应用数学和力学，第6卷第3期（1985年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

平面弹性第二基本问题的新提法*

路 见 可**

（武汉大学，1984年3月5日收到）

摘 要

本文给出了平面弹性第二基本问题的一般提法，这里在多连通弹性区域的各个闭边界围线上给出的位移只是相对的，各允许有一不同的刚性移动．在这种情况下，为了解的唯一性，证明了必须另外给出每一边界围线上外力的主矢量与主力矩．还给出了求解的方法以及一些例题．

一、引 言

对于平面弹性的第二基本问题，亦即已知弹性区域各边界点上的位移求弹性平衡的问题，在[1]中已有精辟的论述，尤其对于多连通无限域情况更是如此（有些作者把这问题称作第一基本问题，例如[2]），曾特别指出，除给出各边界点的位移以及无穷远处的应力与转动外，还必须给出整个边界上外力的主矢量 $X+iY$ 才能保证解的唯一性（参看[1]，§40）。例如，若弹性体是由边界为 m 条光滑围线 $L_1,\cdots,L_m$ 所构成的洞所削弱的无限平面，则每一 L_j 上作用的外力主矢量 X_j+iY_j 必须与 Колосов-Мусхелишвили 函数 $\varphi(z)$，$\psi(z)$ 同时求出，但要受一约束条件

$$\sum_{j=1}^{m}(X_j+iY_j)=X+iY \tag{1.1}$$

其中 $X+iY$ 已预先给定。这样，在求解过程中我们有 $m-1$ 个待定复常数。

在实际问题中，对于一个多连通的有限或无限域的第二基本问题，常在每一边界围线 L_j 上只给出各点的相对位移，而真实位移可与给出的相差一个刚性移动 R_j；但对于不同的 j，各 R_j 可以各不相同(其中之一可认为是恒等的)。相反，在每一 L_j 上，外力的主矢量 X_j+iY_j 与主力矩 M_j 却是事先给定的。例如，当一些稍大的刚性楔子插入诸洞中而彼此间并无联系，且每个楔子上无外力作用（因而主矢量与主力矩均为零）而平衡，就是这种情况。这种提法在作者所知的文献（例如[3]～[5]）中尚未见到讨论过。

当各楔子作为一整体刚性地连在一起时，就是经典提法中出现的问题。

本文将证明新的提法是合理的，亦即这种问题的解存在且唯一，并给出其解法。先将讨论已知位移只相对于一些平动的问题，然后在此基础上讨论一般情况。还在文末给出一些简单例子以验证我们所论。

* 周焕文推荐。
** 中国科学院科学基金资助的课题。

二、当所给位移相对于平动时解的唯一性

我们来讨论多连通有限域 D 的情况。D 由光滑围线 $L_0, L_1, \cdots, L_m$ 所围成，其中 L_0 是外面的围线。设 $L=\sum_{j=0}^{m} L_j$ 的正向已取定，使 D 位于其正（左）侧。

在我们的问题中，对于 $t \in L_j (j=0,\cdots,m)$，位移函数 $g_j(t)=u_j(t)+iv_j(t)$ 已给，但相对于平动。这就是说，L_j 上 t 点的真实位移为 $g_j(t)+c_j$，这里 c_j 是待定复常数。此外，L_j 上外力的主矢量 X_j+iY_j 也是已知的，但要受平衡条件

$$\sum_{j=0}^{m}(X_j+iY_j)=0 \tag{2.1}$$

的约束。这时 L_j 上外力的主力矩 M_j 事先并不知道。

我们可以仿照[1]之§40中所述方法证明此问题解的唯一性。记 $e_{xx}(z), e_{xy}(z), e_{yy}(z)$ 是 D 中在 z 处的形变分量，$X_n(t)+iY_n(t)$ 是 D 的边界 L 上 t 处的外应力，则有

$$\int_L (X_n u+Y_n v)ds=\iint_D [\lambda(e_{xx}+e_{yy})^2+2\mu(e_{xx}^2+2e_{xy}^2+e_{yy}^2)]dxdy \tag{2.2}$$

