

文章编号: 1000-0887(2004) 10-1093-08

# 复合材料桥纤维拔出问题的动态裂纹模型<sup>\*</sup>

吕念春<sup>1,3,4</sup>, 程云虹<sup>2</sup>, 胥红敏<sup>1</sup>, 程 靳<sup>1</sup>, 唐立强<sup>4</sup>

- (1. 哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001;
2. 东北大学 土木工程系, 沈阳 110006;
3. 沈阳工业学院 材料科学与工程系, 沈阳 110168;
4. 哈尔滨工程大学 建筑工程学院, 哈尔滨 150001)

(王彪推荐)

**摘要:** 在一无限的正交各向异性体的弹性平面上, 对具有桥纤维平行自由表面的一个内部中央裂纹, 进行了弹性分析, 提出了复合材料桥纤维拔出的一个动态模型。由于纤维破坏是由最大拉应力支配, 纤维断裂并且裂纹扩展将以自相似的方式出现。通过复变函数的方法将所讨论的问题转化为 Reimann-Hilbert 混合边界值问题的动态模型, 呈现一简单的和容易的解。求得了正交异性体中扩展裂纹受运动的阶梯载荷、瞬时脉冲载荷作用下问题的解析解, 并利用这一解, 通过迭加最终求得该模型的解。

**关键词:** 桥纤维拔出; 裂纹; 动态模型; 解析解

**中图分类号:** O346.1      **文献标识码:** A

## 引 言

众所周知纤维增强复合材料中的基体裂纹以及桥纤维的断裂过程是裂纹扩展的主要机制之一, 例如, 单向纤维增强脆性基体复合材料<sup>[1,2]</sup>。文献[3]建议了一个方法, 用于估计在一均匀的移动拉应力作用下, 具有桥纤维的一个裂纹在一无限的正交弹性平面内的牵引力分布。大多数研究者, 如 Woo、Lee、Tsai 等人<sup>[4~6]</sup>几乎都是研究复合材料的静态问题, 而且仅获得了数值解。文献[7]建立了一个桥纤维拔出的模型, 也只获得了在静态条件下的数值解。然而, 复合材料的断裂经常出现在动态条件下, 因此研究断裂动力学问题是极其重要的。在一正交介质中, 文献[8,9]研究了弹性动力学的裂纹问题, 并且获得了闭和解, 但并没有涉及到桥纤维拔出问题。由于在复合材料的动态断裂过程中桥纤维拔出的复杂性, 因而必须克服更多的困难来研究它。当复合材料出现裂纹的时候, 桥纤维拔出出现在裂纹尖端的前面, 这是经常发生的现象。

由于纤维的破坏是由最大拉应力支配的, 且出现在裂纹平面上, 纤维折断了, 裂纹扩展将以自相似的形式出现。纤维断裂位置沿着一横向线, 且呈现 V 字形刻痕<sup>[7,10]</sup>。当裂纹高速扩

\* 收稿日期: 2002\_08\_13; 修订日期: 2004\_03\_30

作者简介: 吕念春(1965—), 男, 辽宁朝阳人, 副教授, 博士, 主要从事复合材料断裂动力学方面的研究(E-mail: lnc\_65@163.com);

程靳(联系人, Tel: + 86\_451\_86416375(o), + 86\_451\_86414970; E-mail: hitwg@0451.com)。

