = \dot{\theta} AD(0, 1)$$

$$\vec{\alpha}_B = -\dot{\theta} \vec{r}_B \cdot \vec{n}_B \vec{n}_B = \dot{\theta} BD(0, -1) = -\dot{\theta} BD(0, 1)$$

以 α_A, α_B 表示其代数值, 则

$$\dot{\alpha} = (\alpha_B - \alpha_A) / (AD + DB) = -\dot{\theta} \quad (2.11)$$

称 $\dot{\alpha}$ 为翼缘方向的平均相对翘曲转角. (2.11) 式和 (2.10) 式右端只差一个符号, 但将导致很不同的结论.

下面以槽形截面梁为例, 对上述结果的几何意义说明之. 当截面有一个相对扭转角 $\dot{\theta}(z)$ 之后, 截面中线将伴随产生腹板方向和翼缘方向相对转角 β 和 $\dot{\alpha}$, 且满足关系:

$$\beta(x) = \dot{\theta}(z) = -\dot{\alpha}(y) \quad (2.12)$$

设 $\dot{\theta}(z) > 0$, 则当 $z_1 > z_2$ 时, $\theta(z_1) > \theta(z_2)$, 即 z_1 处截面相对于 z_2 处截面有一个正方向的扭转角. 对右手系来说, 从右向左看, 截面 z_1 有一个逆时针方向的扭转, 而截面 z_2 有一个顺时针方向的扭转. 但若还是从外向里看 (在后一情形, 从左向右看), 截面 z_2 仍有一个反时针方向的扭转. 故可用一对向外的轴向矢量 (如图 4) 表示. 据 (2.12) 式, 截面中线将同时发生沿两个主方向的相对转角: 两对矢量, 一对指向内而另一对指向外. 图 5 画明了 $\dot{\theta}(z) > 0$ 的情况.

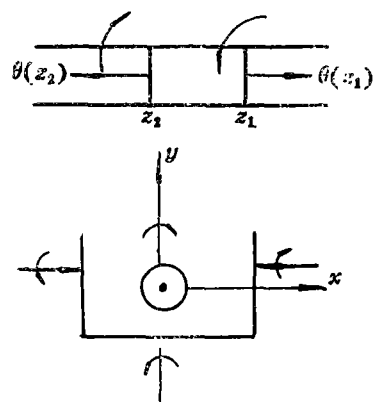


图 4.5

三、相对扭转角的传递

本节将讨论两槽形 (亦可推广于 I, Z 形) 截面梁相互以不同形式连接后, 相对扭转角的

传递。在讨论中，除假设在节点处变形协调（即共同点有相同位移）外，还假设在节点内，位移函数（1.1）仍然成立。

(1) 两翼缘同方向情形

(a) 如图 6 所示，翼缘和翼缘相连接，腹板和腹板相连接。

设梁①在外载作用下产生了翘曲并传递给梁②。为了计算梁②在（连接处）截面的相对扭转角，我们在节点内取梁②的两截面 PP_1, QQ_1 ，并设它们的相对扭转角相应为 θ_P, θ_Q 。从梁①取截面 AB ，使其与截面 PP_1, QQ_1 分别相交于点 A, A 和 B, B 。在图 6（俯视图）中， A 和 A, B 和 B 分别重叠在一起了。

据 (2.3) 式， AA 的（绝对）转角为

$$\varphi_{AA} = \dot{\theta}_A + \alpha_{AA} + \beta_{AA} \quad (3.1)$$

据变形协调条件， θ_P 等于 φ_{AA} 在梁②轴线上的投影。设两梁的交角为 φ ，则有

$$\theta_P = \theta_A \cos \varphi + (\alpha_{AA} + \beta_{AA}) \sin \varphi \quad (3.2)$$

