应用数学和力学，第6卷第3期（1985年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

线载荷积分方程法的位移和应力场的唯一性定理

云天铨

（华中工学院，1984年4月12日收到）

摘　要

根据Fredholm定理，本文证明了由满足边界条件的分布于弹性体所占的区域之外的虚的基本载荷引起的弹性体所占的区域之内的位移和应力场是唯一的．本定理为线载荷积分方程法的应用奠定理论基础．

线载荷积分方程法是一种积分方程法，它将虚的基本载荷沿弹性空间(或半空间)内、在弹性体所占的区域之外的一线段上分布，使得问题的边界条件得到满足(弹性静力基本方程显然是满足的)，从而把问题归结为一维的、非奇异的积分方程。这方法已经用于若干问题[1~5]并由于一维性和非奇异性而具有简单易算的优点。但是，因为虚的基本载荷可以分布在弹性空间（或半空间）内，弹性体所占区域之外的任一区域，方法的本身是灵活的。因此，产生一个问题：如果虚载荷的两种不同的分布都满足问题的边界条件，则由它们引起的位移（或应力）场是不是相同的？下面，我们来回答这一重要问题。

令 $\bar{R}$ 为弹性体所占的弹性空间区域 R 的闭包，S 为 R 的边界。为简明起见，设在 S 上给定位移 $\underline{u}_i$。假设一虚的基本载荷带有未知集度 $x(Q)$ 使它在物体外 Ω 上分布，令问题的边界条件：

$$u_i(P)=\int_\Omega U_i(P,Q)x(Q)dQ=\underline{u}_i \qquad (P\in S,\ Q\in\Omega) \tag{1}$$

得到满足。式中 $U_i(P,Q)$ 是已知的影响函数并代表单位虚的基本载荷作用于点 Q 引起点 P 的位移分量($i=1,2,3$)；$\bar{R}=R\cup S$，$\bar{R}\cap\Omega=\phi$。然后，由虚的基本载荷引起的位移和应力场是：

$$u_i(P)=\int_\Omega U_i(P,Q)x(Q)dQ \qquad (P\in\bar{R},Q\in\Omega) \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}(P)=\int_\Omega S_{ij}(P,Q)x(Q)dQ \qquad (P\in\bar{R},Q\in\Omega) \tag{3}$$

式中 $S_{ij}(P,Q)$ 是应力影响函数（i，$j=1,2,3$）。

注意：我们的线载荷积分方程法特点之一是虚载荷作用点 Q 在弹性体之外，即 $Q\in\Omega$，$\Omega\cap\bar{R}=\phi$。根据这一特点，我们证明下面的引理。

引理：若存在有非零函数 $y(Q)$ 与实的非对称核 $A(P,Q)$（$P\in S\subset\bar{R}$，$Q\in\Omega$，$\bar{R}\cap\Omega=\phi$）正交，即

$$\int_\Omega A(P,Q)y(Q)dQ=0 \qquad (P\in S\subset\bar{R},\ Q\in\Omega,\ \bar{R}\cap\Omega=\phi) \tag{4}$$

则它与延拓的核 $A(P,Q)$ $(P\in\bar{R},\ Q\in\Omega,\ \bar{R}\cap\Omega=\phi)$正交，即

$$\int_{\Omega}A(P,Q)y(Q)dQ=0 \qquad (P\in\bar{R},Q\in\Omega,\bar{R}\cap\Omega=\phi) \tag{5}$$

证明：在 Fredholm 第二种积分方程的理论中，核的两个变量的定义域均需相同．现在，核$A(P,Q)$的两个变量的定义域前者为 $\bar{R}$，后者为 Ω，且$\bar{R}\cap\Omega=\phi$．为了能应用 Fredholm 的理论，我们将两个变量的定义域改写成相同的 $M=\bar{R}\cup\Omega$，(4)式改写为：

$$\left.\begin{aligned}&\int_{M}A(u,v)y(v)dv=0 \qquad\qquad (u,v\in M)\\ &\text{其中：}\ A(u,v)=\begin{cases}A(P,Q), & \text{当}u\in S,\ v\in\Omega\\ 0, & \text{当}u\notin S\text{或}v\notin\Omega\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

也就是当核的任一变量不在其定义域时，核函数不存在(即取零)．同样，(5)式也可类似地改写．

据下述定理[6]：

$$\int_{M}A(u,v)y(v)dv=0 \qquad (u,v\in M)\longleftrightarrow\langle y,\psi_n\rangle=0\ (\forall n) \tag{7}$$

即和核A正交的函数 y 的充要条件是 y 和核A^*A 的所有的特征函数 ψ_n 正交．式中 ψ_n 满足齐次积分方程

$$\psi_n(Q)=\lambda_n^2\int_{M}\int_{M}A^*(P,Q)A(P,t)\psi_n(t)dtdP \tag{8}$$

式中 λ_n^2 是特征值，$A^*(P,Q)=A(Q,P)$是A 的伴核．如令

$$K(Q,t)=\int_{M}A(Q,P)A(P,t)dP \tag{9}$$

则(8)式写成：

$$\psi_n(Q)=\lambda_n^2\int_{M}K(Q,t)\psi_n(t)dt \tag{10}$$

由(9)式看，不论 $u\in\bar{R}$还是 $u\in\Omega$，均有：

$$K(u,u)=\int_{M}A(u,P)A(P,u)dP=0 \tag{11}$$

因为若对以$u\in\bar{R}$为第一变量的A有定义，则对以$u\in\bar{R}$为第二变量的A就没有定义，于是(11)式中 $A(P,u)=0$；同样，若对以 $u\in\Omega$为第二变量的A有定义，则对以 $u\in\Omega$ 为第一变量的A就没有定义，即$A(u,\ P)=0$．

