

# 扇形板的富里哀—贝塞尔级数解

钱民刚 严宗达

(系统工程研究所) (天津大学力学系)

(薛大为推荐, 1983年12月2日收到)

## 摘 要

本文以加补充项的富里哀—贝塞尔双重级数的位移模式, 对扇形弹性薄板在各种边界条件下的弯曲和振动问题, 提出了一种应用范围比较广的、便于计算的、解析形式的解法。作为算例, 文中给出了各种角度的径向边界简支或固定的扇形板在均布荷载或集中荷载作用下产生的挠度和弯矩的分布曲线, 并与有关文献的数值结果进行了比较。本文推广了加补充项的富氏级数法的应用范围, 并计算出各种角度的径向边界简支的扇形板的自振频率和节线的图表。

## 一、引 言

扇形弹性薄板在各工业部门中有着广泛的应用, 然而这方面的研究与圆板相比还是不够的。在有关文献中, 有的是近似解法, 有的是半解析法, 有的只适用于特定的扇形角, 有的只适用于特定的径向边界条件或特定的荷载条件。本文以加补充项的富里哀—贝塞尔双重级数的位移模式, 对扇形板在各种边界条件下的弯曲和振动问题提出了一种新的、应用范围比较广的、便于计算的、解析形式的解法。这种解法不但可以适用于任意的扇形角, 还可以适用于各种载荷。对于集中载荷、间断分布载荷等较复杂的载荷条件, 也可以用统一的形式求解, 不用分段表示。

文献[2]从研究富氏级数的收敛和逐项可导的性质出发, 采用加补充项的富氏级数, 大大扩展了富氏级数解法的应用范围, 解决了直杆、矩形板及轴对称圆板的有关问题。对于圆周固定或简支的圆板受偏心集中力作用的弯曲问题, 文献[2]的作者曾使用如下形式的位移:

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} J_m(\lambda_{mn} \rho) \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} A_m \rho^m (1-\rho^2) \cos m\theta \quad (1.1)$$

式中 $\lambda_{mn}$ 是 $J_m(x)=0$ 的第 $n$ 个正根, 并得到满意的结果。本文将在此基础上, 把加补充项的富氏级数法推广到扇形板的弯曲和振动问题, 这样就进一步扩展了这种方法的应用范围。

## 二、径向边界简支的扇形板的弯曲

在极坐标系 $(r, \theta)$ 中, 设半径为 $a$ , 夹角 $\theta_0 = \pi/k$ 的扇形板直边简支、圆边任意, 受横向荷

载 $q(\rho, \theta)$ 作用。这里 $\rho=r/a$ 。基本微分方程为:

$$\nabla^2 \nabla^2 W(\rho, \theta) = \frac{q(\rho, \theta)a^4}{D} \quad (2.1)$$

$$\text{式中: } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (2.1a)$$

$E, \mu, t$ 分别是板的弹性模量、波桑比和厚度。

直边边界条件:

$$W(\rho, 0) = W(\rho, \theta_0) = 0 \quad (2.2)$$

$$M_\theta(\rho, 0) = M_\theta(\rho, \theta_0) = 0 \quad (2.3)$$

圆边边界条件由下面四式中的两式组成:

$$W(1, \theta) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \rho}(1, \theta) = 0 \quad (2.5)$$

$$M_r(1, \theta) = 0 \quad (2.6)$$

$$V_r(1, \theta) = 0 \quad (2.7)$$

这里 $W, \partial W/\partial \rho, M_r, M_\theta, V_r$ 分别表示板的挠度、转角、径向弯矩、环向弯矩和径向总分布剪力。它们的定义式与正负号规定均与文献[4]相同。

早在1915年Na'dai就讨论了这类问题,在文献[3],[5],[12],[13],[16]中也分析了沿直线边缘简支的扇形板。但他们使用的方法,有的适用范围不够广,有的计算不够方便。现在我们把加补充项的富氏级数法应用到直边简支的扇形板。经过选择比较,我们设直边简支的扇形板的挠度形式为如下的加补充项的半周期为 $\theta_0$ 的富里哀—贝塞尔正弦级数:

$$W(\rho, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} J_u(\lambda_{un}\rho) \sin u\theta + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^u + B_m \rho^{u+2}) \sin u\theta \quad (2.8)$$

式中:  $u = m\pi/\theta_0 = km$ ,  $\theta_0$ 为扇形角,  $k$ 是大于等于1的任意实数 ( $k \geq 1$ )。  $W_{mn}, A_m, B_m$ 均为待定系数。  $\lambda_{un}$ 是  $u$ 阶贝塞尔函数  $J_u(x) = 0$  的第  $n$  个正根。

对于径向边界简支的扇形板,直边上 $W$ 及其二阶导数 $M_\theta$ 为零,根据富氏级数理论(参阅文献[1]第五章§8~§10),对此正弦级数可以逐项求导。但在圆边上 $W$ 及其二阶导数 $M_r$ 不一定为零,当有间断值时,就不能逐项求导。为了消除这种间断,在(2.8)式中加入了

与(1.1)式类似的补充项  $\sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^u + B_m \rho^{u+2}) \sin u\theta$ 。

相应的转角、弯矩和剪力可由公式求出:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \rho}(\rho, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left[ \frac{u}{\rho} J_u(\lambda_{un}\rho) - \lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un}\rho) \right] \sin u\theta \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} [A_m u \rho^{u-1} + B_m (u+2) \rho^{u+1}] \sin u\theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
M_r(\rho, \theta) &= -\frac{D}{a^2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right] \\
&= -\frac{D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left[ \frac{(1-\mu)(u^2-u)}{\rho^2} J_u(\lambda_{un}\rho) - \frac{2u+1+\mu}{\rho} \lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un}\rho) \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{un}^2 J_{u+2}(\lambda_{un}\rho) \right] \sin u\theta - \frac{D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m(1-\mu)(u^2-u)\rho^{u-2} \\
&\quad + B_m[(1-\mu)u^2 + (3+\mu)u + 2(1+\mu)]\rho^u \} \sin u\theta \tag{2.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_\theta(\rho, \theta) &= -\frac{D}{a^2} \left[ \mu \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right] \\
&= -\frac{D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left[ \frac{(\mu-1)(u^2-u)}{\rho^2} J_u(\lambda_{un}\rho) - \frac{2\mu u+1+\mu}{\rho} \lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un}\rho) \right. \\
&\quad \left. + \mu \lambda_{un}^2 J_{u+2}(\lambda_{un}\rho) \right] \sin u\theta - \frac{D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m(\mu-1)(u^2-u)\rho^{u-2} \\
&\quad + B_m[(\mu-1)u^2 + (1+3\mu)u + 2(1+\mu)]\rho^u \} \sin u\theta \tag{2.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_r(\rho, \theta) &= -\frac{D}{a^3} \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 W - (1-\mu) \frac{D}{a^3} \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \theta^2} \left( \frac{\partial W}{\partial \rho} - \frac{W}{\rho} \right) \\
&= \frac{D}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left[ \frac{(1-\mu)(u-1)u^2}{\rho^3} J_u(\lambda_{un}\rho) - \frac{(1-\mu)u^2 \lambda_{un}}{\rho^2} J_{u+1}(\lambda_{un}\rho) \right. \\
&\quad \left. + \frac{u \lambda_{un}^2}{\rho} J_u(\lambda_{un}\rho) - \lambda_{un}^3 J_{u+1}(\lambda_{un}\rho) \right] \sin u\theta \\
&\quad + \frac{D}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} \{ (1-\mu)u^2(u-1)A_m \rho^{u-3} + B_m[(1-\mu)u^3 - (3+\mu)u^2 - 4u]\rho^{u-1} \} \sin u\theta \tag{2.12}
\end{aligned}$$