其中 s 为 L 上的弧长参数，而 $\lambda>0$，$\mu>0$ 为弹性材料的 Lamé 常数。

设若问题有两组解 $X_n'(t)+iY_n'(t)$，$g_j(t)+c_j'$ 与 $X_n''(t)+iY_n''(t)$，$g_j(t)+c_j''$。记 $X_n(t)=X_n''(t)-X_n'(t)$，$Y_n(t)=Y_n''(t)-Y_n'(t)$，$c_j=c_j''-c_j'=A_j+iB_j$，则 L_j 上的外应力 $X_n(t)+iY_n(t)$ 与位移 c_j 建立一弹性平衡，因而满足(2.2)，这时(2.2)左端成为

$$\sum_{j=0}^{m}\int_{L_j}[A_jX_n(t)+B_jY_n(t)]ds=\sum_{j=0}^{m}A_j\int_{L}X_n(t)ds+\sum_{j=0}^{m}B_j\int_{L_j}Y_n(t)ds$$

因为在每一 L_j 上外力的主矢量是已知的，由此故两解之差构成的外力主矢量在 L_j 上为零，即

$$\int_{L_j}X_n(t)ds=0, \qquad \int_{L_j}Y_n(t)ds=0 \quad (j=0,\cdots,m) \tag{2.3}$$

由此可见（2.2）左端为零。但其右端被积函数是一正定二次型，故必

$$e_{xx}=e_{xy}=e_{yy}=0$$

这就是说，D 中所有形变分量从而所有应力分量都恒等于零。这就证明了上述两解描述了弹性体的同一平衡状态。

在以上讨论中，整个弹性体仍可允许一任意平动。为了避免这一任意性，我们可令 c_j 中之一，例如，$c_0=0$。

现再考虑无限域情况。这时在上述讨论中不出现 L_0。提法与上面完全一样，只是在整个边界 L 上外力主矢量不必为零，亦即不再有如（2.1）的约束。此外，在无穷远处的应力 $X_\infty+iY_\infty$ 与转角 ε_∞ 当然也要给定。如不允许整个弹性体的刚性平动，我们可指定例如 $c_1=0$。

在这种情况下证明解的唯一性可用类似于有限域时的上述方法，只要在无穷远处作适当的处理即可（参看[1]之§40的3°），这里不赘述。

三、当所给位移相对于平动时的解法

对所提问题的解法，和源于 Д. И. Шерман[6]的关于第一基本问题的解法相仿，这里只作简略概述。设 κ,μ 为材料的弹性常数。

对于有限域 D 的情况，Колосов-Мусхелишвили 函数可写成

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=-\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{m}(X_j+iY_j)\log(z-z_j)+\varphi_0(z)\\ \psi(z)&=\frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{j=1}^{m}(X_j-iY_j)\log(z-z_j)+\psi_0(z)\end{aligned}\right\}\quad(z\in D)\tag{3.1}$$

其中 $\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 是 D 中的全纯函数，z_j 位于 L_j 所围的孔中，且 $\log(z-z_j)$ 对各个 j 可任意取定一支。现在 X_j+iY_j 是已知的(因 (2.1) 的关系，X_0+iY_0 不出现)。我们要求 $\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 满足下列边值条件：

$$\kappa\varphi_0(t)-t\overline{\varphi_0'(t)}-\overline{\psi_0(t)}=2\mu g^*(t)+c_j\qquad(t\in L_j,\ j=0,\cdots,m)\tag{3.2}$$

其中

$$2\mu g^*(t)=2\mu g_j(t)+\frac{\kappa}{\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\log|t-z_k|$$

$$-\frac{1}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\frac{t-z_k}{\bar t-\bar z_k}\qquad(t\in L_j,\ j=0,\cdots,m)\tag{3.3}$$

这里 $g_j(t)$ 已给于 L_j 上，c_j 待定。

为要求解(3.2)，在 L 上引进新的未知函数 $\omega(t)$ 使得

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)}{t-z}dt\\ \psi_0(z)&=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar t\omega'(t)}{t-z}dt\end{aligned}\right\}\quad(z\in D)\tag{3.4}$$

并令

$$c_j=-\int_{L_j}\omega(t)ds\qquad(j=0,\cdots,m)\tag{3.5}$$

问题 (3.2) 就化为 $\omega(t)$ 的一个 Fredholm 积分方程

$$\kappa\omega(t)+\frac{\kappa}{2\pi i}\int_L\omega(\tau)d\log\frac{\tau-t}{\bar\tau-\bar t}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega(\tau)}d\frac{\tau-t}{\bar\tau-\bar t}+\int_{L_j}\omega(t)ds=2\mu g^*(t)$$
$$(t\in L_j,\ j=0,\cdots,m)\tag{3.6}$$