展时,桥纤维拔出仍然存在在复合材料的动态环境中,这比静态的情况更重要。

## 1 桥纤维拔出的一种动力学模型

假设裂纹从无穷小的微观裂纹形成,并以自相似方式沿着  $x$  轴高速扩展,即:裂纹由初始长度为0开始,以速度  $V$  沿  $x$  轴正、负方向在基体中对称扩展。所讨论的复合材料桥纤维拔出简化成二维区域的模型,具有一平行的、同样的、相等的空间纤维的单个的行(排),且被基体分开。最初的破坏起始于许多任意的已经断裂的纤维组成的,以致于所有的断裂位置沿着  $x$  轴形成一个直线的“V”字形刻痕。此外,许多任意的自相似纤维断裂(远离轴)被考虑,即纤维拔出,具有坐标原点的对称性并沿着一横线。桥纤维拔出的动力学模型如图1所示。由图1可见,关于  $y$  轴,桥纤维结构具有几何学和载荷上的对称性,仅仅需要分析右侧的半平面区域即可。纤维和基体可认为是线弹性的,并进一步假定轴向纤维比基体具有更高的弹性系数,因此在复合材料中纤维被看作是承受所有的轴向载荷。在穿过基体的相邻纤维之间,载荷通过简单的剪切机制传递。剪切应力独立于横向位移,并且纤维方向的平衡方程归纳为在单独的纵向位移上的一个方程,这是典型的剪切-滞后理论<sup>[10, 11]</sup>。利用文献[10]中解的方法和建立模型的程序,它讨论静态问题,纤维断裂是依次沿着二个单一的平面出现,即纤维断裂是自相似的(远离轴)。由于这点,关于  $x$  轴的破坏的几何方面将是相同的,也就是说破坏是关于坐标原点对称的。简而言之,纤维断裂是自相似的(远离轴),且呈现V字形刻痕。在裂纹尖端的前部,偏离  $x$  轴处有纤维拔出。在裂纹平面上,靠近裂纹尖端附近的桥纤维并没有断裂,而离裂纹尖端较远处(即裂纹中心附近)纤维已经断裂。当裂纹扩展时,纤维也在连续地发生断裂,设纤维断裂的速度为  $\alpha$ 。图1中  $y = 0, -Vt < x < Vt$  是基体中裂纹的位置,其中在  $y = 0, -\alpha t < x < \alpha t$  处纤维已经断裂;在  $y = 0, \alpha t < |x| < Vt$  是桥纤维区的位置,并没有断裂;而在  $y \neq 0$ , 且  $|x| > Vt$ , 是桥纤维拔出的位置。