把外荷载 $q(\rho, \theta)$ 也展开成富里哀—贝塞尔级数:

$$q(\rho, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} J_u(\lambda_{un}\rho) \sin u\theta \tag{2.13}$$

$$\text{其中: } q_{mn} = \frac{4}{\theta_0 J_{u+1}^2(\lambda_{un})} \int_0^1 \int_0^{\theta_0} q(\rho, \theta) \sin u\theta J_u(\lambda_{un}\rho) d\theta \rho d\rho \quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 2, 3, \dots) \tag{2.14}$$

把(2.8)和(2.13)代入微分方程(2.1), 经过运算整理, 对比方程两边系数, 得到

$$W_{mn} = \frac{q_{mn} a^4}{\lambda_{un}^4 D} \quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 2, 3, \dots) \tag{2.15}$$

直边的边界条件已经自动满足, 只要根据圆边的各种不同的边界条件, 把(2.8)至(2.11)各式分别代入(2.4)至(2.7)各式, 即可求得 $A_m, B_m$ , 从而得到所求的解答。

例1 夹角 $\theta_0 = \pi/k$  (实数 $k \geq 1$ )的直边简支、圆边固定的扇形板, 受均布荷载 $q_0$ 作用. 这里 $q(\rho, \theta) = q_0$ , 由(2.14)和(2.15)得到

$$W_{mn} = \begin{cases} \frac{8q_0 a^4 I_{mn}}{m\pi J_{u+1}^2(\lambda_{un}) \lambda_{un}^4 D} & (m=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (m=2, 4, 6, \dots) \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\text{式中} \quad I_{mn} = \int_0^1 J_u(\lambda_{un}\rho) \rho d\rho \quad (2.17)$$

由圆边边界条件(2.4)得到

$$B_m = -A_m \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (2.18)$$

由圆边边界条件(2.5)得到

$$A_m = \begin{cases} -\frac{4q_0 a^4}{m\pi D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{mn}}{\lambda_{un}^3 J_{u+1}(\lambda_{un})} & (m=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (m=2, 4, 6, \dots) \end{cases} \quad (2.19)$$

把(2.17)至(2.19)代入(2.8)、(2.10)、(2.11), 就得到挠度和弯矩的级数表达式:

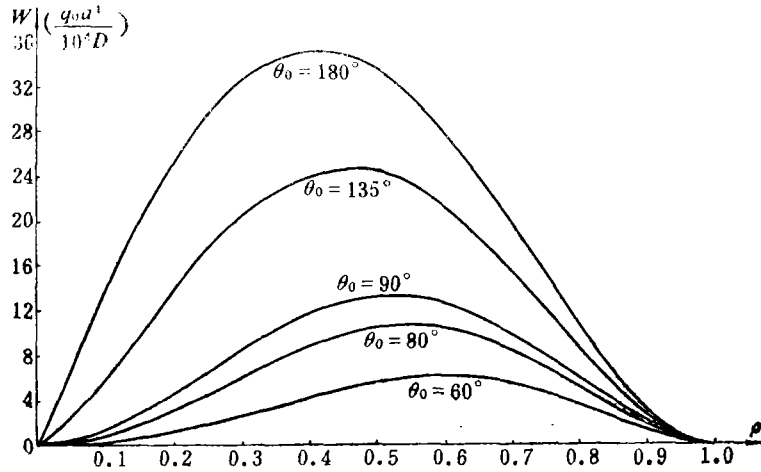
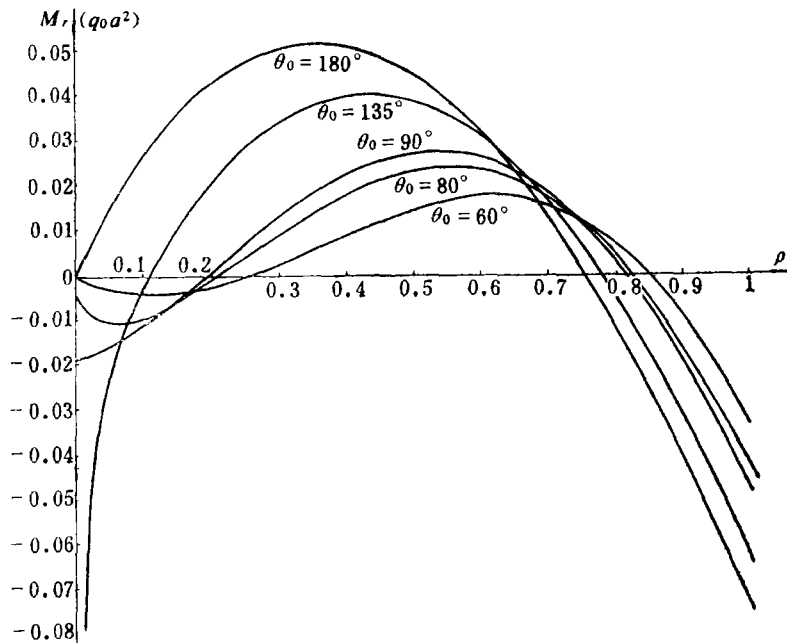
$$W(\rho, \theta) = \frac{4q_0 a^4}{\pi D} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{mn} \sin u\theta}{m \lambda_{un}^3 J_{u+1}(\lambda_{un})} \left[ \frac{2J_u(\lambda_{un}\rho)}{\lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un})} - \rho^u (1-\rho^2) \right] \quad (2.20)$$

$$M_r(\rho, \theta) = -\frac{4q_0 a^2}{\pi} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{mn} \sin u\theta}{m \lambda_{un}^3 J_{u+1}(\lambda_{un})} \left\{ \frac{2}{\lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un})} \left[ \frac{(1-\mu)(u^2-u)}{\rho^2} J_u(\lambda_{un}\rho) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2u+1+\mu}{\rho} \lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un}\rho) + \lambda_{un}^2 J_{u+2}(\lambda_{un}\rho) \right] + (\mu-1)(u^2-u)\rho^{u-2} \right. \\ \left. + [(1-\mu)u^2 + (3+\mu)u + 2(1+\mu)]\rho^u \right\} \quad (2.21)$$

$$M_\theta(\rho, \theta) = -\frac{4q_0 a^2}{\pi} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{I_{mn} \sin u\theta}{m \lambda_{un}^3 J_{u+1}(\lambda_{un})} \left\{ \frac{2}{\lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un})} \left[ \frac{(\mu-1)(u^2-u)}{\rho^2} J_u(\lambda_{un}\rho) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\mu u+1+\mu}{\rho} \lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un}\rho) + \mu \lambda_{un}^2 J_{u+2}(\lambda_{un}\rho) \right] + (1-\mu)(u^2-u)\rho^{u-2} \right. \\ \left. + [(\mu-1)u^2 + (1+3\mu)u + 2(1+\mu)]\rho^u \right\} \quad (2.22)$$

在图1, 图2, 图3中分别画出了扇形角 $\theta_0 = 60^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ 的圆边固定、直边简支的扇形板在均布荷载下在中心线 $\theta = \theta_0/2$ 上挠度和弯矩的分布曲线. 图中的计算结果是取 $\mu = 0.3, m = n = 11$ 时得到的. 对于 $90^\circ < \theta_0 < 180^\circ$ 的扇形板, 零点附近的弯矩值趋向于无穷大, 这与文献[17]的结论是一致的.

为了便于对照, 表1中列出了上述五种夹角 $\theta_0$ 的扇形板中线上 $\rho = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ 处的数值结果. 其中 $\theta_0 = 180^\circ, 90^\circ, 60^\circ$ 即 $k = 1, 2, 3$ 等整数时的计算结果,  $W$ 和 $M_r$ 与文献[3]的结果符合得很好,  $M_\theta$ 的值文献[3]中没有给出. 对于 $\theta_0 = 80^\circ, 135^\circ$ 即 $k = 2.25, 1.333$ 等非整数时 $W, M_r, M_\theta$ 的值, 是用文献[3]的方法不能得到的. 表1中还对比了当取 $m, n = 11$ 和 $m, n = 15$ 的计算结果. 可以看出, (2.20)至(2.22)给出的结果具有很好的收敛性, 取到 $m, n = 11$ 时已经足够精确了.