可以证明， (3.6) 对任何 $g^*(t)$ 解存在且唯一。

对于无限域情况十分类似。这时 $\varphi_0(z)$，$\psi_0(z)$ 的表达式 (3.4) 右边分别要添加项 Γz 与 $\Gamma' z$，这里 Γ,Γ' 是已知常数，相应于无穷远处的应力与转角。于是我们仍得方程 (3.6)，但在 $2\mu g^*(t)$ 的表达式 (3.3) 中要添加某些已知项。也可证明此方程解唯一存在。

四、主力矩的表达式

熟知，在 D 内或其边界上的任何闭路 γ 上的主力矩 M 可表为

$$M=\operatorname{Re}[\chi(z)-z\psi(z)-|z|^2\varphi'(z)]_\gamma \tag{4.1}$$

其中 $\chi'(z)=\psi(z)$，且 $[\cdots]_\gamma$ 表示当 z 沿 γ 正向环行一周对方括号中函数的改变量（此处主力矩作用在 γ 的左侧部分）。我们要简化 (4.1) 以备后用。

因 $\varphi'(z)$ 在 D 中单值，即使 D 是多连通时也是如此，故 (4.1) 可简化为

$$M=\operatorname{Re}[\chi(z)-z\psi(z)]_\gamma=\operatorname{Re}\int_\gamma \frac{d}{dz}[\chi(z)-z\psi(z)]dz=-\operatorname{Re}\int_\gamma z\psi'(z)dz \tag{4.2}$$

我们感兴趣的是沿 D 的边界围线 L_j 上的主力矩 M_j。设 D 是有限多连通区域。由 (3.1)，我们有

$$\psi'(z)=\frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{m}\frac{X_k-iY_k}{z-z_k}+\psi_0'(z)$$

在 (4.2) 中取 $\gamma=L_j(j=1,\cdots,m)$，并以上式代入，便得

$$\begin{aligned}M_j&=\operatorname{Re}\left\{-\int_{L_j}t\psi_0'(t)dt-\frac{\kappa}{2\pi(\kappa+1)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\int_{L_j}\frac{tdt}{t-z_k}\right.\\&=\operatorname{Re}\left\{\int_{L_j}\psi_0(t)dt+\frac{\kappa i}{\kappa+1}(X_j-iY_j)z_j\right\}\qquad(j=1,\cdots,m)^{1)}\end{aligned}\tag{4.3}$$

因为 $\psi_0(t)$ 在各 L_j 上都是单值的。记

$$M_j^*=M_j-\frac{\kappa}{\kappa+1}\operatorname{Im}\{(X_j-iY_j)z_j\}\qquad(j=1,\cdots,m)\tag{4.4}$$

则可写

$$\operatorname{Re}\int_{L_j}\psi_0(t)dt=M_j^*\qquad(j=1,\cdots,m)\tag{4.5}$$

如果 X_j+iY_j 与 M_j 均已知，则 M_j^* 也已知。

更进一步，如果 $\psi_0(z)$ 以(3.4)式用 $\omega(t)$ 表示，则 M_j^* 也可通过 $\omega(t)$ 表出。在(3.4)中用Plemelj 公式，得到

$$\psi_0(t)=-\frac{\kappa}{2}\overline{\omega(t)}-\frac{\kappa}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{2}\bar t\omega'(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar\tau\omega'(\tau)}{\tau-t}d\tau\quad(t\in L,j=1,\cdots,m)$$

两边乘以 dt 并沿 L_j 积分，便得

$$\int_{L_j}\psi_0(t)dt=-\kappa\int_{L_j}\overline{\omega(t)}dt-\int_{L_j}\bar t\omega'(t)dt=-\kappa\int_{L_j}\overline{\omega(t)}dt+\int_{L_j}\omega(t)d\bar t\quad(j=1,\cdots,m)$$

这里我们作了累次积分次序的交换并利用了下列事实：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j}\frac{dt}{t-\tau}=\begin{cases}0 & (\text{当 }\tau\in L_k,\ k\neq j)\\ -\dfrac{1}{2} & (\text{当 }\tau\in L_j)\end{cases}\qquad(j>0)$$