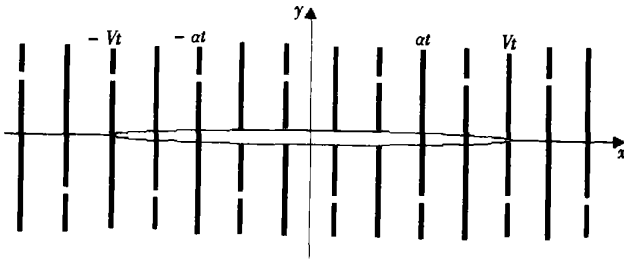


图1 桥纤维拔出结构的动态模型示意图

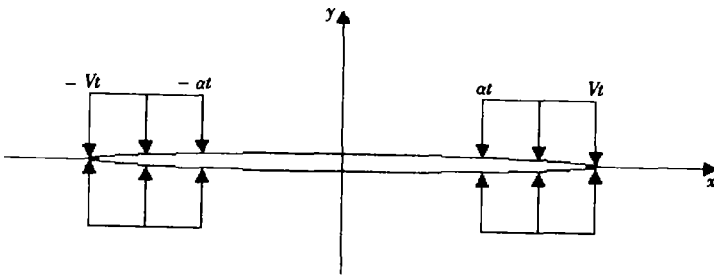


图2 裂纹面的桥纤维区的力学模型

显然,图1中的桥纤维拔出的动态模型可以用图2的力学模型表示。该模型由一沿  $x$  轴

扩展的裂纹表示, 裂纹两端各以速度  $V$  沿  $x$  轴正、负方向对称扩展, 同时纤维断裂的速度为  $\alpha$ , 桥纤维的位置也具有关于  $y$ -轴的对称性。每个纤维被一对垂直作用在相同坐标的同一点的上、下裂纹平面的牵引力代替, 但方向相反。并假定每个纤维力同来自基体的纤维断裂载荷相平衡。关于  $x$ -轴和  $y$ -轴, 这个模型有几何的、力学条件的对称性。在  $y = 0, -Vt < x < -\alpha$  及  $\alpha < x < Vt$  区间上作用闭合力, 该力代表桥纤维处纤维的拉力, 且它们不作用在裂纹的其它地方。在复合材料中纤维通常是密集排列, 且被基体分开, 因此假设由桥纤维产生的拉力是连续分布的。在  $y = 0, \alpha < |x| < Vt$  区间, 由于桥纤维拔出具有关于坐标原点的对称性, 虽然在此区间上裂纹面的位移不同, 但是桥纤维力是相同的。简而言之, 在该区间桥纤维力是均匀的, 且大小设为  $P$ 。另一方面, 当裂纹高速扩展的时候, 裂纹尺寸随时间  $t$  的变化将增加, 而裂纹越长, 断裂的纤维就越多。上述分析是假设纤维在基体中是均匀分布的, 且各纤维具有同等强度, 断裂时纤维与基体在同一截面同时发生<sup>[6]</sup>。当然, 这仅是一种假设的力学模型, 这种模型与实际情况显然有较大出入, 我们可以合理地解释在裂纹或“V”字形刻痕区域以外, 裂纹对其没有影响, 条件是稳态的, 毕竟我们仅希望作用在物体某部分的裂纹尽可能地接近它的实际状况。

## 2 桥纤维拔出的动力学模型具体问题的解

为了更好的解决复合材料桥纤维拔出的断裂动力学问题, 对受集中载荷作用的 I 型运动裂纹进行了求解。根据广义函数原理, 利用自相似函数将不同边界条件的问题转化为 Reimann-Hilbert 混合边值问题, 从而获得了相应问题的解。

利用正交异性体弹性动力学方程的有关公式<sup>[12, 13]</sup>,

当  $Lu, Lv$  为齐次时, 令

$$u^0 = Lu, v^0 = Lv, \sigma_y^0 = L \sigma_y, \tau_{xy}^0 = L \tau_{xy}, \tag{1}$$

当  $L \sigma_y, L \tau_{xy}$  为齐次时, 令

$$u^0 = \frac{\partial}{\partial t} Lu, v^0 = \frac{\partial}{\partial t} Lv, \sigma_y^0 = \frac{\partial}{\partial t} L \sigma_y, \tau_{xy}^0 = \frac{\partial}{\partial t} L \tau_{xy}. \tag{2}$$

相关的自相似函数<sup>[13, 14]</sup>如下:

$$\sigma_y^0 = (1/t) \operatorname{Re} F(\tau), v^0 = \operatorname{Re} W(\tau), \tag{3}$$

$$W'(\tau) = [D_1(\tau)/D(\tau)] F(\tau), \tag{4}$$

式中,  $\tau = x/t, F(\tau), W(\tau)$  为自相似函数。有关  $D(\tau)/D_1(\tau)$  的取值见文献[13]的附录1, 这里仅指出: 在亚声速范围内, 对于  $D(\tau)/D_1(\tau)$  的取值总是纯虚量。

对无限大正交异性体的桥纤维拔出动力学模型问题进行研究。我们假定: 在  $t < 0$  时一切静止;  $t = 0$  时刻, 在坐标原点开始出现裂纹, 该裂纹以速度  $V$  (小于声速) 沿  $x$  轴正、负方向对称扩展, 裂纹表面受到不同类型的集中载荷  $P$  的作用, 且处于平面应变状态下。

### 2.1 阶梯形载荷下的问题

假定在  $t = 0$  时刻, 裂纹面在法向的阶梯形载荷作用下, 以速度  $V$  (小于声速) 沿  $x$  轴正、负方向对称扩展, 载荷的大小为  $P, 0$ , 如图 2 所示。在  $y = 0$  的半平面上, 问题的边界条件为:

$$\begin{cases} \sigma_y = 0, & 0 \leq |x| < \alpha, \\ \sigma_y = -P, & \alpha \leq |x| < Vt, \\ v = 0, & |x| > Vt. \end{cases} \tag{5}$$

由广义函数论<sup>[15,16]</sup>可将边界条件(5)改写为:

$$\begin{cases} \sigma_y = -P + P[H(x + \alpha) - H(x - \alpha)], & |x| < Vt, \\ v = 0, & |x| > Vt. \end{cases} \quad (6)$$

