应用数学和力学，第6卷第3期（1985年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

弹性扁壳由移动质量引起的强迫振动*

成 祥 生

(同济大学，1980年5月7日收到)

摘 要

本文用变分法讨论在弹性扁壳上有移动的质量所引起的壳体的强迫振动．文中讨论了关于强迫振动、共振条件及临界速度等一系列问题．

一、引 言

在结构上有移动载荷作用而引起的动力学问题，最初是由R. Willis等人[1~5]讨论过；后来A. H. Крылов等[6~13]对梁上有移动的常数力的问题作了较详尽的研究；H. H. Jeffcott等[14~17]进一步对移动荷重的问题作了讨论；A. Bühler等人[18~21]获得了许多有关桥梁振动的有用的实验数据；在板与壳上有移动载荷作用的动力学问题曾由M. Ф. Димен-тберг等人[22~25]研究过，但大都将作用在板或壳上的移动载荷当作移动的常数力，并未考虑到移动载荷的质量，而这些对研究结构的强迫振动、共振条件和临界速度都是非常重要的．本文将应用变分法对于在弹性扁壳上由移动的质量而引起的强迫振动进行讨论．

二、基 本 方 程

我们现在考虑扁壳处于运动状态，其基本方程的变分写法[27]如下

$$\left.\begin{aligned}&\iint\left\{\frac{1}{Eh}\nabla^4\varphi-\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k_2\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(k_1\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\right]\right\}\delta\varphi d\alpha d\beta=0\\&\iint\left\{D\nabla^4w+\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(k_2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(k_1\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)\right]+\frac{\gamma h}{g}\frac{\partial^2w}{\partial t^2}-Z\right\}\delta wd\alpha d\beta=0\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

这是以应力函数φ和法向位移w所构成的变分方程组：式中α和β为壳体上的正交曲线坐标，$k_1(\alpha,\beta)$和$k_2(\alpha,\beta)$分别为沿α和β曲率线的主曲率，假定扭率为零．w以朝外向法线时为正；E,h,γ,g,D分别为壳体材料的弹性模量、壳厚、壳体材料的比重、重力加速度和弯曲刚度；Z为表面法向分布载荷的集度；t为时间，∇^4为双谐算子，$\delta\varphi$和δw分别为应力函数φ及法向位移w的变分；设壳体为等厚，常数曲率，矩形底，其边界为$\alpha=0$，$\alpha=\alpha_0$；$\beta=0$，$\beta=\beta_0$；积分遍及全域．

* 钱伟长推荐．

当考虑到有质量的荷载在壳体上移动时，其荷载与挠度函数 w 及应力函数φ之间的关系将是非线性的，因此本问题实质上是一个非线性问题。我们拟用下列形式的函数以求得上列方程(2.1)的解[28]。

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\alpha,\beta,t)&=A_{mn}(t)U_m(\alpha)V_n(\beta)\\ w(\alpha,\beta,t)&=B_{mn}(t)\chi_m(\alpha)\psi_n(\beta)\\ Z(\alpha,\beta,t)&=C_{mn}(t)\chi_m(\alpha)\psi_n(\beta)\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

式中$U_m(\alpha)$，$V_n(\beta)$，$\chi_m(\alpha)$，$\psi_n(\beta)$为梁函数，我们应事先选择它们，使其分别满足 φ 和w的边界条件。相应于φ和w的变分是

$$\delta\varphi=U_m(\alpha)V_n(\beta)\delta A_{mn},\quad \delta w=\chi_m(\alpha)\psi_n(\beta)\delta B_{mn}\tag{2.3}$$