图1 直边简支、圆边固定的扇形板在均布荷载下中线挠度 $W$ 的分布图2 直边简支、圆边固定的扇形板在均布荷载下中线上弯矩 $M_r$ 的分布

### 三、径向边界非简支的扇形板的弯曲

当扇形板两个直边 $\theta=0$ 和 $\theta=\theta_0$ 不全为简支时,其基本微分方程仍然如(2.1)所示,圆边边界条件也依旧是(2.4)至(2.7)各式,只是直边边界条件不再有(2.2)、(2.3)两式同时成立了。如果我们仍然用(2.8)式来求解,在直边上 $W$ 及其两阶导数 $M_\theta$ 将有间断。根据富氏级数理论(参阅文献[1]第五章§8~§10),对(2.8)式是不能逐项求导的。为了消除这种间断,需要在 $W$ 的表示式中加入新的补充项。我们设挠度函数为:

$$W(\rho, \theta) = \Phi(\rho, \theta) + \Phi_1(\rho, \theta) + \Phi_2(\rho, \theta) + \Phi_3(\rho, \theta) \quad (3.1)$$

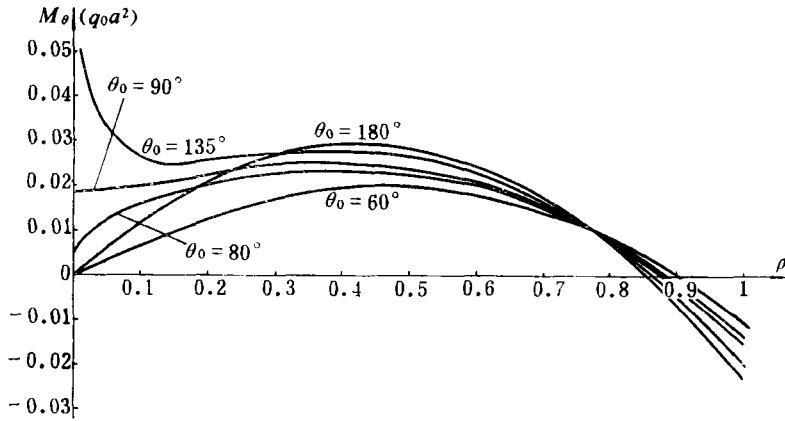


图3 直边简支、圆边固定的扇形板在均布荷载下中线上弯矩 $M_\theta$ 的分布

表1 圆边夹支、直边简支的扇形板在均布荷载下中线的挠度和弯矩值( $\mu=0.3$ )

k	$\theta_0$	$\rho=0.25$			$\rho=0.5$		
		$W(q_0 a^4/D)$	$M_r(q_0 a^2)$	$M_\theta(q_0 a^2)$	$W(q_0 a^4/D)$	$M_r(q_0 a^2)$	$M_\theta(q_0 a^2)$
3	60°	0.00017	-0.0006		0.00057	0.0143	
		0.0001595	-0.000688	0.014961	0.0005640	0.014298	0.019688
2.25	80°	0.00044092	0.000339	0.021628	0.0010560	0.023252	0.0229062
		0.00044090	0.000343	0.021658	0.0010558	0.023277	0.0229210
2	90°	0.00063	0.0068		0.00132	0.0272	
		0.0006314	0.006891	0.023761	0.001316	0.027179	0.023908
1.333	135°	0.0017287	0.027677	0.026249	0.0024386	0.039235	0.026613
		0.0017285	0.027568	0.026213	0.0024382	0.039268	0.026651
1	180°	0.00293	0.0473		0.00337	0.0446	
		0.0029344	0.047391	0.024339	0.0033699	0.044578	0.028619

续表1

k	$\theta_0$	$\rho=0.75$			$\rho=1.0$		备 注
		$W(q_0 a^4/D)$	$M_r(q_0 a^2)$	$M_\theta(q_0 a^2)$	$M_r(q_0 a^2)$	$M_\theta(q_0 a^2)$	
3	60°	0.00047	0.0123		-0.0340		文献[3]
		0.0004677	0.012410	0.011649	-0.033928	-0.010178	本文, 取 $m=n=11$
2.25	80°	0.0007046	0.012354	0.012144	-0.044255	-0.013276	本文, 取 $m=n=11$
		0.0007043	0.012268	0.012137	-0.044298	-0.013289	本文, 取 $m=n=15$
2	90°	0.00082	0.0113		-0.0488		文献[3]
		0.000814	0.011706	0.012272	-0.048748	-0.014624	本文, 取 $m=n=11$
1.333	135°	0.0012272	0.006849	0.012556	-0.064573	-0.019371	本文, 取 $m=n=11$
		0.0012269	0.006787	0.012588	-0.064658	-0.019397	本文, 取 $m=n=15$
1	180°	0.00153	0.0016		-0.0756		文献[3]
		0.001526	0.001574	0.012706	-0.075343	-0.022602	本文, 取 $m=n=11$

$$\text{式中: } \Phi(\rho, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} J_u(\lambda_{un}\rho) \sin u\theta \quad (3.2)$$

$$\Phi_1(\rho, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^u + B_m \rho^{u+2}) \sin u\theta \quad (3.3)$$

$$\Phi_2(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \Theta_j(\theta) J_\nu(\lambda_j \rho) \quad (3.4)$$

$$\Phi_3(\rho, \theta) = I\rho^2\theta + J\rho^2 + K \quad (3.5)$$

这里  $\Theta_j(\theta)$  是包含 4 个任意常数的  $\theta$  的三次函数式, 为了运算方便, 设  $\Theta_j(\theta)$  为:

$$\Theta_j(\theta) = C_j \frac{\theta^3 - 3\theta_0\theta^2 + 2\theta_0^2\theta}{6\theta_0^3} + D_j \frac{\theta(\theta_0 - \theta)}{2\theta_0^2} + E_j \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0} + F_j \quad (3.6)$$

其中:  $W_{mn}, A_m, B_m, C_j, D_j, E_j, F_j, I, J, K$  均为待定的任意常数.  $\nu$  为大于等于 2 的固定常数, 为便于计算一般选取  $\nu$  为 2, 3 等整数.  $\lambda_j$  则为  $J_\nu(x) = 0$  的第  $j$  个正根,  $J_\nu(x)$  为  $\nu$  阶贝塞尔函数.

把(3.1)式代入微分方程(2.1)进行运算, 再把各项都展开成双重富里哀—贝塞尔级数, 对比方程两边系数, 整理得到:

$$\lambda_{un}^4 W_{mn} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{C_j + \eta D_j}{m^2 \pi^2} + E_j + \eta F_j \right) I_R^{mnj} - \frac{C_j + \eta D_j}{\theta_0^2} I_S^{mnj} \right] \frac{4}{m\pi J_{\nu+1}^2(\lambda_{un})} = \frac{q_{mn} a^4}{D} \quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 2, 3, \dots) \quad (3.7)$$

$$\text{这里 } I_R^{mnj} = \int_0^1 R_j(\rho) J_u(\lambda_{un}\rho) \rho d\rho \quad (3.8)$$

$$I_S^{mnj} = \int_0^1 S_j(\rho) J_u(\lambda_{un}\rho) \rho d\rho \quad (3.9)$$

$$\text{式中 } R_j(\rho) = \left[ \lambda_j^2 - \frac{2\nu^2 \lambda_j^2}{\rho^2} + \frac{\nu^2(\nu-2)^2}{\rho^4} \right] J_\nu(\lambda_j \rho) + \frac{4\nu^2 \lambda_j}{\rho^3} J_{\nu+1}(\lambda_j \rho) \quad (3.10)$$

$$S_j(\rho) = \left( \frac{2\nu^2 + 4\nu + 4}{\rho^4} - \frac{2\lambda_j^2}{\rho^2} \right) J_\nu(\lambda_j \rho) + \frac{4\lambda_j}{\rho^3} J_{\nu+1}(\lambda_j \rho) \quad (3.11)$$