需对边界条件(6)式进行求解。很明显本问题应力为齐次,这里的  $L = 1$ , 利用(2)式可将边界条件(6)的第一式写为:

$$\sigma_y^0 = P\alpha[\delta(x + \alpha) + \delta(x - \alpha)], \quad |x| < Vt. \quad (7)$$

根据(2)、(3)、(4)、(7)式可将边界条件(6)式进一步写为<sup>[17]</sup>:

$$\operatorname{Re}F(\tau) = P\alpha[\delta(\tau + \alpha) + \delta(\tau - \alpha)], \quad |\tau| < V, \quad (8)$$

$$\operatorname{Re}[W'(\tau)] = \operatorname{Re}[F(\tau)D_1(\tau)/D(\tau)] = 0, \quad |\tau| > V. \quad (9)$$

则由(7)式可知  $F(\tau)$  的解必满足如下形式:

$$\text{即 } \operatorname{Re}F(\tau) = \operatorname{Re}\left\{f(\tau) \cdot 2\tau i [\pi(\tau^2 - \alpha^2)]\right\}. \quad (10)$$

由于  $D(\tau)/D_1(\tau)$  在亚音速内为纯虚量,因此上式中的  $f(\tau)$  在区间  $|\tau| < V$  上必然为纯实量,且  $f(\alpha) = P\alpha$ 。因为在  $|x| < Vt$  时,  $\sigma_y$  取不同的两个值,则  $F(\tau)$  中必有 2 个待定的实常数,而在坐标原点位移有界,即  $\tau \rightarrow 0, W(\tau) = o(1)$ 。再利用边界条件(8)及裂纹尖端的奇异性可确定  $F(\tau)$  的唯一解:

$$F(\tau) = \frac{D_1(\tau)/D(\tau)}{i(\tau^2 - V^2)^{3/2}} \left[ A + \frac{2B}{\pi(\tau^2 - \alpha^2)} \right], \quad (11)$$

这里  $B, A$  为实常数;  $\alpha$  为未知的常数,且  $f(\alpha) = P\alpha; D(\tau)/D_1(\tau)$  在亚音速内为纯虚量。将(11)式代入(8)式即可推出实常数  $B$ :

$$B = \alpha P / \operatorname{Im}[D_1(\alpha)/D(\alpha)] (V^2 - \alpha^2)^{3/2}. \quad (12)$$

在各向同性体中,弹性波的扰动范围可以用半径为  $c_{1t}, c_{2t}$  的圆形区域来表示。而在各向异性体中,扰动的范围不再是圆形区域,不会超过弹性体的门槛值  $C_d = \sqrt{C_{11}/\rho}$ , 这里  $C_{11}$  为材料的弹性常数。当  $|x| > C_d t$  时,  $\operatorname{Im}[D_1(\tau)/D(\tau)] = 0$ , 因而应力、位移皆为 0; 这说明  $y = 0$  时,弹性波的扰动不会超过  $C_d t$ 。将(11)式代入(2)、(3)、(4)式可求得应力及动应力强度因子:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \operatorname{Re} \int_0^t F(\tau) \frac{d\tau}{t} = \\ & \operatorname{Re} \int_{C_d}^{x/t} - \frac{\operatorname{Im}[D_1(\tau)/D(\tau)]}{(\tau^2 - V^2)^{3/2}} \left[ A + \frac{2B}{\pi(\tau^2 - \alpha^2)} \right] d\tau, \quad |x| > Vt, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} K_{I1}(t) &= \lim_{r \rightarrow 0} (2\pi r)^{1/2} \sigma_y(x, 0, t) = \\ & \lim_{x \rightarrow Vt} [2\pi(x - Vt)]^{1/2} \operatorname{Re} \int_{C_d}^{x/t} - \frac{\operatorname{Im}[D_1(\tau)/D(\tau)]}{(\tau^2 - V^2)^{3/2}} \left[ A + \frac{2B}{\pi(\tau^2 - \alpha^2)} \right] d\tau = \\ & \frac{\operatorname{Im}[D_1(V)/D(V)]}{V^{3/2}} \left[ A + \frac{2B}{\pi(V^2 - \alpha^2)} \right] \sqrt{\pi t}. \end{aligned} \quad (14)$$