将(2.2)、(2.3)代入(2.1)，并注意到系数变分δA_{mn}和δB_{mn}是任意的以及梁函数的正交性，可得到如下的方程组

$$\left.\begin{aligned}&\frac{I_1}{Eh}A_{mn}(t)-I_2B_{mn}(t)=0\\ &DI_3B_{mn}(t)+I_4A_{mn}(t)+\frac{\gamma h}{g}I_5\ddot{B}_{mn}(t)-I_5C_{mn}(t)=0\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}I_1&=\iint U_m(\alpha)V_n(\beta)\nabla^4[U_m(\alpha)V_n(\beta)]d\alpha d\beta\\ I_2&=\iint U_m(\alpha)V_n(\beta)\left\{\psi_n(\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha}[k_2\chi_m'(\alpha)]+\chi_m(\alpha)\frac{\partial}{\partial\beta}[k_1\psi_n'(\beta)]\right\}d\alpha d\beta\\ I_3&=\iint\chi_m(\alpha)\psi_n(\beta)\nabla^4[\chi_m(\alpha)\psi_n(\beta)]d\alpha d\beta\\ I_4&=\iint\chi_m(\alpha)\psi_n(\beta)\left\{V_n(\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha}[k_2U_m'(\alpha)]+U_m(\alpha)\frac{\partial}{\partial\beta}[k_1V_n'(\beta)]\right\}d\alpha d\beta\\ I_5&=\iint\chi_m^2(\alpha)\psi_n^2(\beta)d\alpha d\beta\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

从 (2.4) 可解出

$$\left.\begin{aligned}&A_{mn}(t)=\frac{EhI_2}{I_1}B_{mn}(t)\\ &\ddot{B}_{mn}(t)+\omega_{mn}^2B_{mn}(t)=\frac{g}{\gamma h}C_{mn}(t)\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

式中 ω_{mn} 系扁壳自由振动的固有频率，它等于

$$\omega_{mn}^2=\frac{g}{\gamma h}\left[D\frac{I_3}{I_5}+Eh\frac{I_2I_4}{I_1I_5}\right]\tag{2.7}$$

(2.6)式中的$C_{mn}(t)$决定于载荷的特性，今讨论如下。

三、关于移动载荷

如果在壳体上某一点 $M(\xi,\eta)$ 作用有移动的集中载荷P，其质量应为$\frac{P}{g}$。若令ψ_1及ψ_2为铅直线分别和$\alpha=0$ 及 $\beta=0$ 边上的法线所夹的角，如图 1 所示。则在该点作用于壳体上的载荷的法线方向的分力为

$$P_n=P\cos(\psi_1-k_1\xi)\cos(\psi_2-k_2\eta)\tag{3.1}$$

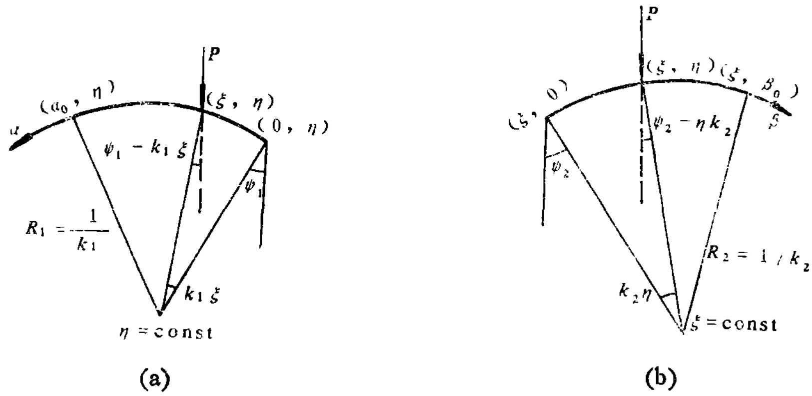

图 1

由于讨论的壳体是较扁平的壳体，其最大矢高与底面最小尺寸之比小于五分之一[28]，故载荷沿壳面的切向分力亦较小。若我们只研究壳体的横向振动，则载荷的切向分力对壳体横向振动的影响是可以被略去的。现在要计及移动载荷的质量对壳体横向振动的影响，故必须考虑载荷沿壳体法向的惯性力$-\frac{P}{g}\frac{d^2w}{dt^2}$，于是作用于壳体上$M(\xi,\eta)$点的法向总压力为

$$P_n^* = P_n - \frac{P}{g}\left(\frac{d^2w}{dt^2}\right)_{\substack{\alpha=\xi\\ \beta=\eta}} = P\left[N(\xi,\eta) - \frac{1}{g}\left(\frac{d^2w}{dt^2}\right)_{\substack{\alpha=\xi\\ \beta=\eta}}\right] \tag{3.2}$$