同理可得：

$$\theta_Q = \theta_A \cos \varphi + (\alpha_{BB} + \beta_{BB}) \sin \varphi$$

注意到线段 AA, BB 是在梁①同一截面上的平行线，据 (2.5) 式，有 $\beta_{AA} = \beta_{BB}$ 。另一方面 $|PQ| = |AB| \sin \varphi$ ，则梁②在 PQ 段的平均相对扭转角为：

$$\bar{\theta}_2 = (\theta_P - \theta_Q) / PQ = (\alpha_{AA} - \alpha_{BB}) / BA$$

因 AA, BB 是平行于梁①腹板且在同一截面上的直线段，据 (2.10) 式，有 $(\alpha_{AA} - \alpha_{BB}) / BA = \beta = \dot{\theta}_A$ ，即 $\bar{\theta}_2 = \dot{\theta}_A$ 。又因 PP_1, QQ_1 是节点区的任二截面，故 $\bar{\theta}_2 = \dot{\theta}_A$ 且在节点区是常量。反之，又可推出 $\dot{\theta}_1$ 在节点区是常量。即在两梁的 EF 和 FG 段（图 6），我们有

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 = \text{常量}, \quad \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 = 0 \quad (3.3)$$

就是说，在 EF, FG 两段内，任何截面的翘曲是相同的，这一段只作了“刚性翘曲位移”或处于自由翘曲状态，其翘曲正应力为零，其长度为

$$EF = FG = B(1 + |\cos \varphi|) / \sin \varphi \quad (3.4)$$

(b) 如图 7 所示的情况。仿前，可得同样的方程 (3.3)，但只在图 7 所示的 EF, FG 段内成立，其长度为

$$EF = FG = B \operatorname{ctg}(\varphi/2) \quad (3.4a)$$

(c) 如图 8 所示情况：一梁的腹板与另一梁腹板相连接，但横梁的翼缘被剪掉一小段。在连接处，横梁实际上是一个狭长矩形截面梁，其主扇性坐标为 0，故扭转时没有翘曲产生，其翼缘则处于自由翘曲状态。直梁的两段在连接处的翘曲自然是相同的。此结论亦为实验所证实。

(d) 一梁的翼缘和腹板只连接到另一梁的腹板上，或如图 9 所示。

考虑梁②在连接区内的任二截面 PA, QB ，并设它们的扭转角为 θ_P, θ_Q 。梁①与之对应的两截面 AC 和 BB （线段）的扭转角为 θ_A, θ_B 。以下，两个相连字母表示有向线的代数值，

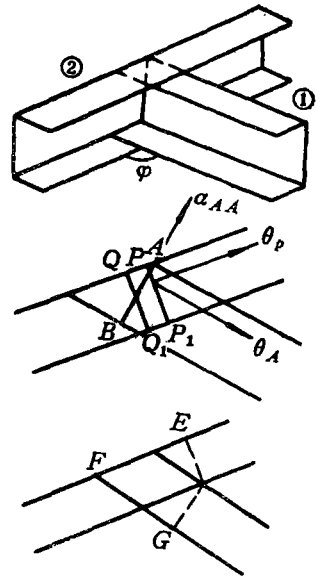


图 6

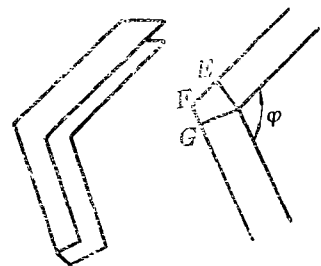


图 7

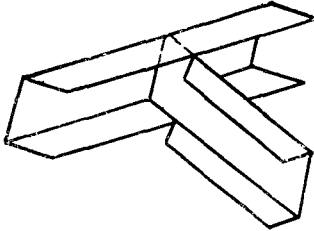


图 8

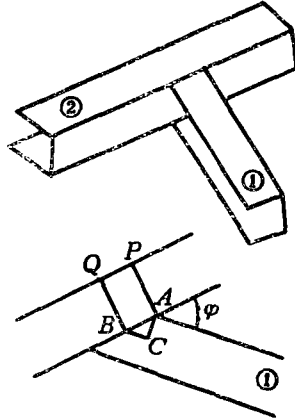


图 9

即 $PQ = -QP$ 等等。设梁①产生一个扭转，在相应截面上产生扭转角 θ_A, θ_B ，线段 AA, BB, CC 还产生翘曲转角 $\alpha_{AA}, \alpha_{BB}, \alpha_{CC}$ 。类似于情况(a)，我们有：