上式的极限值是应用罗比塔(L'Hospital)法则后获得的<sup>[18]</sup>。

由(11)、(3)式可确定出  $W'(\tau)$ :

$$W'(\tau) = \frac{\tau}{(\tau^2 - V^2)^{3/2}} \left[ A + \frac{2B}{\pi(\tau^2 - \alpha^2)} \right]. \quad (15)$$

通过对(15)式进行积分,就可求出  $W(\tau)$

$$W(\tau) = \int W'(\tau) d\tau = \int \frac{\tau}{(\tau^2 - V^2)^{3/2}} \left[ A + \frac{2B}{\pi(\tau^2 - \alpha^2)} \right] d\tau =$$

$$\frac{A}{\sqrt{V^2 - \tau^2}} + \frac{B}{\pi} \left[ \frac{2}{(V^2 - \alpha^2) \sqrt{V^2 - \tau^2}} + \frac{1}{\sqrt{(V^2 - \alpha^2)^3}} \ln \left| \frac{\sqrt{V^2 - \alpha^2} - \sqrt{V^2 - \tau^2}}{\sqrt{V^2 - \alpha^2} + \sqrt{V^2 - \tau^2}} \right| \right] + C \quad (16)$$

因为裂纹扩展的方向是沿着  $x$  轴的, 所以再对  $W(\tau)$  进行定积分运算时, 取常数  $C = 0$ , 然后将(16) 式代入(2)、(3) 式, 得出位移  $v$ :

$$\begin{aligned} v &= \int_0^{x/t} v^0 dt = \operatorname{Re} \int_0^{x/t} W(\tau) dt = \operatorname{Re} \int_{\infty}^{x/t} W(\tau) \left( -\frac{x}{\tau^2} \right) d\tau = \\ &\operatorname{Re} \int_{c_d}^{x/t} \left( -\frac{x}{\tau^2} \right) \left\{ \frac{A}{\sqrt{V^2 - \tau^2}} + \left[ \frac{2B}{\pi(V^2 - \alpha^2) \sqrt{V^2 - \tau^2}} + \frac{B}{\pi \sqrt{(V^2 - \alpha^2)^3}} \ln \left| \frac{\sqrt{V^2 - \alpha^2} - \sqrt{V^2 - \tau^2}}{\sqrt{V^2 - \alpha^2} + \sqrt{V^2 - \tau^2}} \right| \right] \right\} d\tau = \\ &\operatorname{Re} \left[ A + \frac{2B}{\pi(V^2 - \alpha^2)} \right] \frac{x \sqrt{V^2 - \tau^2}}{V^2 \tau} \Big|_{c_d}^{x/t} - \\ &\operatorname{Re} \int_{c_d}^{x/t} \frac{Bx}{\pi \tau^2 \sqrt{(V^2 - \alpha^2)^3}} \ln \left| \frac{\sqrt{V^2 - \alpha^2} - \sqrt{V^2 - \tau^2}}{\sqrt{V^2 - \alpha^2} + \sqrt{V^2 - \tau^2}} \right| d\tau = \\ &\frac{1}{V^2} \left[ A + \frac{2B}{\pi(V^2 - \alpha^2)} \right] \sqrt{V^2 t^2 - x^2} - \\ &\frac{Bx}{\pi \sqrt{(V^2 - \alpha^2)^3}} \left[ \frac{t}{x} \ln \left| \frac{\sqrt{V^2 - \alpha^2} t + \sqrt{V^2 t^2 - x^2}}{\sqrt{V^2 - \alpha^2} t - \sqrt{V^2 t^2 - x^2}} \right| + \frac{1}{\alpha} \ln \left| \frac{\alpha \sqrt{V^2 t^2 - x^2} - \sqrt{V^2 - \alpha^2} x}{\alpha \sqrt{V^2 t^2 - x^2} + \sqrt{V^2 - \alpha^2} x} \right| \right] = \\ &\frac{1}{V^2} \left[ A + \frac{2B}{\pi(V^2 - \alpha^2)} \right] \sqrt{V^2 t^2 - x^2} - \frac{B}{\pi \sqrt{(V^2 - \alpha^2)^3}} \times \\ &\left[ t \ln \left| \frac{\sqrt{V^2 - \alpha^2} t + \sqrt{V^2 t^2 - x^2}}{\sqrt{V^2 - \alpha^2} t - \sqrt{V^2 t^2 - x^2}} \right| + \frac{x}{\alpha} \ln \left| \frac{\alpha \sqrt{V^2 t^2 - x^2} - \sqrt{V^2 - \alpha^2} x}{\alpha \sqrt{V^2 t^2 - x^2} + \sqrt{V^2 - \alpha^2} x} \right| \right], \end{aligned} \quad |x| < Vt \quad (17)$$