---

1) 我们不再写出 L_0 上 M_0 的式子，因为 $M_0=-\sum_{j=1}^{m}M_j$。

于是，由（4.3），得

$$\mathrm{Re}\int_{L_j}\psi_0(t)dt=-(\kappa-1)\mathrm{Re}\int_{L_j}\overline{\omega(t)}dt \qquad (j=1,\cdots,m) \tag{4.6}$$

这样，（4.5）就成为

$$\mathrm{Re}\int_{L_j}\overline{\omega(t)}dt=-\frac{M_j^*}{\kappa-1} \qquad (j=1,\cdots,m) \tag{4.7}$$

注意，易见(4.4)～(4.7)诸式对无限域 D 也成立，不论前述 Γ 与 Γ' 如何。

五、一般情况时的解法

如前，仍设 D 是多连通有限域。在每一边界围线 $L_j(j=0,\cdots,m)$ 上位移 $g_j(t)=u_j(t)+iv_j(t)$ 只是给出相对于刚性移动，在 L_j 上的真实位移是 $g_j(t)+i\alpha_jt+c_j'$，其中 α_j 与 c_j' 分别是待定的实的与复的常数，α_j 表示 L_j 绕原点的转角，c_j' 表示 L_j 的平动。为确定起见，可设 $\alpha_0=0$。此外，在每一 L_j 处还给出了外力主矢量 X_j+iY_j 和主力矩 M_j，满足平衡条件

$$\sum_{j=0}^{m}(X_j+iY_j)=0, \qquad \sum_{j=0}^{m}M_j=0 \tag{5.1}$$

此问题可化为边值问题

$$\kappa\varphi_0(t)-t\overline{\varphi_0'(t)}-\overline{\psi_0(t)}=2\mu g^*(t)+i\nu_jt+c_j \qquad (t\in L_j,\ j=0,\cdots,m) \tag{5.2}$$

其中 $g^*(t)$ 由(3.3)给出，而

$$\nu_j=2\mu\alpha_j \qquad (j=1,\cdots,m;\ \nu_0=0) \tag{5.3}$$

以及 $c_j=2\mu c_j'$ 又是待定的。根据题设，我们还应补充要求(4.5)，其中 M_j^* 由(4.4)给出。

为要求解(5.2)，我们先令所有 $\nu_j=0$。如第三节中所示，我们可得唯一解组 $\varphi_*(z)$，$\psi_*(z)$，c_j^* 满足

$$\kappa\varphi_*(t)-t\overline{\varphi_*'(t)}-\overline{\psi_*(t)}=2\mu g^*(t)+c_j^* \qquad (t\in L_j,\ j=0,\cdots,m) \tag{5.4}$$

其次，对于固定的 $k(1\leqslant k\leqslant m)$，我们来求解边值问题

$$\kappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=i\delta_{kj}t+c_j \qquad (t\in L_j,\ j=0,\cdots,m)$$

其中 δ_{jk} 是 Kronecker 记号（当 $j\neq k$ 时 $\delta_{kj}=0$，而当 $k=j$ 时 $\delta_{kk}=1$）。这又是第三节中讨论过的问题。故又可获得其唯一解组 $\varphi_k(z)$，$\psi_k(z)$，c_{jk}，满足

$$\kappa\varphi_k(t)-t\overline{\varphi_k'(t)}-\overline{\psi_k(t)}=i\delta_{kj}t+c_{jk} \qquad (t\in L_j,\ j=0,\cdots,m) \tag{5.5}$$

注意 $\nu_1,\cdots,\nu_m$ 是实常数，我们立即可知

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_0(z)=\varphi_*(z)+\sum_{k=1}^{m}\nu_k\varphi_k(z)\\
&\psi_0(z)=\psi_*(z)+\sum_{k=1}^{m}\nu_k\psi_k(z)\\
&c_j^0=c_j^*+\sum_{k=1}^{m}c_{jk} \qquad (j=0,\cdots,m)
\end{aligned}\right\} \quad (z\in D) \tag{5.6}$$

是（5.2）的唯一解组，只要 $\nu_1,\cdots,\nu_m$ 已取定。

为了满足(4.5)，必须选取ν_j使得

$$\operatorname{Re}\int_{L_j}\left[\psi_*(t)+\sum_{k=1}^{m}\nu_k\psi_k(t)\right]dt=M_j^* \qquad (j=1,\cdots,m)$$

