应用数学和力学，第6卷第4期（1985年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于McClintock和Irwin修正*

汪懋骅

（北京航空学院，1984年3月5日收到）

摘　要

在准脆断情形中，裂纹尖端存在一个微小塑性区．这一塑性区虽然微小，但其影响又不能忽略，因此需要对原有的线弹性渐近场进行校正．F.A.McClintock 和 G.R.Irwin[1] 于1965年提出了一个修正理论，并被广泛引用至今．本文指出这一修正结果是错误的，并给出了正确的修正结果．

一、McClintock和Irwin的修正结果

如图1所示，文献[1]中有 $R=2r_y$ 及

$$\begin{cases}\bar{K}_1=\sigma\sqrt{\pi\bar{a}} & (1.2)^{[1]}\\ r_y=\dfrac{K_1^2}{2\pi\sigma_s} & (1.8)^{[1]}\end{cases}$$

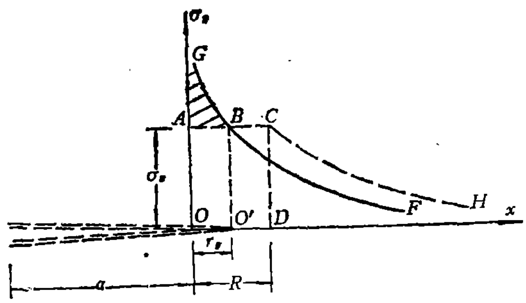

图 1

其中 σ_s 为屈服应力；$\bar{a}=a+r_y$

将式$(1.2)^{[1]}$代入$(1.8)^{[1]}$可得

$$r_y=\frac{a}{2m^2-1}\qquad(1.15)^{[1]}$$

其中　　$m=\sigma_s/\sigma$

将$(1.15)^{[1]}$代入$(1.2)^{[1]}$即可算出修正后的应力强度因子$\bar{K}_1$。

迄今为止大量文献引用了这一修正结果，并误认为用下述迭代法可求出更精确的 $\bar{K}_1$，即

(1) 先将a代入 $K_1=\sigma\sqrt{\pi a}$，计算出的 K_1 作为 $K_1^{(0)}$；

(2) 将$K_1^{(0)}$代入$(1.8)^{[1]}$计算出r_y，作为 $r_y^{(0)}$；

(3) 将$a+r_y^{(0)}$代入式$(1.2)^{[1]}$计算出$\bar{K}_1$作为 $K_1^{(1)}$；

(4) 将$K_1^{(1)}$代入$(1.8)^{[1]}$求出 r_y作为$r_y^{(1)}$；

(5) 反复计算直到$K_1^{(n-1)}$和$K_1^{(n)}$之差满足一定要求为止。

* 钱伟长推荐．

二、正确的修正结果

对于线弹性Ⅰ型渐近场有熟知结果

$$\sigma_x=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right],\qquad \sigma_y=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\tau_{xy}=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},\qquad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0$$

$$\sigma_z=\nu(\sigma_x+\sigma_y)\quad（平面应变）,\qquad \sigma_z=0\quad（平面应力）$$

其中 $K_1=\sigma\sqrt{\pi a}$；ν为泊松比。

因此在 $\theta=0$的裂纹面上有

$$\sigma_1=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}},\quad \sigma_2=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}},\quad \sigma_3=0\qquad（平面应力）\tag{2.1}$$

和

$$\sigma_1=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}},\quad \sigma_2=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}},\quad \sigma_3=\nu(\sigma_1+\sigma_2)\qquad（平面应变）\tag{2.2}$$

von Mises 准则为

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2\sigma_s^2\tag{2.3}$$

由式(2.1)和(2.3) 可知，当屈服时有

$$\sigma_{1s}=\sigma_s\tag{2.4}$$

由式(2.2)和(2.3)可知，当屈服时有

$$\sigma_{1s}=\frac{\sigma_s}{(1-2\nu)}\tag{2.5}$$

在 $\theta=0$ 的裂纹面上，$\sigma_y=\sigma_1$于是有

$$\begin{cases}\sigma_{ys}=\sigma_{1s}=\sigma_s & （平面应力）\\ \sigma_{ys}=\sigma_{1s}=\sigma_s/(1-2\nu) & （平面应变）\end{cases}\tag{2.6}$$