然后, 将(13) 式代入(6) 式后, 即可确定实常数  $A$ :

$$\begin{cases} A = (P - 2B\pi^1 J_2) / J_1, \\ J_1 = \int_{c_d}^M \frac{\operatorname{Im}[D(\tau) / D_1(\tau)]}{(\tau^2 - V^2)^{3/2}} d\tau, \\ J_2 = \int_{c_d}^M \frac{\operatorname{Im}[D(\tau) / D_1(\tau)]}{(\tau^2 - \alpha^2)(\tau^2 - V^2)^{3/2}} d\tau, \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $\alpha < M < V$ , 且积分是在主值意义下进行的。

### 2.2 坐标原点受到瞬时脉冲载荷下的问题

设在  $t = 0$  时刻, 坐标原点受到瞬时脉冲载荷  $I$  的作用, 突然出现一具有桥纤维的拔出的裂纹, 并以常速  $V$  沿  $x$  轴二方向开始对称扩展。在  $y = 0$  的半平面上, 问题的边界条件为:

$$\begin{cases} \sigma_y(x, 0, t) = -I\delta(x) \delta(t), & |x| < Vt, \\ v(x, 0, t) = 0, & |x| > Vt. \end{cases} \quad (19)$$

显然, 本问题位移为齐次, 这里的  $L = \partial^{-1}/\partial t^{-1} = L_i^{-1}$ , 利用(1)、(4)式可将边界条件(19)的第一式写为:

$$\operatorname{Re} F(\tau) = t\sigma_y^0 = -It\delta(x) = -I\delta(\tau), \quad y = 0, \quad |\tau| < V \quad (20)$$

根据(1)、(3)、(4)式可将边界条件(20)式进一步写为<sup>[15, 16]</sup>:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[W'(\tau)D(\tau)/D_1(\tau)] = -I\delta(\tau), & |\tau| < V, \\ \operatorname{Re}[W'(\tau)] = 0, & |\tau| > V. \end{cases} \quad (21)$$

则由上式可推知  $W'(\tau)$  的解必为如下形式:

$$W'(\tau) = \xi(\tau)/\tau, \quad (22)$$

式中  $\xi(\tau)$  在区间  $|\tau| < V$  中无奇点, 又由于  $D(\tau)/D_1(\tau)$  在亚音速内为纯虚量, 因此  $\xi(\tau)$  在区间  $|\tau| < V$  上必须为纯实量. 这样, 问题(21)化为:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\xi(\tau) = 0, & |\tau| > V, \\ \operatorname{Im}\xi(\tau) = 0, & |\tau| < V. \end{cases} \quad (23)$$

对于物理平面的坐标原点, 根据对称性、无穷远条件及裂纹尖端的奇异性<sup>[17]</sup>, 可得 Reimann\_Hilbert 问题(19)的唯一解:

$$\xi(\tau) = A_1(V^2 - \tau^2)^{1/2}, \quad (24)$$

这里  $A_1$  为待定实常数.