(3.7)式中  $q_{mn}$  仍由(2.14)决定, 而符号

$$\eta = \begin{cases} 2 & (m=1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (m=2, 4, 6, \dots) \end{cases} \quad (3.7a)$$

对应于公式(3.1)的转角、弯矩、扭矩和剪力都可由公式求出. 例如:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \rho}(\rho, \theta) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left[ \frac{u}{\rho} J_u(\lambda_{un}\rho) - \lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un}\rho) \right] \sin u\theta + \sum_{m=1}^{\infty} [A_m u \rho^{u-1} \\ & + B_m (u+2) \rho^{u+1}] \sin u\theta + \sum_{j=1}^{\infty} \Theta_j(\theta) \left[ \frac{\nu}{\rho} J_\nu(\lambda_j \rho) - \lambda_j J_{\nu+1}(\lambda_j \rho) \right] + 2I\rho\theta + 2J\rho \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \theta}(\rho, \theta) = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u W_{mn} J_u(\lambda_{un}\rho) \cos u\theta + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \rho^u + B_m \rho^{u+2}) u \cos u\theta \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} \Theta_j'(\theta) J_v(\lambda_j \rho) + I \rho^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\text{其中 } \Theta_j'(\theta) = C_j \frac{3\theta^2 - 6\theta_0\theta + 2\theta_0^2}{6\theta_0^3} + D_j \frac{\theta_0 - 2\theta}{2\theta_0^2} - \frac{E_j}{\theta_0} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} M_r(\rho, \theta) = & -\frac{D}{a^2} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \mu \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ = & -\frac{D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left[ \frac{(1-\mu)(u^2-u)}{\rho^2} J_u(\lambda_{un}\rho) - \lambda_{un}^2 J_u(\lambda_{un}\rho) \right. \\ & \left. + (1-\mu) \frac{\lambda_{un}}{\rho} J_{u+1}(\lambda_{un}\rho) \right] \sin u\theta \\ & - \frac{D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \{ A_m (1-\mu)(u^2-u) \rho^{u-2} + B_m [(1-\mu)u^2 + (3+\mu)u + 2(1+\mu)] \rho^u \} \sin u\theta \\ & - \frac{D}{a^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \Theta_j(\theta) \left[ \frac{v^2 - (1-\mu)v}{\rho^2} J_v(\lambda_j \rho) - \lambda_j^2 J_v(\lambda_j \rho) + (1-\mu) \frac{\lambda_j}{\rho} J_{v+1}(\lambda_j \rho) \right] \right. \\ & \left. + \Theta_j''(\theta) \frac{\mu}{\rho^2} J_v(\lambda_j \rho) \right\} - \frac{D}{a^2} 2(1+\mu)(I\theta + J) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} M_\theta(\rho, \theta) = & -\frac{D}{a^2} \left[ \mu \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right] \\ = & -\frac{D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \left[ \frac{(\mu-1)(u^2-u)}{\rho^2} J_u(\lambda_{un}\rho) - \mu \lambda_{un}^2 J_u(\lambda_{un}\rho) \right. \\ & \left. + \frac{\mu-1}{\rho} \lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un}\rho) \right] \sin u\theta \\ & - \frac{D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_m (\mu-1)(u^2-u) \rho^{u-2} + B_m [(\mu-1)u^2 + (1+3\mu)u + 2(1+\mu)] \rho^u \right\} \sin u\theta \\ & - \frac{D}{a^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \Theta_j(\theta) \left[ \frac{\mu v^2 + (1-\mu)v}{\rho^2} J_v(\lambda_j \rho) - \mu \lambda_j^2 J_v(\lambda_j \rho) + \frac{\mu-1}{\rho} \lambda_j J_{v+1}(\lambda_j \rho) \right] \right. \\ & \left. + \Theta_j''(\theta) \frac{J_v(\lambda_j \rho)}{\rho^2} \right\} - \frac{2D}{a^2} (1+\mu)(I\theta + J) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\text{其中 } \Theta_j''(\theta) = C_j \frac{\theta - \theta_0}{\theta_0^3} - \frac{D_j}{\theta_0^2} \quad (3.17)$$



把求得的转角、弯矩、扭矩和剪力的式子分别代入圆边的两个边界条件，两个直边的4个边界条件，三个角点条件，采用级数展开比较系数法，可以得到相应的6个无穷线性代数方程组和三个角点条件的方程。把这些方程与(3.7)式联立求解，取适当的 $m, n, j$ ，就可以求得相应数量的7组待定常数 $W_{mn}, A_m, B_m, C_j, D_j, E_j, F_j$ 和3个角点常数 $I, J, K$ ，从而得到所需要的解答。只要我们取的 $m, n, j$ 足够多，就可使解答趋于真解。

**例2** 扇形角 $\theta_0 = \pi/k$ ，边长为 $a$ ，周边固定的扇形板，受均布荷载 $q_0$ 作用。

在参考文献中，有不少篇涉及到周边固定的扇形板。然而，除了使用近似法（如文献[8]、[13]）或半解析法（如文献[14]、[15]、[16]）的论文适用范围较广之外，使用级数解法的论文[6]、[7]、[9]、[10]、[11]都是只适用于直边固定的扇形板。文献[12]在求解边界弯矩时必须用近似法求解两个积分方程，所以也不能得到解析解。我们在此使用的解法适用性要比较广一些，而且是解析形式的解。

由于载荷和边界条件对于中线 $\theta = \theta_0/2$ 是对称的，根据级数展开理论可知：

$$W_{mn} = A_m = B_m = 0 \quad (m=2, 4, 6, \dots) \quad (3.18)$$

$$C_j = E_j = 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (3.19)$$

由角点位移为零的条件可知：

$$I = J = K = 0 \quad (3.20)$$

由圆边位移为零的边界条件得到：

$$B_m = -A_m \quad (m=1, 3, 5, \dots) \quad (3.21)$$

由直边位移为零的边界条件得到：

$$F_j = 0 \quad (j=1, 2, 3, \dots) \quad (3.22)$$

考虑到问题的对称性，把以上各式代入微分方程，即(3.7)式，并代入转角为零的边界条件，然后展开及对比方程两边的系数，即得到下列无穷线性代数方程组，

$$\begin{cases} \frac{m\pi}{8} \lambda_{un}^4 J_{u+1}^2(\lambda_{un}) W_{mn} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{I_K^{mnj}}{m^2 \pi^2} - \frac{I_S^{mnj}}{\theta_0^2} \right) D_j = I_{mn} \frac{q_0 a^4}{D} & (m=1, 3, 5, \dots; \\ & n=1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un}) + 2A_m + 4 \sum_{j=1}^{\infty} D_j \frac{\lambda_j J_{v+1}(\lambda_j)}{m^3 \pi^3} = 0 & (m=1, 3, 5, \dots) \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} u I_a^{mnj} + \sum_{m=1,3}^{\infty} A_m u I_\beta^{mj} + \frac{D_j}{4\theta_0} J_{v+1}^2(\lambda_j) = 0 & (j=1, 2, 3, \dots) \end{cases} \quad (3.25)$$

上面(3.23)式是由微分方程，即(3.7)式得到的；(3.24)式是由圆边边界条件及(3.12)式得到的；(3.25)式是由直边边界条件及(3.13)式得到的，其中各项是按 $J_v(\lambda_j \rho)$ 的级数展开的，这里：

$$I_a^{mnj} = \int_0^1 J_u(\lambda_{un} \rho) J_v(\lambda_j \rho) \rho d\rho \quad (3.26)$$

$$I_\beta^{mj} = \int_0^1 (1-\rho^2) \rho^{u+1} J_v(\lambda_j \rho) d\rho \quad (3.27)$$

对于(3.23)、(3.24)、(3.25)式组成的无穷线性代数方程组，只要取足够多的 $m, n, j$ ，形成一个有限阶的线性代数方程组，从中解出 $W_{mn}, A_m, D_j$ ，连同(3.18)至(3.22)各式，就可以得到足够精确的解答。作为例子，表2中列出了 $\theta_0 = \pi$ 的固定半圆板受均布荷载 $q_0$ 作用时在