其中

$$N(\xi,\eta) = \cos(\psi_1 - k_1\xi)\cos(\psi_2 - k_2\eta) \tag{3.3}$$

在(2.1)式中的法向载荷Z可看成如下的法向载荷集度

$$\begin{cases} Z = -\dfrac{P_n^*}{\Delta\alpha\Delta\beta}, & \text{当}\begin{cases}\xi\leqslant\alpha\leqslant\xi+\Delta\alpha\\ \eta\leqslant\beta\leqslant\eta+\Delta\beta\end{cases} \\ Z = 0, & \text{在其它各处} \end{cases} \tag{3.4}$$

将(3.4)按(2.2)展开，得

$$C_{mn}(t) = \left[\iint Z(\alpha,\beta,t)\,\chi_m(\alpha)\psi_n(\beta)\,d\alpha d\beta\right]\cdot\left[\iint \chi_m^2(\alpha)\psi_n^2(\beta)\,d\alpha d\beta\right]^{-1} \tag{3.5}$$

如设载荷以等速v在壳体上运动，它沿α和β方向的分速度分别为

$$v_\alpha = \frac{d\alpha}{dt} = \text{const}, \qquad v_\beta = \frac{d\beta}{dt} = \text{const} \tag{3.6}$$

我们将法向挠度w看成是如下的函数

$$w = w(\alpha(t),\ \beta(t)) \tag{3.7}$$

若注意到公式(3.6)则有

$$\frac{dw}{dt} = v_\alpha\frac{dw}{d\alpha} + v_\beta\frac{dw}{d\beta}, \qquad \frac{d^2w}{dt^2} = v_\alpha^2\frac{d^2w}{d\alpha^2} + v_\beta^2\frac{d^2w}{d\beta^2} \tag{3.8}$$

将(3.8)代入(3.2)便得到作用在壳体上$M(\xi,\eta)$点的法向总压力为

$$P_n^* = P\left[N(\xi,\eta) - \frac{1}{g}\left(v_\alpha^2\frac{d^2w}{d\alpha^2} + v_\beta^2\frac{d^2w}{d\beta^2}\right)_{\substack{\alpha=\xi\\ \beta=\eta}}\right] \tag{3.9}$$

于是由(3.4)，(3.5)，(3.9)便可求得$C_{mn}(t)$

$$C_{mn}(t)=-\frac{P\left[N(\xi,\eta)-\frac{1}{g}\left(v_\alpha^2\frac{d^2w}{d\alpha^2}+v_\beta^2\frac{d^2w}{d\beta^2}\right)_{\substack{\alpha=\xi\\ \beta=\eta}}\right]\chi_m(\xi)\psi_n(\eta)}{\iint\chi_m^2(\alpha)\psi_n^2(\beta)d\alpha d\beta} \qquad (3.10)$$

由(3.4)、(3.5)、(3.10)可知：除了在$M(\xi,\eta)$之外，$C_{mn}(t)$都为零．

按照R．Willis的方法[1][32][33]，若在(3.10)式中的w用一集中力作用于壳体$M(\xi,\eta)$点的静力挠度来表示，则上述问题将得到简化，从而得到本问题的近似解；于是可将由移动质量所引起的扁壳强迫振动的非线性问题变为求解线性非齐次常微分方程(2.6)的初值问题．

四、具 体 算 例

设有一水平放置的矩形底、周边简支的圆柱扁壳，α为母线，β为圆弧线，此时$\psi_1=0$，$k_1=0$，$k_2=\frac{1}{R}$，R为壳体的半径．（图2）

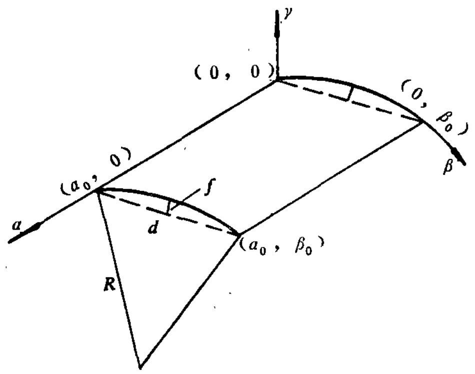

图 2

今选取

$$\left.\begin{aligned}U_m(\alpha)&=\chi_m(\alpha)=\sin\lambda_m\alpha,\\ V_n(\beta)&=\psi_n(\beta)=\sin\mu_n\beta\end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