$$\theta_P = \theta_A \cos \varphi + \alpha_{AA} \sin \varphi, \quad \theta_Q = \theta_B \cos \varphi + \alpha_{BB} \sin \varphi$$

所不同的是，在 $\varphi \neq 90^\circ$ 时，梁①没有一个截面同时与梁②的两截面相交，且一般 $\theta_B \neq \theta_A$ 。注意到 $PQ = AB = AC / \sin \varphi = BC / \cos \varphi$ ，则得

$$\begin{aligned} (\theta_Q - \theta_P) / PQ &= (\theta_B - \theta_A) \cos^2 \varphi / CB + (\alpha_{BB} - \alpha_{AA}) \sin^2 \varphi / AC \\ &= (\theta_B - \theta_A) / CB + ((\alpha_{BB} - \alpha_{AA}) / AC - (\theta_B - \theta_A) / CB) \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (3.5)$$

注意到

$$(\theta_B - \theta_A) / CB = \dot{\theta}_A + \dot{\theta}(\xi_1) CB / 2$$

又据 (2.10) 式和 (2.8) 式，我们有：

$$(\alpha_{CC} - \alpha_{AA}) / AC = \dot{\theta}_A, \quad \alpha_{CC} = -\dot{\theta}(C) \Delta \omega / H, \quad \alpha_{BB} = -\dot{\theta}(B) \Delta \omega / H$$

H 为两翼缘之距离， $\Delta \omega$ 为梁①两翼缘与线段 BB 或 CC 相交两点 B 和 B 或 C 和 C 的扇性坐标之差。据中值定理，有

$$\begin{aligned} (\alpha_{BB} - \alpha_{AA}) / AB &= (\alpha_{BB} - \alpha_{CC}) / AC + (\alpha_{CC} - \alpha_{AA}) / AC \\ &= (\dot{\theta}(C) - \dot{\theta}(B)) \Delta \omega / (AC \cdot H) + \dot{\theta}_A \\ &= \dot{\theta}_A + (\dot{\theta}(\xi_2) \Delta \omega BC) / (AC \cdot H) = \dot{\theta}_A + \Delta \omega \dot{\theta}(\xi_2) \operatorname{ctg} \varphi / H \end{aligned}$$

将之代入 (3.5) 式，并令 $Q \rightarrow P (B \rightarrow A)$ ，则得：

$$\dot{\theta}_P = \dot{\theta}_A + \dot{\theta}_A \Delta \omega \operatorname{ctg} \varphi / H \quad (3.6)$$

如近似地令 $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_P, \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_A$ ，则得

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 \Delta \omega \operatorname{ctg} \varphi / H \quad (3.7)$$

对槽形截面梁， $\Delta \omega = eH$ ， e 为偏心距，故有

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 e \operatorname{ctg} \varphi \quad (3.8)$$

除去 $\varphi = 90^\circ$ 的情况外， $\dot{\theta}_2$ 一般不是常量。

(2) 腹板同方向情形

如图10所示的情况。由于腹板方向垂直于各梁的轴线，故腹板方向的转角不会影响到扭转角。

设 AC, BD 为梁①在连接区的两截面； AM, BN 为梁②的相应两截面。当梁①有一个

扭转时 (图10画出了相应于 $\theta_1 > 0$ 的各转角矢量的方向),

据 (2.3) 式, 梁①的 AA, BB 线段的绝对转角为:

$$\vec{\alpha}_{AA} = \vec{\theta}_A + \vec{\alpha}_A, \quad \vec{\alpha}_{BB} = \vec{\theta}_B + \vec{\alpha}_B$$