$\rho=0.486$ ,  $\theta=90^\circ$ 处所产生的最大挠度值。从表中看到, 当取  $m, n, j$  的数量逐渐增多时, 求得的挠度值也逐渐趋于正确解。当取  $\nu=2$ ,  $m=n=j=15$  时, 计算结果与有关文献的结果已经吻合得很好了。

表2 固定半圆板在均布荷载下在  $\rho=0.486, \theta=90^\circ$  处的最大挠度 (取  $\nu=2$ )

$m, n, j$	$W(q_0 a^4/D)$
9	0.00197959
11	0.00200178
15	0.00200884
参考文献[9]	0.002023
参考文献[7]	0.002021

用上述方法, 我们计算了  $\theta_0=90^\circ, 60^\circ$  时的固定扇形板在均布荷载下产生的挠度  $W$ , 弯矩  $M_r, M_\theta$  在中心线  $\theta=\theta_0/2$  上各点的值, 和在边界  $\theta=0^\circ$  和  $\theta=\theta_0$  上各点的边界弯矩  $M_\theta$  的值。计算结果示于图4~图7中。图中的分布曲线是在取  $\nu=2, m=n=j=9$  时得到的, 这些分布曲线与文献[9]的结果已符合得很好。

#### 四、径向边界简支的扇形板的自由振动

本文的方法不仅适用于扇形板的弯曲问题, 而且可以应用于扇形板的稳定、振动问题及弹性地基上的扇形板问题。我们仅以径向边界简支的扇形板的自由振动问题为例来说明。

薄板自由振动的振型函数应满足如下微分方程:

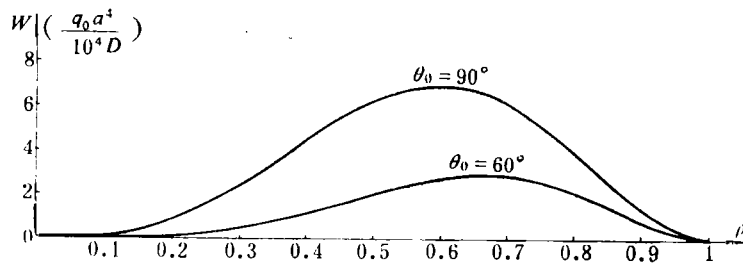


图4 固定扇形板在均布荷载下的中线挠度  $W$  的分布

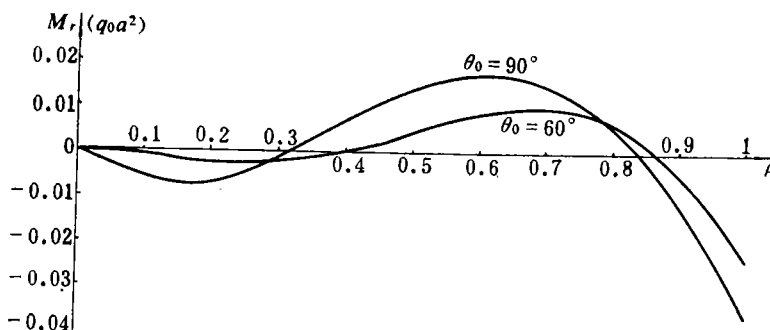
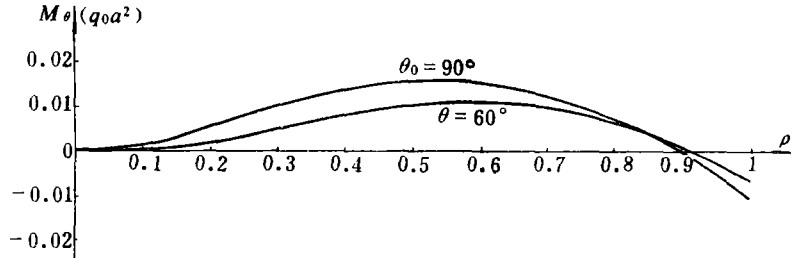
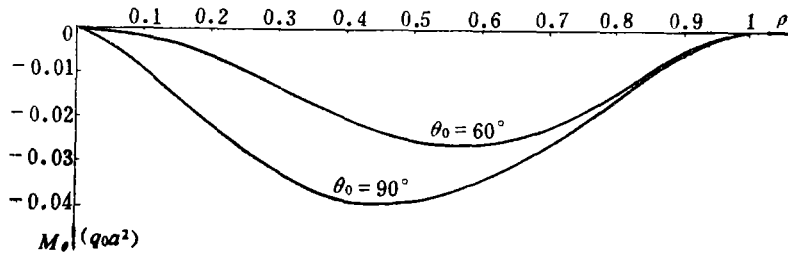


图5 固定扇形板在均布荷载下的中线上的弯矩  $M_r$  的分布

图6 固定扇形板在均布荷载下中线上的弯矩 $M_\theta$ 的分布图7 固定扇形板在均布荷载下沿直边的弯矩 $M_\theta$ 的分布

$$\nabla^2 \nabla^2 W - \gamma^4 W = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{式中} \quad \gamma^4 = \frac{\omega^2 \bar{m} a^4}{D} \quad (4.2)$$

这里 $\omega$ 为板的自振频率，其值待定； $\bar{m}$ 为薄板单位面积的质量，设其值为常量。

若求出(4.1)式满足边界条件的非零解，就可以得到 $\gamma$ 必须满足的自振频率方程。对于径向边界简支、圆边任意的扇形板，挠度函数 $W$ 仍然设成(2.8)式。为了便于代入(4.1)式，可先把 $\rho^u$ 和 $\rho^{u+2}$ 展成 $u$ 阶富里哀—贝塞尔级数：

$$\rho^u = \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} J_u(\lambda_{un} \rho) \quad (4.3)$$

$$\rho^{u+2} = \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} J_u(\lambda_{un} \rho) \quad (4.4)$$

其中系数可以通过有关公式和分部积分得到：

$$C_{mn} = \frac{2}{\lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un})} \quad (4.5)$$

$$D_{mn} = \frac{2}{\lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un})} \left[ 1 - \frac{4(u+1)}{\lambda_{un}^2} \right] \quad (4.6)$$

把(2.8)式代入(4.1)式，并注意到(4.3)、(4.4)式，进行运算并对比方程两边系数，得到：

$$W_{mn} = \frac{\gamma^4}{\lambda_{un}^4 - \gamma^4} (A_m C_{mn} + B_m D_{mn}) \quad (m=1, 2, 3, \dots; n=1, 2, 3, \dots) \quad (4.7)$$

边界条件仍为(2.2)至(2.7)各式，与(2.8)式相应的转角、弯矩和剪力的公式仍是(2.9)至(2.12)各式。可见直边边界条件已经自然满足。只要再根据圆边的两个边界条件，就可以

得到确定  $A_m, B_m$  的两组无穷线性代数方程组。若要  $W_{mn}, A_m, B_m$  不全为零, 就会得到确定  $\gamma$  的频率方程, 再代入(4.7)和(2.8)式, 就得到相应的振型。

**例 3** 直边简支、圆边固定的扇形板, 具有扇形角  $\theta_0 = \pi/k$  (其中  $k \geq 1$  的实数), 半径为  $a$ 。

由边界条件  $W(1, \theta) = 0$  得到:

$$B_m = -A_m \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (4.8)$$

由边界条件  $\frac{\partial W}{\partial \rho}(1, \theta) = 0$ , 并代入(4.7)和(4.8)、(4.5)、(4.6), 可以得到:

$$A_m \left[ 1 + 4(u+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^4}{\lambda_{un}^2 (\lambda_{un}^4 - \gamma^4)} \right] = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (4.9)$$

式中  $u = km$ 。若有非零解  $A_m \neq 0$ , 则必有下式成立:

$$1 + 4(u+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^4}{\lambda_{un}^2 (\lambda_{un}^4 - \gamma^4)} = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (4.10)$$