(1) 平面应力

由式(2.1)和(2.6)知

$$\sigma_s=\sigma_{1s}=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r_s}}$$

亦即

$$r_s=\frac{K_1^2}{2\pi\sigma_s^2}=\frac{a}{2m^2}\tag{2.7}$$

据应力松弛平衡应有（见图2）

$$R\sigma_{ys}=\int_0^{r_s}(\sigma_y)_{\theta=0}dr$$

考虑到式(2.1)和(2.6)，上式成为

$$R\sigma_s=\int_0^{r_s}\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}dr$$

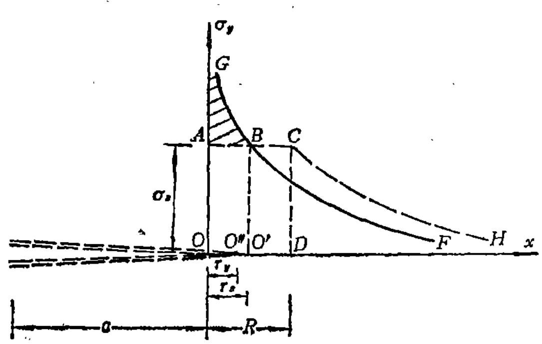

图 2

再考虑到式(2.7)可得

$$R=\frac{1}{\pi}\left(\frac{K_1}{\sigma_s}\right)^2=\frac{a}{m^2}=2r_s \tag{2.8}$$

等效裂纹长为$\bar{a}=a+r_y$，因此有

$$\bar{K}_1=\sigma\sqrt{\pi(a+r_y)} \tag{2.9}$$

以新的裂纹尖端O''为坐标原点时有

$$\bar{\sigma}_y=\frac{\bar{K}_1}{\sqrt{2\pi\bar{r}}} \tag{2.10}$$

要保证应力松弛平衡，即曲线$\widehat{ABCH}$形状，考虑到式(2.6)和(2.10)可得

$$\sigma_s=\frac{\bar{K}_1}{\sqrt{2\pi(R-r_y)}} \tag{2.11}$$

考虑到式(2.8)，(2.9)和(2.11)可得

$$r_y=\frac{a}{2m^2+1} \tag{2.12}$$

(2) 平面应变

由式(2.2)和(2.6)得

$$\frac{\sigma_s}{(1-2\nu)}=\sigma_{1s}=\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r_s}}$$

亦即

$$r_s=\frac{K_1^2}{2\pi\sigma_s^2}(1-2\nu)^2=\frac{a}{2m^2}(1-2\nu)^2 \tag{2.13}$$

据应力松弛平衡有

$$R\sigma_{ys}=\int_0^{r_s}(\sigma_y)_{\theta=0}dr$$

考虑到式(2.2)和(2.6)上式成为

$$R\frac{\sigma_s}{(1-2\nu)}=\int_0^{r_s}\frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}}dr$$

再考虑到式(2.7)可得

$$R=\frac{K_1^2}{\pi\sigma_s^2}(1-2\nu)^2=\frac{a}{m^2}(1-2\nu)^2=2r_s \tag{2.14}$$

要保证应力松弛平衡，即曲线$\widehat{ABCH}$形状，考虑到式(2.6)和(2.10)有

$$\frac{\sigma_s}{(1-2\nu)}=\frac{\bar{K}_1}{\sqrt{2\pi(R-r_y)}} \tag{2.15}$$

由式(2.9)，(2.14)和(2.15)可得

$$r_y=\frac{a}{\left[\frac{2m^2}{(1-2\nu)^2}+1\right]} \tag{2.16}$$

式(2.12)和(2.16)就是对原裂纹半长的修正值．将r_y代入式(2.9) 即可求得修正后的应力强度因子$\bar{K}_1$．

对于纯Ⅲ型，只需作如下代换

$$\sigma\to\tau_\theta,\quad \sigma_s\to\tau_s,\quad K_1\to K_3 \tag{2.17}$$

即可求出相应的 r_y和$\bar{K}_3$。

三、结　论

以平面应力为例加以讨论。

(1) McClintock 和 Irwin 的修正结果(1.15)[1]是错误的，因为

(a) 将图2中的r_s作为图1中的r_y，从而得出自相矛盾的结果，即一方面从应力松弛平衡有

$$R=2r_s=2r_y=\frac{a}{m^2}$$

另一方面导出的最后结果为式(1.15)[1]。

事实上要保证应力松弛平衡就必须有$r_s\neq r_y$，否则，由于裂纹半长为a时，据式(2.7)有$r_s=a/2m^2$，当裂纹半长为$\bar{a}=a+r_y$时，则有