设 $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_G$ 表示相应点翼缘翘曲转角的绝对值, 其方向则如图10所示. 在取绝对值后, 由 (2.11) 式, 我们有:

$$(\alpha_A + \alpha_G)/AC = \theta_A$$

设 θ_M, θ_N 为梁②在截面 MA, NB 的扭转角, 则:

$$\theta_M = \theta_A \cos \varphi - \alpha_A \sin \varphi, \quad \theta_N = \theta_B \cos \varphi + \alpha_B \sin \varphi$$

据此, 可得梁②在截面 MA, NB 的扭转角:

$$\begin{aligned} \vec{\theta}_2 &= (\theta_M - \theta_N)/NM = (\theta_A - \theta_B) \cos \varphi / NM \\ &\quad - (\alpha_A + \alpha_B) \sin \varphi / NM \\ &= (\theta_A - \theta_B) \cos^2 \varphi / BC + (\alpha_A + \alpha_B) \sin^2 \varphi / CA \\ &= (\theta_A - \theta_B) \cos 2\varphi / BC + ((\theta_A - \theta_B) / BC - (\alpha_A + \alpha_B) / CA) \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (3.9)$$

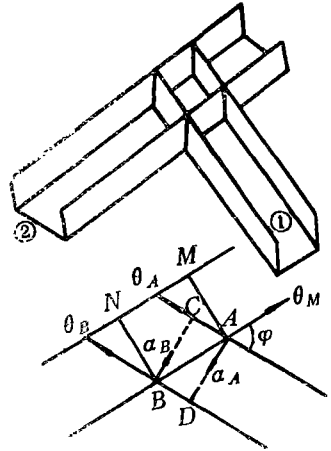


图 10

仿 (1) 中 (d), 有

$$\begin{aligned} (\theta_A - \theta_B) / BC &= (\theta_B - \theta_A) / CB = \dot{\theta}_A + \dot{\theta}(\xi_1) CB / 2 \\ (\alpha_A + \alpha_B) / CA &= (\alpha_A + \alpha_G) / CA + (\alpha_B - \alpha_G) / CA = \dot{\theta}_A + \dot{\alpha}(\xi_2) CB / CA \end{aligned}$$

据 (2.7) 式, 有:

$$\dot{\alpha}(\xi_2) = -\ddot{\theta}(\xi_2) \vec{r}(s) \cdot \vec{n}(s) = \ddot{\theta}(\xi_2) CA / 2$$

将各式代入 (3.9) 式右边相应项, 得:

$$\begin{aligned} \vec{\theta}_2 &= \vec{\theta}_1 \cos 2\varphi + CB(\ddot{\theta}(\xi_1) - \ddot{\theta}(\xi_2)) \sin^2 \varphi / 2 \\ &= \vec{\theta}_1 \cos 2\varphi + CB(\xi_1 - \xi_2) \ddot{\theta}(\xi) \sin^2 \varphi / 2 \end{aligned}$$

$\ddot{\theta}(\xi)$ 一般为高阶量, 故有

$$\vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_1 \cos 2\varphi \quad (3.10)$$

(3.10) 式和 (3.3) 式之间有两个差别: (3.10) 式是平均值且是近似关系, 而 (3.3) 式是准确关系. 事实上, $\dot{\theta}$ 在此已不是常量了. 我们可以计算同一翼缘 AB 段的相对翘曲转角并求得如下关系式 (省略推算细节):

$$\alpha_2(\xi) = \dot{\theta}_1(\xi') \sin 2\varphi \quad (3.11)$$

$$\ddot{\theta}_2(\xi) = 2\dot{\theta}_1(\xi) \sin 2\varphi / H \quad (3.12)$$

可见一般 $\dot{\alpha}_2(\xi) \neq 0$. 对 $\varphi = 90^\circ$ 的情况, 亦不难直接证明 $\dot{\theta}_2 = -\dot{\theta}_1$.