同样可证：若(9)式的$K(Q,t)$存在，则 $K(t,Q)=0$．因为

$$K(t,Q)=\int_{M}A(t,P)A(P,Q)dP \tag{12}$$

若(9)式中$A(P,t)$ 对 $t\in\Omega$ 有定义，则 $A(t,\ P)=0$(因以 $t\in\Omega$ 为第一变量的A没定义)．故(12)式为零．反之，若 $K(t,\ Q)$存在，则 $K(Q,\ t)=0$．于是写成：

$$K(Q,\ t)K(t,\ Q)=0 \qquad (Q,t\in M) \tag{13}$$

据(11)，(13)式，Fredholm 行列式

$$K\begin{pmatrix}s_1,s_2\\ s_1,s_2\end{pmatrix}\equiv\begin{vmatrix}K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2)\\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2)\end{vmatrix}=0 \qquad (s_1,s_2\in M) \tag{14}$$

同理，类推得：

$$K\begin{pmatrix} s_1, s_2, \cdots, s_p \\ s_1, s_2, \cdots, s_p \end{pmatrix} = 0 \qquad (p=1,2,\cdots, s_p \in M) \tag{15}$$

于是 Fredholm 第一级数

$$d(\lambda)=1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^p}{p!}\int_M\cdots\int_M K\begin{pmatrix} s_1,s_2,\cdots,s_p \\ s_1,s_2,\cdots,s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2\cdots ds_p=1\neq 0 \tag{16}$$

据 Fredholm 第一定理[7]，齐次积分方程（10）只有零解．即

$$\psi_n(Q)=0 \tag{17}$$

而 $\psi_n(Q)=0$ 包含了

$$\psi_n(Q)=\lambda_n^2\int_M\int_M A^*(P,Q)A(P,t)\psi_n(t)dtdP \qquad (P\in\bar{R}) \tag{18}$$

(18)式成立和 $\langle y,\psi_n\rangle=0$ 得

$$\left.\begin{aligned} &\int_M A(u,v)y(v)dv=0 \qquad (u,v\in M=\bar{R}\cup\Omega) \\ &A(u,v)=\begin{cases} A(P,Q) & (u\in\bar{R},v\in\Omega) \\ 0 & (u\notin\bar{R}\text{或}v\notin\Omega) \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

(19)式可写成：

$$\int_\Omega A(P,Q)y(Q)dQ=0 \qquad (P\in\bar{R},Q\in\Omega,\bar{R}\cap\Omega=\phi) \tag{5}$$

（证完）

定理：满足边界条件（1）的虚的基本载荷的分布引起的位移场（2）和应力场（3）是唯一的。

证明：假设虚的基本载荷有两种不同的分布函数 x_1 和 x_2 均满足边界条件(1)．由(2)，(3)式算得的相应的位移和应力场分别是 u_{1i}，σ_{1ij} 和 u_{2i}，σ_{2ij}。

令 $y=x_1-x_2$，代入(2)，(3)式得：

$$\left.\begin{aligned} |u_{1i}(P)-u_{2i}(P)|&=\left|\iint_\Omega U_i(P,Q)y(Q)dQ\right| \\ |\sigma_{1ij}(P)-\sigma_{2ij}(P)|&=\left|\iint_\Omega S_{ij}(P,Q)y(Q)dQ\right| \end{aligned}\right\} \quad (P\in\bar{R},Q\in\Omega) \tag{20}$$

因为 x_1 和 x_2 均满足边界条件(1)，代入(1)式，得：

$$\int_\Omega U_i(P,Q)y(Q)dQ=0 \qquad (P\in S,Q\in\Omega) \tag{21}$$

据引理，有

$$\int_\Omega U_i(P,Q)y(Q)dQ=0 \qquad (P\in\bar{R},Q\in\Omega) \tag{22}$$

于是（20）式给出：

$$u_{1i}(P)=u_{2i}(P) \qquad (P\in\bar{R}) \tag{23}$$

即位移场是唯一的．据弹性力学唯一性原理，位移场唯一，应力场也唯一。

（证完）

若给出的是应力边界条件代替位移边界条件(1)，也可用同样方法证明上述定理。

参 考 文 献

[1] Yun Tian-quan (云天铨), An integral equation method for solving the torsion problem of rotating bodies, *J. H. I. T.*, (English edition) 1, 1, (1979), 82-97. (*MR* 81m: 73028).

[2] 云天铨，简便积分方程法分析桩，应用数学和力学，2，3(1981)，307-320.(*MR* 83i:73014).

[3] 云天铨、肖永谦、邱崇光，椭球受轴向压力分析，应用数学和力学，2，6(1981)，641-650.

[4] 云天铨，具有刚性岩基水平层的半空间受垂直表面的力的作用的积分方程法，固体力学学报，3，(1983)，375-383.

[5] 云天铨编著，积分方程及其在弹性力学中的应用，《应用数学和力学讲座第33期》，山东化工学院印刷，(1984).

[6] Smithies, F., *Integral Equations*, Cambridge University Press, (1958)

[7] Pogorzelski, W., *Integral Equations and their Applications*, Vol. 1, Pergamon Press, London, (1966).

Theorem of the Uniqueness of Displacement and Stress Fields of Line-Loaded Integral Equation Method

Yun Tian-quan

(*Huazhong University of Science and Technology, Wuhan*)

Abstract

According to Fredholm's theorem, this paper proves that due to the virtual fundamental loads which satisfy the boundary conditions and being distributed outside the elastic body occupied region, the displacement and the stress fields in the elastic body occupied region are unique. This theorem forms a theoretical basis of the applications of the line-loaded integral equation method.