此即为确定自振频率  $\gamma$  的特征方程。可以证明<sup>[19]</sup>:

$$X_b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^4}{\lambda_{un}^2 (\lambda_{un}^4 - \gamma^4)} = -\frac{1}{4(u+1)} + \frac{1}{4\gamma} \left[ \frac{I_{u+1}(\gamma)}{I_u(\gamma)} + \frac{J_{u+1}(\gamma)}{J_u(\gamma)} \right] \quad (4.11)$$

式中  $I_u(\gamma), J_{u+1}(\gamma)$  分别表示  $u$  阶,  $u+1$  阶虚宗量的贝塞尔函数。因此, 频率方程可整理成:

$$\frac{I_{u+1}(\gamma)}{I_u(\gamma)} + \frac{J_{u+1}(\gamma)}{J_u(\gamma)} = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (4.12)$$

当  $u = km$  为整数时, 上式与文献[18]中周边固定的圆板的频率方程完全相同, 而当  $u$  为非整数时, 上式就把文献[18]的结果推广到具有任意扇形角  $\theta_0 = \pi/k$  ( $k \geq 1$  的任意实数) 的扇形板。

由(4.12)式求出一系列  $\gamma_{mi}$  后, 由(4.7)、(4.8)和(2.8)式就可以求得与之对应的振型  $\bar{W}_{mi}$ :

$$\bar{W}_{mi} = A_m \left[ 8(u+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_{mi}^4 J_u(\lambda_{un} \rho)}{(\lambda_{un}^4 - \gamma_{mi}^4) \lambda_{un}^2 J_{u+1}(\lambda_{un})} + (1 - \rho^2) \rho^u \right] \sin u\theta \quad (m=1, 2, 3, \dots; l=1, 2, 3, \dots) \quad (4.13)$$

对于  $\theta_0 = 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ, 105^\circ, 120^\circ$  的直边简支、圆边固定的扇形板, 利用(4.12)式求得的自振频率  $\gamma_{mi}$  和利用(4.13)式求得的环向节线半径  $\rho_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 的计算结果列在表3中。表中  $u$  为整数时的结果与文献[18]的相应数值结果几乎完全相同, 而其它结果在文献[18]中是没有的。

为了说明振型的特点, 在图8中我们画出了  $\theta_0 = 90^\circ$  的直边简支、圆边固定的扇形板自由振动时对应于  $m=1 \sim 4, l=1 \sim 4$  的16个振型的节线分布图。其中,  $m=1, 3, 5, \dots$  所对应的振型是关于中线  $\theta = \theta_0/2$  对称的,  $m=2, 4, 6, \dots$  所对应的振型是关于中线  $\theta = \theta_0/2$  反对称的。

**例 4** 周边简支的扇形板, 扇形角  $\theta_0 = \pi/k$  ( $k \geq 1$  的实数), 半径为  $a$ 。

注意到圆边简支的边界条件和(2.10)式, 使用与例3相同的方法, 可以得到频率方程:

表3 直边简支、圆边固定的扇形板自由振动的频率 $\gamma_{mi}$ 和环向节线半径 $\rho_i$ 

扇形角 $\theta_0$	$m$	自振频率 $\gamma_{mi}$				环向节线半径 $\rho_i$					
		1	2	3	4	2	3		4		
60°	1	7.14353	10.53666	13.79506	17.00529	0.60472	0.46251	0.70678	0.37518	0.57402	0.76465
	2	10.68702	14.35515	17.77643	21.09712	0.69180	0.55895	0.76400	0.47097	0.64414	0.80552
	3	14.09809	18.00009	21.57368	25.00520	0.74171	0.61900	0.79890	0.53406	0.68951	0.83181
	4	17.43732	21.54358	25.25668	28.79371	0.77498	0.66113	0.82296	0.57992	0.72203	0.85050
75°	1	6.40601	9.73847	12.96462	16.15457	0.57806	0.43496	0.69025	0.34905	0.55469	0.75339
	2	9.29146	12.85523	16.21210	19.48782	0.66356	0.52656	0.74493	0.43804	0.62018	0.79158
	3	12.06262	15.82852	19.31229	22.67780	0.71457	0.58589	0.77974	0.49894	0.66435	0.81725
	4	14.77060	18.71552	22.31799	25.77110	0.74936	0.62854	0.80437	0.54433	0.69683	0.83602
90°	1	5.90567	9.19688	12.40222	15.57949	0.55729	0.41412	0.67771	0.32964	0.54030	0.74501
	2	8.34660	11.83671	15.14987	18.39595	0.64049	0.50090	0.72970	0.41249	0.60149	0.78068
	3	10.68702	14.35515	17.77643	21.09712	0.69180	0.55895	0.76400	0.47097	0.64414	0.80552
	4	12.97090	16.79874	20.32302	23.71808	0.72751	0.60154	0.78881	0.51543	0.67619	0.82411
105°	1	5.54304	8.80457	11.99560	15.16438	0.54061	0.39773	0.66785	0.31459	0.52915	0.73853
	2	7.66261	11.09798	14.37978	17.60514	0.62117	0.47996	0.71722	0.39201	0.58643	0.77189
	3	9.69258	13.28689	16.66233	19.95088	0.67232	0.53648	0.75079	0.44804	0.62748	0.79583
	4	11.67133	15.40991	18.87605	22.22879	0.70852	0.57866	0.77553	0.49138	0.65890	0.81409
120°	1	5.26765	8.50694	11.68767	14.85049	0.52687	0.38449	0.65988	0.30257	0.52023	0.73337
	2	7.14353	10.53666	13.79506	17.00529	0.60472	0.46251	0.70678	0.37518	0.57402	0.76465
	3	8.93869	12.47524	15.81576	19.08032	0.65538	0.51737	0.73949	0.42884	0.61346	0.78766
	4	10.68702	14.35515	17.77643	21.09712	0.69180	0.55895	0.76400	0.47097	0.64414	0.80552

$$\frac{I_{u+1}(\gamma)}{I_u(\gamma)} + \frac{J_{u+1}(\gamma)}{J_u(\gamma)} - \frac{2\gamma}{1-\mu} = 0 \quad (m=1,2,3,\dots) \quad (4.14)$$

当 $u=km$ 为整数时, 上式与文献[18]中周边简支的圆板的频率方程完全相同, 而当 $u$ 非整数时, 上式就把文献[18]的圆板的结果推广到任意夹角 $\theta_0=\pi/k$ ( $k \geq 1$ 的实数)的扇形板。

求出 $\gamma_{mi}$ 后, 相应的各个振型仍旧可以用(4.13)式得到。表4中列出了自振频率和环向节线半径 $\rho_i$ 的计算结果。表中 $\theta_0=90^\circ$ 且 $m=1$ 的结果与文献[18]中相应的圆板结果几乎完全相同, 而其余的结果文献[18]中是没有的。

**例5** 直边简支、圆边自由的扇形板, 扇形角 $\theta_0=\pi/k$  ( $k \geq 1$ 的实数), 半径为 $a$ 。

注意到圆边自由的边界条件和(2.10)、(2.11), 可以得到:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)A_m + (\beta_1 + \bar{\beta}_1)B_m &= 0 \quad (m=1,2,3,\dots) \\ (\alpha_2 + \bar{\alpha}_2)A_m + (\beta_2 + \bar{\beta}_2)B_m &= 0 \quad (m=1,2,3,\dots) \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

式中:  $\alpha_1 = (1-\mu)(u^2-u)$  (4.16)

$\alpha_2 = (1-\mu)u^2(u-1)$  (4.17)