(3) 两腹板方向相垂直

情况如图11. 设两梁在连接处的相对扭转角分别为 θ_1 和 θ_2 . 梁②向梁①的传递类似情况 (1) 中 (a), 仿该处证明, 可得:

$$\theta_1 = \theta_2, \quad \vec{\theta}_2 = 0 \quad (3.13)$$

梁①向梁②的传递类似情况 (2) (在 $\varphi = 90^\circ$ 的特殊情况下, 梁①的翼缘方向相对翘曲转角 $\dot{\alpha}_1 = -\dot{\theta}_1$ 变为梁②的相对扭转角 θ_2), 因此, 有

$$\theta_2 = \theta_1 \cos 2\varphi$$

代入 (3.13) 式, 得 $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1 \cos 2\varphi$, 或

$$\dot{\theta}_1(1 - \cos 2\varphi) = 0$$

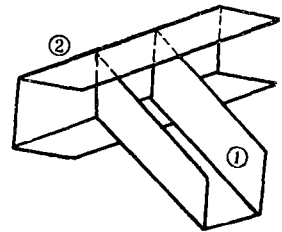


图 11

除去 $\varphi=0$ 和 π 两种无实际意义的情况外, 必有 $\dot{\theta}_1=0$, 故得:

$$\dot{\theta}_1=\dot{\theta}_2=0, \quad \ddot{\theta}_1=\ddot{\theta}_2=0 \quad (3.14)$$

事实上, 此时节点区已成闭口截面梁元, 如所周知, 其翘曲量相对来说是高阶的。

四、双力矩的传递

(1) 两翼缘同方向情形

(a) 如图12所示, 翼缘与翼缘, 腹板与腹板相连接。

节点 $ABCD A'B'C'D'$ 为梁①, ②, ③的公共部分。设 B_1, B_2, B_3 为梁①, ②, ③通过截面 $ADA'D', BCB'C', DCD'C'$ 作用于节点的双力矩。如前所述, 节点处各梁将产生同样的翘曲位移 $\dot{\theta} (= \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3)$ 。下面用虚功原理求各双力矩之间的关系。

设节点产生一个虚(翘曲)位移, 则各梁在节点将产生相同的虚位移 $\delta\dot{\theta}$ 。各双力矩 B_i 在相应虚位移所作虚功为:

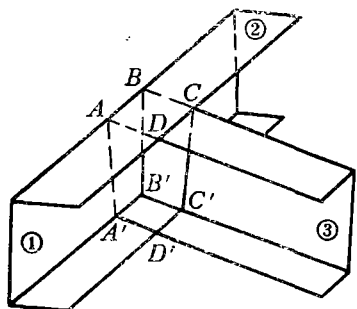


图 12

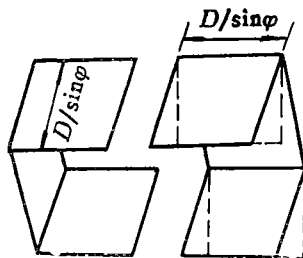


图 13

$$W_e = \delta\dot{\theta} \sum B_i$$

为了计算由内力所作虚功, 将节点拆开成如图13所示两个梁元。如前所述, 此两梁元处于自由扭转状态。据圣文南理论, 其应变能为:

$$\begin{aligned} W_i &= 2 \iiint (\tau_{xz} \delta\gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz}) dV \\ &= 2 \int_0^{D/\sin\varphi} dz \iint G(\gamma_{xz} \delta\gamma_{xz} + \gamma_{yz} \delta\gamma_{yz}) dx dy \\ &= 2DG \frac{\dot{\theta} \delta\dot{\theta}}{\sin\varphi} \iint \left(\left(\frac{\partial w}{\partial y} + x \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - y \right)^2 \right) dx dy = 2GJ_k D \dot{\theta} \delta\dot{\theta} / \sin\varphi \end{aligned}$$