可满足应力函数φ及挠度函数w的边界条件．其中

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{\alpha_0},\quad \mu_n=\frac{n\pi}{\beta_0}.$$

我们已知一集中力P作用于周边为简支的圆柱壳体的$M(\xi,\eta)$点，在任一点的静力挠度为

$$w(\alpha,\beta)=-\frac{4Pg}{\alpha_0\beta_0\gamma h}\cos\left(\psi_2-\frac{\eta}{R}\right)\sum_m\sum_n\frac{1}{\omega_{mn}^2}\sin\lambda_m\xi\ \sin\mu_n\eta\sin\lambda_m\alpha\ \sin\mu_n\beta \quad (4.2)$$

上式总和号下的ω_{mn}^2可由(2.7)计算而得，其值为

$$\omega_{mn}^2=\frac{g}{\gamma h}\left[D(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2+\frac{Eh}{R^2}\frac{\lambda_m^4}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\right]\quad (m,n=1,2,\ \cdots,\ \infty) \qquad (4.3)$$

由(4.2)可求得

$$\left(\frac{d^2w}{d\alpha^2}\right)_{\substack{\alpha=\xi\\ \beta=\eta}}=\frac{4Pg}{\alpha_0\beta_0\gamma h}\cos\left(\psi_2-\frac{\eta}{R}\right)\sum_m\sum_n\frac{\lambda_m^2}{\omega_{mn}^2}\sin^2\lambda_m\xi\sin^2\mu_n\eta \qquad (4.4)$$

设重量为P的载荷从壳体上$\alpha=0$边上的一点$(0,\eta)$出发，并只沿着α坐标线以等速v_α运动，显然$v_\beta=0$；为了求得问题的近似解，我们将(4.4)代入(3.10)，同时令$\xi=v_\alpha t$，于是从(3.10)可得到

$$C_{mn}(t)=-\frac{4P}{\alpha_0\beta_0}\cos\left(\psi_2-\frac{\eta}{R}\right)\sin\lambda_m v_\alpha t\sin\mu_n\eta$$

$$+\left(\frac{4P}{\alpha_0\beta_0}\right)^2\frac{1}{\gamma h}\cos\left(\psi_2-\frac{\eta}{R}\right)\sum_m\sum_n\left(\frac{v_\alpha\lambda_m}{\omega_{mn}}\right)^2\sin^3\lambda_m v_\alpha t\sin^3\mu_n\eta \qquad (4.5)$$

由上式可看出$C_{mn}(t)$的第一项表示线性项，而第二项为非线性项．现在可由(2.6)的第二式求出$B_{mn}(t)$．若设初始条件为零，于是就得到扁壳由移动质量所引起的强迫振动问题的解．

这可以用求方程(2.6)的第二式的特殊积分而得：

$$B_{mn}(t)=\frac{g}{\gamma h\omega_{mn}}\int_0^t C_{mn}(\tau)\sin\omega_{mn}(t-\tau)d\tau \tag{4.6}$$

将(4.5)代入(4.6)进行积分，就得到

$$\begin{aligned}B_{mn}(t)=&-\frac{4Pg}{\alpha_0\beta_0\gamma h}\cos\left(\psi_2-\frac{\eta}{R}\right)\frac{\sin\mu_n\eta}{\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2}\left(\frac{\lambda_m v_a}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t-\sin\lambda_m v_a t\right)\\&+\left(\frac{4P}{\alpha_0\beta_0}\right)^2\frac{g}{(\gamma h)^2}\cos\left(\psi_2-\frac{\eta}{R}\right)\sum_m\sum_n\frac{(\lambda_m v_a)^2}{\omega_{mn}^3}\\&\cdot\sin^3\mu_n\eta\left[-\frac{3}{4}\frac{\omega_{mn}\sin\lambda_m v_a t}{\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2}+\frac{1}{4}\frac{\omega_{mn}\sin3\lambda_m v_a t}{9\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2}\right.\\&\left.+\frac{6\lambda_m^3v_a^3\sin\omega_{mn}t}{(\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2)(9\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2)}\right]\end{aligned} \tag{4.7}$$

由(2.6)的第一式可得到$A_{mn}(t)$

$$A_{mn}(t)=\frac{Eh}{R}\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}B_{mn}(t) \tag{4.8}$$