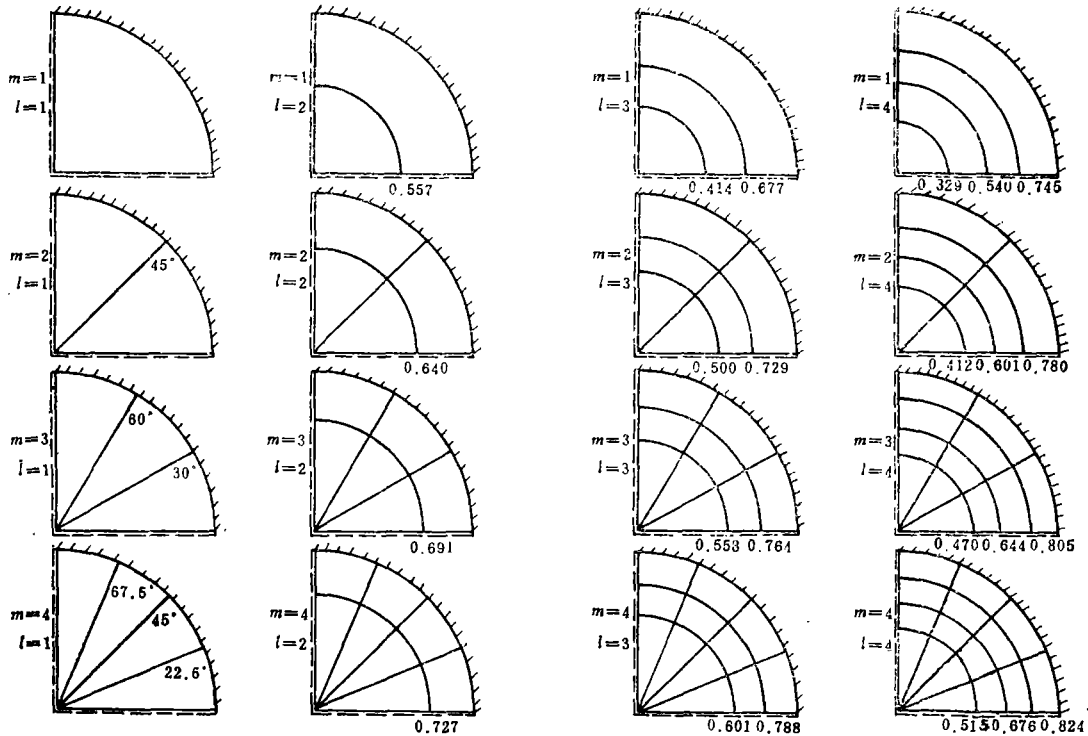


图8  $\theta_0=90^\circ$ 直边简支、圆边固定的扇形板自由振动的十六种振型的节线分布

$$\beta_1 = (1-\mu)u^2 + (3+\mu)u + 2(1+\mu) \quad (4.18)$$

$$\beta_2 = (1-\mu)u^3 - (3+\mu)u^2 - 4u \quad (4.19)$$

$$\bar{\alpha}_1 = 2(1-\mu)X_a \quad (4.20)$$

$$\bar{\alpha}_2 = -u^2\bar{\alpha}_1 - 2\gamma^4 X_o \quad (4.21)$$

$$\bar{\beta}_1 = \bar{\alpha}_1 - 8(1-\mu)(u+1)X_b \quad (4.22)$$

$$\bar{\beta}_2 = \bar{\alpha}_2 + 8(u+1)[(1-\mu)u^2 X_b + X_a] \quad (4.23)$$

其中 $X_b$ 如(4.11)式所示, 而 $X_a$ 和 $X_o$ 可以证明<sup>[10]</sup>:

$$X_a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^4}{\lambda_{u,n}^4 - \gamma^4} = -\frac{\gamma}{4} \left[ \frac{I_{u+1}(\gamma)}{I_u(\gamma)} - \frac{J_{u+1}(\gamma)}{J_u(\gamma)} \right] \quad (4.24)$$

$$X_o = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{u,n}^2}{\lambda_{u,n}^4 - \gamma^4} = \frac{1}{4\gamma} \left[ \frac{I_{u+1}(\gamma)}{I_u(\gamma)} + \frac{J_{u+1}(\gamma)}{J_u(\gamma)} \right] \quad (4.25)$$

由(4.15)可以得到频率方程为:

$$(\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)(\beta_2 + \bar{\beta}_2) - (\alpha_2 + \bar{\alpha}_2)(\beta_1 + \bar{\beta}_1) = 0 \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (4.26)$$

由频率方程求得一系列 $\gamma_{ml}$ 后, 由(4.7)、(4.15)和(2.8)式可以得到相应的振型,

$$\begin{aligned} \bar{W}_{ml} = A_m \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\gamma_{ml}^4 J_u(\lambda_{un}\rho)}{(\lambda_{u,n}^4 - \gamma_{ml}^4) \lambda_{un} J_{u+1}(\lambda_{un})} \left[ 1 - \frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{\beta_1 + \bar{\beta}_1} \left( 1 - \frac{4(u+1)}{\lambda_{u,n}^2} \right) \right] \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{\beta_1 + \bar{\beta}_1} \rho^2 \right) \rho^u \right\} \sin u\theta \quad (m=1, 2, 3, \dots; l=1, 2, 3, \dots) \quad (4.27) \end{aligned}$$

表4 周边简支的扇形板自由振动的频率 $\gamma_{mi}$ 和环向节线半径 $\rho_i$ ( $\mu=0.3$ )

扇形角 $\theta_0$	自振频率 $\gamma_{mi}$					环向节线半径 $\rho_i$						
	$m \setminus l$	1	2	3	4	2	3		4			
60°	1	6.32117	9.72362	12.98749	16.20138	19.39103	0.65625	0.49125	0.75164	0.39380	0.60247	0.80339
	2	9.89922	13.56273	16.98275	20.30323	23.57100	0.73263	0.58506	0.80021	0.48938	0.66931	0.83752
	3	13.32717	17.22041	20.78989	24.21920	27.57088	0.77550	0.64234	0.82932	0.55139	0.71188	0.85912
	4	16.67670	20.77272	24.48035	28.01404	31.44869	0.80386	0.68210	0.84925	0.59606	0.74212	0.87438
75°	1	5.57145	8.91958	12.15357	15.34835	18.52467	0.63233	0.46396	0.73736	0.36739	0.58380	0.79384
	2	8.49323	12.05589	15.41346	18.69022	21.92532	0.70812	0.55383	0.78415	0.45673	0.64664	0.82595
	3	11.28275	15.04183	18.52294	21.88729	25.18849	0.75225	0.61086	0.81337	0.51696	0.68833	0.84718
	4	14.00211	17.93785	21.53587	24.98648	28.35492	0.78203	0.65137	0.83387	0.56141	0.71870	0.86257
90°	1	5.06095	8.37359	11.58869	14.77168	17.93992	0.61348	0.44315	0.72643	0.34766	0.56981	0.78669
	2	7.53933	11.03187	14.34751	17.59566	20.80982	0.68792	0.52889	0.77124	0.43126	0.62883	0.81686
	3	9.89922	13.56273	16.98275	20.30323	23.57100	0.73263	0.58506	0.80021	0.48938	0.66931	0.83752
	4	12.19536	16.01537	19.53626	22.92965	26.25329	0.76335	0.62576	0.82094	0.53315	0.69943	0.85282
105°	1	4.68968	7.97785	11.18021	14.35541	17.51838	0.59819	0.42670	0.71779	0.33232	0.55893	0.78114
	2	6.84737	10.28866	13.57452	16.80281	20.00268	0.67088	0.50842	0.76060	0.41074	0.61441	0.80949
	3	8.89765	12.48967	15.86518	19.15437	22.39869	0.71574	0.56342	0.78909	0.46667	0.65356	0.82949
	4	10.88939	14.62169	18.08561	21.43735	24.72896	0.74705	0.60395	0.80986	0.50952	0.68321	0.84458
120°	1	4.40683	7.67747	10.87085	14.04063	17.19998	0.58550	0.41333	0.71076	0.32002	0.55020	0.77668
	2	6.32117	9.72362	12.98749	16.20138	19.39103	0.65625	0.49125	0.75164	0.39380	0.60247	0.80339
	3	8.13731	11.67393	15.01577	18.28172	21.50887	0.70098	0.54492	0.77955	0.44758	0.64024	0.82269
	4	9.89922	13.56273	16.98275	20.30323	23.57100	0.73263	0.58506	0.80021	0.48938	0.66931	0.83752