J_k 为自由扭转常数, G 为剪切弹性模量。据虚功原理, $W_i = W_e$, 从而得:

$$\sum_{i=1}^3 B_i = \lambda \dot{\theta}, \quad \lambda = 2GJ_k \quad (4.1)$$

λ 为双力矩吸收系数, 对槽形截面梁,

$$\lambda = 2.24GD(HC^3 + 2DT^3)/3 \quad (4.1a)$$

其中 T 为梁的壁厚。

(b) 如图6所示情况, 节点可分成如图14所示两个三角形翼缘的槽形梁元, 类似前面的讨论, 可得:

$$W_e = (B_1 + B_2) \delta \theta$$

$$\begin{aligned} W_i &= 2G\theta \delta \theta \int_0^{D \operatorname{ctg}(\varphi/2)} J_k(z) dz \\ &= 2G\theta \delta \theta \int_0^{D \operatorname{ctg}(\varphi/2)} 1.12(HC^3 + 2T^3 z \operatorname{ctg}(\varphi/2)) dz / 3 \\ &= 0.75 G \theta D \operatorname{ctg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \cdot (HC^3 + DT^3) \delta \theta \end{aligned}$$

令 $W_i = W_e$, 可得:

$$B_1 + B_2 = \lambda \theta, \quad \lambda = 0.75 G D (HC^3 + DT^3) \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \quad (4.2)$$

在节点处的双力矩关系式 (4.1) 和 (4.2) 和目前某种流行的“双力矩平衡”观点有所不同, 后者是 $\lambda=0$ 的情形. 一系列的基本实验说明本文的结论较为正确. 如果将计算出的吸收系数略为加大, 会得到与实验更符合的理论值. 如果考虑到在节点区对翘曲并非绝对刚性, 翘曲正应力并不为零, 也要做内功, 则适当增加吸收系数也是可以理解的了.

(2) 腹板方向相互垂直情形

如图11所示. 该处已证明在节点 $\theta=0$, 即翘曲完全被约束, 且事实上节点已变成闭截面梁单位, 双力矩已成为自相平衡力系, 彼此独立. 但此时, 对应的位移 $\theta=0$ 已是已知量, 问题便化为在此约束条件下求约束反力了.

五、实验与理论比较

为了检验关于翘曲及双力矩传递理论的正确性, 我们对按图 5、6、8 的连接方式作了扭转翘曲位移测量, 对图11和做成不同折角的两种规格槽钢如图 8 的连接方式, 在不同外载下作了一系列应变测量. 这里不介绍具体实验情况和数据, 仅介绍主要结论如下:

1) 在翼缘与翼缘、腹板和腹板分别相焊接的情形, 翘曲位移和应力是从一个梁传递给另一梁的, 而不是有些人所假设的“绝对钢”; $\theta=0$.

2) 双力矩在节点是不连续的, θ 越大, 在节点处双力矩的跃变越大. 此表明现在的“双力矩平衡”的假设也是不当的.

在某些实验的某些截面, 实验应变(力)值与理论值的差异还是较大的, 特别当两相连接的梁作同方向扭转时更为显著. 这除了由于测量、读数和梁的制作误差外, 还存在着(梁的近代工程)理论引起的不可避免的误差. 对大量实验数据的仔细分析发现, 大多数截面的翘曲应力并不符合扇性坐标分布, 在许多截面还严重偏离扇性坐标规律; 按扇性坐标规律, 翘曲应该小的, 实测应力反而大. 在少数截面, 扇性坐标符号相反、绝对值并不小的两点, 实测应力却有相同的符号. 在所有实验数据中, 凡实测值和理论值相差较大者, 实测应力都严重偏离扇性规律.