上式中的$B_{mn}(t)$由(4.7)确定。

故由(2.2)、(4.7)及(4.8)得到所求的应力函数及法向挠度函数的解答为

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha,\beta,t)=&\left\{-\frac{4PgE}{\alpha_0\beta_0\gamma R}\cos\left(\psi_2-\frac{\eta}{R}\right)\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\cdot\frac{\sin\psi_n\eta}{\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2}\right.\\&\cdot\left[\frac{\lambda_m v_a}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t-\sin\lambda_m v_a t\right]+\left(\frac{4P}{\alpha_0\beta_0}\right)^2\frac{Egv_a^2}{\gamma^2Rh}\cos\left(\psi_2-\frac{\eta}{R}\right)\\&\cdot\sum_m\sum_n\frac{\lambda_m^4}{\omega_{mn}^3(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\left[-\frac{3}{4}\frac{\omega_{mn}\sin\lambda_m v_a t}{\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2}+\frac{1}{4}\frac{\omega_{mn}\sin3\lambda_m v_a t}{9\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2}\right.\\&\left.\left.+\frac{6\lambda_m^3v_a^3\sin\omega_{mn}t}{(\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2)(9\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2)}\right]\right\}\sin\lambda_m\alpha\cdot\sin\mu_n\beta\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}w(\alpha,\beta,t)=&\left\{-\frac{4Pg}{\alpha_0\beta_0\gamma h}\cos\left(\psi_2-\frac{\eta}{R}\right)\frac{\sin\mu_n\eta}{\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2}\left[\frac{\lambda_m v_a}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t\right.\right.\\&\left.-\sin\lambda_m v_a t\right]+\left(\frac{4P}{\alpha_0\beta_0}\right)^2\frac{g}{(\gamma h)^2}\cos\left(\psi_2-\frac{\eta}{R}\right)\sum_m\sum_n\frac{(\lambda_m v_a)^2}{\omega_{mn}^3}\\&\cdot\sin^3\mu_n\eta\left[-\frac{3}{4}\frac{\omega_{mn}\sin\lambda_m v_a t}{\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2}+\frac{1}{4}\frac{\omega_{mn}\sin3\lambda_m v_a t}{9\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2}\right.\\&\left.\left.+\frac{6\lambda_m^3v_a^3\sin\omega_{mn}t}{(\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2)(9\lambda_m^2v_a^2-\omega_{mn}^2)}\right]\right\}\sin\lambda_m\alpha\cdot\sin\mu_n\beta\end{aligned} \tag{4.10}$$

由上二式可看出，当$v_a=\omega_{mn}/3\lambda_m$及$v_a=\omega_{mn}/\lambda_m$时，该二式的分母为零，$w$及$\varphi$将无限增大；因此，这时壳体将发生共振，对应于此时的移动质量的速度v_a就称为临界速度，并用$(v_a)_{cr}$来表示。

当不考虑载荷的质量时，我们将只得到一组共振条件[24,25]：$(v_a)_{cr}=\omega_{mn}/\lambda_m$，而当我们考虑移动载荷的质量时，我们将得到一组更小的临界速度：$(v_a)_{cr}=\omega_{mn}/3\lambda_m$。因为在不考虑移动载荷的质量时，在(4.9)和(4.10)中将不出现非线性项，共振的条件只有一组

$$\lambda_m^2 v_a^2-\omega_{mn}^2=0 \quad (m,n=1,2,3,\cdots) \tag{4.11}$$

若考虑移动载荷的质量时，(4.5)、(4.7)、(4.9)及(4.10)中均增添了附加的非线性项，即含有P^2的项，因此从该项就得到了出现于(4.9)、(4.10)分母中的附加的共振条件

$$9\lambda_m^2 v_a^2-\omega_{mn}^2=0 \quad (m,n=1,2,3,\cdots) \tag{4.12}$$

比较(4.11)与(4.12)，从(4.12)得到的临界速度将是从(4.11)得到的临界速度的三分之一。这在实际中是可能发生的，因而是比较重要的，若不考虑移动载荷的质量，那么这个结果是得不到的，因此用(4.12)就能确定壳体上有移动载荷作用时，壳体发生共振的最小的临界速度。