亦即，

$$\sum_{k=1}^{m} A_{jk}\nu_k=M_j^*-B_j^* \qquad (j=1,\cdots,m) \tag{5.7}$$

这里已令

$$A_{jk}=\operatorname{Re}\int_{L_j}\psi_k(t)dt \qquad (j,k=1,\cdots,m) \tag{5.8}$$

$$B_j^*=\operatorname{Re}\int_{L_j}\psi^*(t)dt \qquad (j=1,\cdots,m) \tag{5.9}$$

注意，A_{jk}，B_j^* 均为已知常数，且A_{jk}与原问题的边界条件无关.

现证矩阵(A_{jk})是满秩的. 事实上，我们来考察零边界条件的问题，亦即，对每一j，设$g_j(t)=0$，$X_j+iY_j=0$，$M_j=0$ $(j=0,\cdots,m)$. 对这个问题显然D只可能作一刚性移动，这是因为，这时在L_j上的真实位移只可能是$i\nu_jt+c_j$. 如记$c_j=\alpha_j+i\beta_j$，则易证

$$J=\int_L(uX_n+vY_n)ds=\sum_{j=0}^{m}\int_{L_j}\{(-\nu_jy+\alpha_j)X_n+(\nu_jx+\beta_j)Y_n\}ds$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\left\{-\nu_j\int_{L_j}(xY_n-yX_n)ds+\alpha_j\int_{L_j}X_nds+\beta_j\int_{L_j}Y_nds\right\}$$

$$=\sum_{j=0}^{m}(-\nu_jM_j+\alpha_jX_j+\beta_jY_j)$$

在所设条件下，$J=0$. 因此，用类似于第二节中的讨论，便可得出上述结论. 但我们已设$\nu_0=0$，所以不会有转动，因而所有ν_j等于零. 另一方面，这时$M_j^*=0$，$B_j^*=0$（因为这时$\psi_0(z)$只可能是一常数），故（5.7）成为齐次的. 这样，相应于（5.7）的齐次方程组只有平凡解. 这就证明了我们的论断.

所以，（5.7）对任何M_j^*，B_j^*有唯一解组. 这就表明原问题唯一可解.

想到A_{jk}与B_j^*要分别通过$\{\psi_k(t)\}$与$\psi^*(t)$确定，而这些函数本身又要通过某些Fredholm积分方程的解$\omega_k(t)$与$\omega^*(t)$的奇异积分表示. 这在实用上极不方便. 我们可容易地得到A_{jk}与B_j^*分别通过$\omega_k(t)$与$\omega^*(t)$的表示式. 由（4.6）与(5.8)，(5.9)，我们有

$$A_{jk}=-(\kappa-1)\operatorname{Re}\int_{L_j}\overline{\omega_k(t)}dt \qquad (j,k=1,\cdots,m)$$

$$B_j^*=-(\kappa-1)\operatorname{Re}\int_{L_j}\overline{\omega^*(t)}dt \qquad (j=1,\cdots m,)$$

于是，如令

$$a_{jk}=\operatorname{Re}\int_{L_j}\overline{\omega_j(t)}dt \qquad (j,k=1,\cdots,m) \tag{5.10}$$

$$b_j^*=\operatorname{Re}\int_{L_j}\overline{\omega^*(t)}dt \qquad (j=1,\cdots,m) \tag{5.11}$$

则方程组可写成

$$\sum_{k=1}^{m} a_{jk}\nu_k = -\frac{M_j^*}{\kappa-1} - b_j^* \qquad (j=1,\cdots,m) \tag{5.12}$$

它也恒唯一可解。

对多连通无限域情况，只要略作修改，可同样地进行讨论。

六、例　　题

为了验证我们的论述，举两个简单例子。

例 1　设 D 是由一圆孔削弱的无限平面，圆的半径为 r，中心在原点 O 处。设在边界围线 $L(=L_1)$ 上既无相对位移也无外力主矢量，但已知作用于 L 上外力的主力矩为 $M(=M_1)$。另外还设在无穷远处既无应力也无转动。