基本原因在于应力分布的复杂性. 如所周知, 即使对等曲率曲梁的纯弯曲, 也只能借助

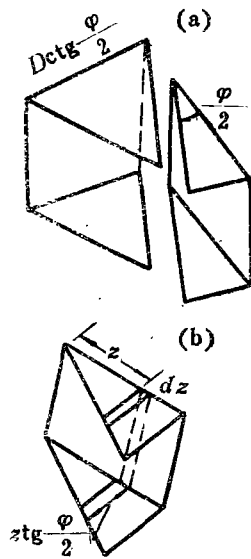


图 14

聖文南原理来对距梁端部较远的截面的应力作出估计, 且应力分布已不再遵循线性规律。至于折梁的弯曲应力分布, 则至今尚未求得理论解。在开口薄壁梁的理论中, 翘曲实际上是作为翼缘和腹板在自身平面内的弯曲的组合, 基于此假设而推导出翘曲应力的扇性分布规律。因此, 在靠近节点的截面, 实测应力较大偏离扇性坐标规律就不足为奇了。何况, 聖文南原理对开口薄壁梁已不再适用; 由自相平衡力系所导致的附加应力将在很长的范围内起作用。在我们的实验里, 既不知荷载的应力分布及其对理论要求分布的偏离程度, 也不知由这种偏离导致的附加应力及其影响范围。因而, 许多截面的应力偏离扇性坐标分布就更易理解了。

六、进一步完善的设想

理论和实验值出现必然差异的根本原因在于用一维的方法去解决二维乃至三维问题。这种方法, 在一定范围内对截面各综合性的量——挠度、转角、扭转角、弯矩甚至双力矩等——可以得到与实验较一致的结果。至于局部量, 如应力, 即使是弯曲应力也不能期望获得较精确的理论值, 更何况较复杂的翘曲应力呢?

为了能用一维的方法获得尽可能好的结果, 作者设想对各种常见节点, 作一系列基本扭转实验, 测出其应力分布, 而将在一般外载作用下的应力分布, 当作各基本扭转和弯曲应力的叠加。从作者所做的所有实验中, 发现叠加原理是完全保持的。因此, 可以预计用此法会得到较理想的结果。

参 考 文 献

- [1] Власов В. З., *Тонкостенные Упругие Стержни*, Государственное Издательство, Москва (1959).
- [2] Джанелидзе Г. Ю., Я. Г. Пановко, «弹性薄壁杆件静力学», 胡海昌译, 科技出版社 (1955).
- [3] 铁木辛柯、古地尔, «弹性理论», 徐芝纶、吴永祺译 (1964).
- [4] Kawai, T., Some program developments of matrix structural analysis in Japan, *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design* (ed. by J. T. Oden, R. W. Clough and Y. Yamamoto), UAH Press, The University of Alabama in Huntsville (1972), 493—516.
- [5] Kawai, T. and Y. Tada, Finite element analysis of a wing structure, *Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design* (ed. by J. T. Oden, R. W. Clough and Y. Yamamoto), UAH Press, The University of Alabama in Huntsville (1972), 727—744.
- [6] 谷安涛、常国振, 汽车车架设计计算的有限元法, 汽车技术, 6 (1977).

The Warp and Stress Transmission in the Joint of an Open Thin Wall Beam

Yang Gin-liang

(Guangzhou Salvage Equipment Research Institute, Guangzhou)

Abstract

The regularities of the warp in the sections of an open thin-wall beam have been discussed using the modern engineering theory of beam. Thus, the transmission relationship between the warp displacements and the double-moments in the joints of open thin-wall beams which are connected in different ways has been deduced. Meanwhile, experiments conducted by the author and some conclusions reached from these experiments as well as the tentative idea for further perfection are briefly presented here.