现在将(24)式代入(22)、(4)式, 得:

$$\begin{cases} W'(\tau) = A_1(V^2 - \tau^2)^{1/2}/\tau, \\ F(\tau) = A_1(V^2 - \tau^2)^{1/2}[D(\tau)/D_1(\tau)]/\tau. \end{cases} \quad (25)$$

而后将(24)式代入(21)的第一式, 在  $\tau \rightarrow 0$  时, 即可确定实常数  $A_1$  为:

$$A_1 = \frac{-P}{\pi V \operatorname{Im}[D(0)/D_1(0)]}. \quad (26)$$

将(26)式代入(1)、(3)、(4)式后即可得:

$$\sigma_y^0 = L_i^{-1}\sigma_y = \int_0^t \sigma_y dt = t^{-1} \operatorname{Re} \left\{ A_1(V^2 - \tau^2)^{1/2} \frac{D(\tau)/D_1(\tau)}{\tau} \right\}. \quad (27)$$

关于(27)式的后二项对  $t$  进行求导, 即可得  $y = 0$  上的应力为:

$$\sigma_y = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{t} \frac{A_1(V^2 - \tau^2)^{1/2}}{\tau} \operatorname{Im} \left[ \frac{D(\tau)}{D_1(\tau)} \right] \right\}, \quad |x| > Vt. \quad (28)$$

同理可推出关系式:

$$v^0 = L_i^{-1}v = \int_0^t v dt = \operatorname{Re} W(\tau). \quad (29)$$

将(29)式的后二项对  $t$  进行求导, 即可得  $y = 0$  上的位移为:

$$\begin{aligned} v = \operatorname{Re} W'(\tau) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \operatorname{Re} \frac{A_1(V^2 - \tau^2)^{1/2}}{\tau} \left( -\frac{\tau}{t} \right) = \\ &= -\frac{A_1}{t^2} \sqrt{V^2 t^2 - x^2}, \quad |x| < Vt. \end{aligned} \quad (30)$$

利用(28)式, 即可得  $y = 0$  上的动态应力强度因子为:

$$\begin{aligned} K_I(t) &= \lim_{x \rightarrow Vt} \sqrt{2\pi(x - Vt)} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{t} \frac{A_1(V^2 - \tau^2)^{1/2}}{\tau} \operatorname{Im} \left[ \frac{D(\tau)}{D_1(\tau)} \right] \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow Vt} \sqrt{2\pi(x - Vt)} \frac{A_1 V}{t \sqrt{2Vt(x - Vt)}} \operatorname{Im} \left[ \frac{D(V)}{D_1(V)} \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{A_1(V\pi)^{1/2}}{t^{3/2}} \operatorname{Im} \left[ \frac{D(V)}{D_1(V)} \right] \cdot \quad (31)$$

根据迭加原理, 在坐标原点受瞬时脉冲载荷  $I$  作用下的复合材料桥纤维拔出的动力学模型的桥纤维断裂速度  $\alpha$  可表示为:

$$\Delta_1 = \frac{-A_1}{t} \sqrt{V^2 - \alpha^2}, \quad |x| = \alpha t, \quad (32)$$

式中:  $\Delta_1$  由桥纤维拔出时通过单向拉伸试验测得, 而  $V, t$  可视为已知量, 故此可以求出动力学问题的复合材料的纤维断裂速度  $\alpha$

### 3 结 论

通过复变函数的方法求得了复合材料中桥纤维拔出问题的裂纹动力学模型的解析解, 关于半平面的一混合的 Reimann\_Hilbert 边界值问题, 采用自相似函数的方法能够获得正交各向异性体在阶梯形载荷作用下, 坐标原点受到瞬时脉冲载荷作用时的桥纤维拔出的断裂动力学模型的具体解。应用迭加原理就可以得到桥纤维的断裂速度  $\alpha$ , 可以认为这是弹性理论的相似种类的动态问题。解的方法是以唯一的解析函数理论为基础, 是简单的和明了的。通过对一些关于混合边界值问题解的观测, 相当地减少了解决这一裂纹扩展问题的计算工作量。