在表5中列出了自振频率 $\gamma_{mi}$ 和环向节线半径 $\rho_i$ 的计算结果。表中 $u$ 为整数时的部分结果与文献[18]的相应结果符合得很好,当 $u$ 不是整数时的其余结果是文献[18]所不能计算的。

把表3,表4,表5的结果相比较,可以看到,在 $\theta_0$ 和下标 $m, l$ 相同时,随着圆边约束的逐步减弱,扇形板的自振频率减小而环向节线半径增大,这是显然合理的。

## 五、结 束 语

我们应用统一的位移模式,即加补充项的双重富里哀—贝塞尔级数,对于各种角度、各种边界条件的扇形板的弯曲和振动问题,提出了一种应用范围比较广的、便于计算的、解析形式的解法。实际上,这种方法只要略加改变就可以应用于环形、环扇形板(参阅文献[19])。在其它文献中,我们还未曾见到有任何一种便于计算的解析方法能应用到这样广的范围。作为算例,我们求解了五个例题,得到了满意的结果,其中有些解是在其它文献中未曾找到过的。

表5 直边简支、圆边自由的扇形板自振动的频率 $\gamma_{mi}$ 和环向节线半径 $\rho_i$  ( $\mu=0.3$ )

扇形角 $\theta_0$	自振频率 $\gamma_{mi}$					环向节线半径 $\rho_i$						
	$m$	1	2	3	4	5	2	3	4			
60°	1	3.52689	7.28064	10.58040	13.80912	17.00699	0.84617	0.60383	0.89920	0.46200	0.70768	0.92403
	2	6.88316	11.07111	14.55296	17.89689	21.17703	0.88317	0.68305	0.91980	0.55518	0.75971	0.93757
	3	10.10487	14.66651	18.32837	21.79277	25.16262	0.90213	0.72874	0.93130	0.61277	0.79138	0.94564
	4	13.27120	18.15398	21.98322	25.56438	29.02369	0.91430	0.75964	0.93896	0.65316	0.81338	0.95119
75°	1	2.81239	6.48194	9.74896	12.95765	16.14175	0.83323	0.57945	0.89268	0.43513	0.69250	0.92000
	2	5.56632	9.58658	12.99432	16.29049	19.53601	0.87187	0.65735	0.91320	0.52402	0.74242	0.93306
	3	8.18118	12.52601	16.08115	19.47342	22.78918	0.89197	0.70382	0.92502	0.58105	0.77392	0.94117
	4	10.74148	15.37103	19.06743	22.55559	25.94346	0.90496	0.73584	0.93300	0.62189	0.79629	0.94686
90°	1	2.31480	5.93802	9.18510	12.38167	15.55751	0.82241	0.56036	0.88752	0.41474	0.68090	0.91694
	2	4.67281	8.57569	11.93444	15.19968	18.42315	0.86219	0.63639	0.90776	0.49922	0.72860	0.92947
	3	6.88316	11.07111	14.55296	17.89689	21.17703	0.88319	0.68304	0.91977	0.55520	0.75968	0.93752
	4	9.03904	13.48280	17.08591	20.51036	23.85013	0.89685	0.71568	0.92799	0.59604	0.78215	0.94327
105°	1	1.94010	5.54283	8.77700	11.96569	15.13620	0.81316	0.54494	0.88334	0.39866	0.67173	0.91452
	2	4.02313	7.84056	11.16513	14.40911	17.61762	0.85371	0.61883	0.90316	0.47894	0.71724	0.92650
	3	5.94498	10.01425	13.44317	16.75286	20.00812	0.87544	0.66530	0.91524	0.53358	0.74772	0.93443
	4	7.81185	12.11292	16.64727	19.02571	22.33123	0.88966	0.69829	0.92363	0.57412	0.77011	0.94020
120°	1	1.63922	5.24229	8.46770	11.65100	14.81789	0.80512	0.53219	0.87986	0.38563	0.66429	0.91255
	2	3.52689	7.28064	10.58040	13.80912	17.00699	0.84618	0.60383	0.89919	0.46199	0.70770	0.92400
	3	5.23306	9.20975	12.59902	15.88347	19.12060	0.86849	0.64992	0.91128	0.51515	0.73749	0.93178
	4	6.88316	11.07111	14.55296	17.89689	21.17703	0.88319	0.68304	0.91977	0.55520	0.75968	0.93752



## 参 考 文 献

- [1] Г. П. 托尔斯托夫,《福里哀级数》,龙季和译,高等教育出版社(1957).
- [2] 严宗达,《富氏级数在结构力学中的应用》,天津大学固体力学研究生讲义(1982).
- [3] S. 铁摩辛柯, S. 沃诺斯基,《板壳理论》,科学出版社(1977).
- [4] 徐芝纶,《弹性力学》(下册),人民教育出版社(1979).
- [5] Deverall, L. I. and C. J. Thorne, Bending of thin ring-sector plates, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **18** (1951), 359—363.
- [6] Conway, H. D. and M. K. Huang, The bending of uniformly loaded sectorial plates with clamped edges, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **19** (1952), 5—8.
- [7] Woinowsky-Krieger, S., Clamped semicircular plate under uniform bending load, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **22**, 1 (1955), 129.
- [8] Ben-Amoz, M., Note on deflections and flexure vibrations of clamped sectorial plates, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **26** (1959), 136—137.
- [9] Morley, L. S. D., Variational of the clamped plate to two successive membrane problems with an application to uniformly loaded sectors, *Quart. Jour. Mech. and Appl. Maths.*, **16** (1963), 451—471.
- [10] Ramachandra Rao, B. S. and J. K. Sridhara, A bi-orthogonality relation for clamped sector plates, *Journal of Engineering Mathematics*, **4**, 4, Oct. (1970), 361—367.
- [11] Ramachandra Rao, B. S. and V. Kolathaya, Bending of a uniformly loaded clamped sector plate, *Appl. Sci. Res.*, **26**, 5 (1972), 383—388.
- [12] Zerych, Stefan, Application of Fourier-Bessel double series to analysis of circular and sector plates, *Archiwum Inzynierii Ladowej*, **18**, 1 (1972), 3—21.
- [13] Rubin, C., Bending of ring and pie-shaped sectors, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **E42**, 2 (1975), 492—494.
- [14] Bhattacharya, A. P., Bending of sectorial plate having clamped straight edge, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **42**, 1 (1975), 229—230.
- [15] Bhattacharya, A. P. and K. N. Bhowmic, Note on the bending of an annular sector plate resting on an elastic foundation, *J. Struct. Mech.*, **4**, 3 (1976), 321—325.
- [16] Mukhopadhyay, Madhyjit, A semianalytic solution for radially supported curved plates in bending, *Forsch. Ing.-Wes.*, **44**, 6 (1978), 187—196.
- [17] Williams, M. L., Jr., Surface stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending, *Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics* (1951), 325—329.
- [18] Гонткевич В. С., *Собственные Колебания Пластин и Оболочек* (1964).
- [19] 钱民刚, 用富里哀—贝塞尔级数解扇形、环扇形板, 天津大学80级研究生毕业论文(1982).

## Solution of Sector Plate by Fourier-Bessel Series

Qian Min-gang

*(Systems Engineering Institute, Beijing)*

Yan Zong-da

*(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin)*

### Abstract

In this paper a solution of deflection in the form of Fourier-Bessel double series with supplementary terms is proposed to analyse bending and vibration problems of thin elastic sector plate with various edge conditions. This solution is suitable to a wider range, convenient for calculation and it is in an analytical form. As computational examples, the distribution curves of deflection and bending moment of plates with various sector angles simply supported or clamped along the radial edges under uniform or concentrated load are obtained and the results are compared with the numerical results of related references. Thus the range of application of the Fourier series method with supplementary terms is extended. Frequencies and nodal lines in free vibration of plates with various sector angles simply supported along the radial edges are also given in this paper.