$$\bar{r}_s=\frac{\bar{a}}{2m^2}=\frac{a}{2m^2}+\frac{r_y}{2m^2}$$

而此时可知

$$r_y+\bar{r}_s=r_s+\bar{r}_s=\frac{a}{m^2}+\frac{r_y}{2m^2}=R+\frac{r_y}{2m^2}$$

这就是说图1中的 C 点还将向右平移$r_y/2m^2$。因此$R=2r_s$的条件被破坏了。

为了保证 $R=2r_s$，则必有$r_y<r_s$，即图2中所示等效裂纹的顶点应是O''而不是O'。

(b) 将式(1.2)[1]中的$\bar{K}_1$和式(1.8)[1]中的K_1等同以求r_y，实质上是把$\bar{r}_s$作为r_y，这将使图1中C点进一步向右平移一段，即有

$$AC=2\bar{r}_s=\frac{a}{m^2}+\frac{r_y}{m^2}=R+\frac{r_y}{m^2}$$

(2) 本文给出的结果保证了应力松弛平衡。

由式(2.7)可知

$$\bar{r}_s=\frac{a+r_y}{2m^2}$$

据上式，(2.8) 和 (2.12) 可得

$$r_y+\bar{r}_s=\frac{a+(2m^2+1)r_y}{2m^2}=\frac{a}{m^2}=2r_s=R$$

(3) 迭代法的结果就是 McClintock 和 Irwin 的修正结果，因为同样是以$r_s=r_y$和$\bar{K}_1=K_1$用式(1.2)[1]和(1.8)[1]联解而得到的。

(4) 令

r_y，$\bar{a}=a+r_y$ 和 $\bar{K}_1=\sigma\sqrt{\pi\bar{a}}$ 代表本文修正，

r_y^*，$\bar{a}^*=a+r_y^*$ 和 $\bar{K}_1^*=\sigma\sqrt{\pi\bar{a}^*}$ 代表 McClintock 和 Irwin 的修正。

(a) 由式 (1.15)[1]和(2.12)可得

$$\frac{\bar{a}^*-\bar{a}}{r_y}=\frac{2}{2m^2-1}$$

当 $m=2$时，McClintock 和 Irwin 将裂纹半长的修正值提高了大约28.6%。

(b) 由式 (1.15)[1]，(2.12)和(2.9)可得

$$\frac{\bar{K}_1^* - \bar{K}_1}{\bar{K}_1 - K_1} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{2m^2-1}} - \sqrt{1+\frac{1}{2m^2+1}}}{\sqrt{1+\frac{1}{2m^2+1}} - 1}$$

表1 $\bar{K}_1$值　　单位：$kg/mm^{3/2}$

未　修　正	McClintock和Irwin	本　文
392.35	419.44	413.57

当 $m=2$时，McClintock 和 Irwin 将应力强度因子的修正值提高了大约27.6%。

当$a=10$mm，$\sigma_s=140$kg/mm²，$\sigma=70$kg/mm²，其应力强度因子$\bar{K}_1$的值如表1所示。

参 考 文 献

[1] McClintock, F. A. and G. R. Irwin, Plasticity aspects of fracture mechanics, *ASTM STP*, 381 (1965), 84—113.

On the Correction by McClintock and Irwin

Wang Mao-hua

(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

Abstract

In the case of quasi-brittle fracture, at the crack tip there is a small plastic region whose affection cannot be neglected. Therefore the linear elastic asymptotic fields must be corrected. In 1965 F. A. McClintock and G. R. Irwin presented a correction which since then has been adopted extensively. Here in this paper, it must be pointed out that such correction is wrong. A correct result is given.