### [参 考 文 献]

- [1] Marshall D B, Cox B N, Evens A G. The mechanics of matrix cracking in brittle matrix fiber composites[J]. Acta Metallurgica, 1985, 33(10): 2013—2021.
- [2] Budiansky B, Hutchinson J W, Evens A G. Matrix fracture in fiber reinforced ceramics[J]. J Mech Phys Solids, 1986, 34(2): 167—189.
- [3] Liu W N. Stress ahead of the tip of a finite width center crack in fiber reinforced composite specimens subjected to non linearly distributed bridging stresses[J]. Internat J Fracture, 1994, 70(4): L31—L35.
- [4] Woo C W, Wang Y H. Analysis of an internal crack in a fine anisotropic plate[J]. Internat J Fracture, 1993, 62(2): 203—208.
- [5] Lee J C. Analysis of fiber bridged crack near a free surface in ceramic matrix composites[J]. Engrg Fracture Mech, 1990, 37(2): 209—219.
- [6] Tsai W T, Dharani I R. Non self similar fiber fracture in unidirectional composites[J]. Engrg Fracture Mech, 1993, 44(1): 43—49.
- [7] Ji M, Ishikawa H. Analysis of an internal central crack with bridging fibers in a finite orthotropic plate[J]. Internat J Engrg Sci, 1997, 35(4): 549—560.
- [8] Piva A, Viola E. Crack propagation in an orthotropic medium[J]. Engrg Fracture Mech, 1988, 32(4): 535—547.
- [9] De J, Patra B. Elastodynamic crack problems in an orthotropic medium through complex variable approach[J]. Engrg Fracture Mech, 1986, 31(6): 895—909.
- [10] Goree J G, Gross R S. Analysis of an unidirectional composite containing broken fibers and matrix damage[J]. Engrg Fracture Mech, 1979, 13(5): 563—578.

- [11] Goree J G, Dhamt L R, Jones W F. Crack growth and fracture of continuous fiber metal matrix composites: analysis and experiments[J]. *Metal Matrix Composites: Testing, Analysis, and Failure Modes*, ASTM STP, 1989, **1032**(2): 251—269.
- [12] Cherepanov G P, Afanasov E F. Some dynamic problems of the theory of elasticity — a review[J]. *Internat J Engrg Sci*, 1974, **12**(5): 665—690.
- [13] 吕念春. 复合材料断裂动力学若干问题的研究[D]. 博士学位论文. 哈尔滨工业大学, 2002, 60—70.
- [14] 程靳. 某些正交异性体弹性动力学问题[J]. 哈尔滨工业大学学报, 工程力学专辑, 1985(增刊): 8—21.
- [15] Hoskins R F. *Generalized Functions* [M]. New York: Ellis Horwood, 1979, 19—125.
- [16] Muskhelishvili N I. *Some Fundamental Problems in the Mathematical Theory of Elasticity* [M]. Moscow: Nauka, 1968, 8—120.
- [17] Gahov F D. *Boundary Value Problems* [M]. Moscow: Fitzmatgiz, 1963, 71—169.
- [18] 同济大学数学教研室. 高等数学[M]. 上册. 北京: 高等教育出版社, 1994, 167—172.

## Dynamic Crack Models on Problem of Bridging Fiber Pull\_Out of Composite Materials

LÜ Nian\_chun<sup>1,3,4</sup>, CHENG Yun\_hong<sup>2</sup>, XU Hong\_min<sup>1</sup>,  
CHENG Jin<sup>1</sup>, TANG Li\_qiang<sup>4</sup>

- (1. Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China;  
2. Department of Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110006, P. R. China;  
3. Department of Material Science and Engineering, Shenyang Institute of Technology, Shenyang 110168, P. R. China;  
4. School of Architectural Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P. R. China)

**Abstract:** An elastic analysis of an internal central crack with bridging fibers parallel to the free surface in an infinite orthotropic anisotropic elastic plane was performed. A dynamic model of bridging fiber pull\_out of composite materials was presented. Resultingly the fiber failure is governed by maximum tensile stress, the fiber breaks and hence the crack extension should occur in self\_similar fashion. By the methods of complex functions, the problem studied can be transformed into the dynamic model to the Reimann\_Hilbert mixed boundary value problem, and a straightforward and easy analytical solution is presented. Analytical study on the crack propagation subjected to a ladder load and an instantaneous pulse loading is obtained respectively for orthotropic anisotropic body. By utilizing the solution, the concrete solutions of this model are attained by ways of superposition.

**Key words:** bridging fiber pull\_out; crack; dynamic model; analytical solution