现在我们有 $g_1(t)=0$，$X_1+iY_1=0$，$M_1^*=M$．边值问题（5.2）现成为

$$\kappa\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} = i\nu_1 t + c_1 \qquad (t\in L) \tag{6.1}$$

其中 $\nu_1=2\mu\alpha$，而 α 是沿 L 的转角。注意，对 $t\in L$，有 $t\bar{t}=r^2$。(6.1)的唯一解组当 $\nu_1=1$ 时显然是

$$\varphi_1(z)=0,\quad \psi_1(z)=\frac{ir^2}{z},\quad c=0$$

而

$$A_{11}=\mathrm{Re}\int_L \psi_1(t)dt=\mathrm{Re}\left\{ir^2\int_L\frac{dt}{t}\right\}=2\pi r^2$$

因此

$$\nu_1=\frac{M}{A_{11}}=\frac{M}{2\pi r^2} \tag{6.2}$$

所以

$$\alpha=\frac{\nu_1}{2\mu}=\frac{M}{4\pi\mu r^2} \tag{6.3}$$

现在 Колосов-Мусхелишвили 函数是

$$\varphi(z)=0,\qquad \psi(z)=\nu_1\psi_1(z)=\frac{iM}{2\pi z}$$

由此容易算出，对 $z=\rho e^{i\theta}$ 点，

$$u+iv=\frac{iMe^{i\theta}}{4\pi\mu\rho} \tag{6.4}$$

例 2　设 D 是圆环域 $(0<)r_1\leqslant|z|\leqslant r_2$。设在 $L_1(|t|=r_1)$ 与 $L_2(|t|=r_2)$ 上都无相对位移与外力主矢量，而在 L_1 与 L_2 上分别作用有外力主力矩 M 与 $-M$。此外，还假定 L_2 保持不动。

我们可利用例 1 结果求解本题。在上例中，由（6.4），L_2 上的点 $t=r_2e^{i\theta}$ 处的位移是

$$u+iv=\frac{Me^{i\theta}}{4\pi\mu r_2}$$

如写 $u+iv=\varepsilon e^{i\tau}$，则 $\varepsilon=\dfrac{M}{4\pi\mu r_2}$ $\left(\tau=\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，故在 L_2 上的转角为

$$\alpha_2=\frac{\varepsilon}{r_2}=\frac{M}{4\pi\mu r_2^2}$$

将整个圆环域作角 $-\alpha_2$ 的转动，就可得到 L_1 上的转角

$$\alpha=\frac{M}{4\pi\mu}\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r_2^2}\right) \tag{6.5}$$

这里已保持 L_2 不动。

当圆环域作 $-\alpha_2$ 角转动时，其 Колосов-Мусхелишви 函数易知为

$$\varphi(z)=-\frac{2\mu\alpha_2 iz}{\kappa+1}=-\frac{iMz}{2\pi(\kappa+1)r_2^2},\qquad \psi(z)=0$$

因此所提问题的则为

$$\varphi(z)=-\frac{iMz}{2\pi(\kappa+1)r_2^2},\qquad \psi(z)=\frac{iM}{2\pi z} \tag{6.6}$$

参 考 文 献

[1] Мусхелишвили Н. И.,《数学弹性力学的几个基本问题》，科学出版社，北京(1958).

[2] Партон В. З. и П. И. Перлин, *Методы Математической Теории Упругости*, Наука, Москва (1981).

[3] Ааландия А. И., *Математические Методы Двумерной Упругости*, Наука, Москва (1973).

[4] Milne-Thomson, L. M., *Plane Elastic Systems*, Springer Verlog, Berlin (1960).

[5] England, A. H., *Complex Variable Methods in Elasticity*, Wiley, London (1971).

[6] Шерман Д. И., К решению плоской статической задач теория упругости при заданных на границе внешных силах, *ДАН СССР*, 28, 1 (1940), 25—28.

New Formulations of the Second Fundamental Problem in Plane Elasticity

Lu Jian-ke

(*Wuhan University, Wuhan*)

Abstract

Some general formulations of the second fundamental problem in plane elasticity are proposed here when the displacements given on the closed boundary contours of a multi-connected elastic region are relative to certain rigid motions which are different to each other for different boundary contours. In such case, it is proved that, for the unique existence of solution, there must be given in addition the principal vector and the principal moment of the external forces on each boundary contour. A method of solution is also given together with some illustrated examples.