五、数 例

让我们举一个具体的数例。设有一混凝土圆柱扁壳(图 2)，$E=5.6\times10^4\mathrm{kg/cm^2}$，壳长$a_0=50.4\mathrm{m}$，水平弦长$d=20.6\mathrm{m}$，拱高$f=4.15\mathrm{m}$，壳厚$h=10\mathrm{cm}$，比重$\gamma=1.6\times10^{-3}\mathrm{kg/cm^3}$，相应于不同振型的固有频率$\omega_{mn}$及对应的临界速度$(v_a)_{cr}$经过计算将结果列于表中：

表1

ω_{mn} \ $(v_a)_{cr}$	ω_{11}	ω_{21}	ω_{31}	ω_{41}	ω_{51}	单 位
	3.36	1.56	1.18	2.63	4.08	弧度/秒
$(v_a)_{cr}=\dfrac{\omega_{mn}}{\lambda_m}$	53.93	12.52	6.31	10.54	13.10	米/秒
$(v_a)_{cr}=\dfrac{\omega_{mn}}{3\lambda_m}$	17.98	4.17	2.10	3.51	4.37	米/秒

六、结 束 语

1. 从上表可看出，对应于最小固有频率ω_{31}的最小临界速度是2.1米/秒，这种情况是很有可能发生的，为了防止壳体的共振，因此载荷的移动速度必须使它和临界速度保持一定差值。

2. 由(4.9)及(4.10)得到周边简支的圆柱扁壳的两组共振条件，从而也得到两组临界速度，其中有一个是最小。

3. 当不计及移动载荷的质量时，我们只得到一组共振条件，而当考虑移动载荷的质量时，将得到两组共振条件，从而得到更小的临界速度，前后两种情形的临界速度之比是三比一。

4. 本文所讨论的方法是一种简化了的近似解法，也可以使用其它方法，可能导致研究非线性的参数共振问题[29~31]，或采用逐次迭代法、摄动法[26]等。

参 考 文 献

[1] Willis, R., *Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures*, H. M. Stationery Office, London, (1849).

[2] Stokes, G. G., Discussions of a differential equation related to the breaking of railway bridges, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 8, Part 5, (1867), 707—735.

[3] Stokes, G. G., *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge, 2, (1867), 179.

[4] Zimmermann, H., Die Schwingungen eines Traegers mit Bewegter Last, Berlin, (1896).

[5] Petroff, N. P., *Mem. Russian Imperial Tech. Soc.*, (1903).

[6] Krylov, A. N., Uber die Erzwungenen Schwingungen von Gleichformigen Elastischen Staben, *Math. Ann.* 61, (1905), 211.

[7] Крылов А. Н., *О Некоторых Дифференциалных Уравнениях Математической Физики, Имеюших Приложение в Технических Вопросах*, изд.5-е, Гостехиздат, (1950).

[8] Lee, E. H., On a paradox in beam vibration theory, *Quarterly of Appl. Math.* Vol. X, №3, (1952), 290.

[9] Timoshenko, S., *Bull. Polytech. Inst. Kiev*, (1908).

[10] Timoshenko, S., Erzwungene Schwingungen Prismatishe Stabe, *Z. Math. u Phys.*, **59**, (1911), 163.

[11] Timoshenko, S., *Phil. Mag.*, **43**, (1922), 1018.

[12] Inglis, C. E., *Proc. Inst. Civil Engrs.* London, 218, (1924).

[13] Inglis, C. E., *A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges*, Cambridge Univ. Press, London, (1934).

[14] Jeffcott, H. H., *Phil. Mag., Ser.* 7, **8**, (1929), 66.

[15] Steuding, H., *Ing.-Arch.*, **5**, (1934), 275.

[16] Schallenkamp, A., *Ing.-Arch.*, **8**, (1937), 182.

[17] Odman, T. A., *Bull. Swedish Cement and Concrete Research Inst.*, 14(1948).

[18] Bühler, A., Stosswirkungen bei eisernen Eisenbahnbrücken, Druckschrift Intern. Kongr. Brückenbau, Zürich, (1926).

[19] Hort, W., Stossbeanspruchungen und Schwingungen, Bautechnik, (1928).

[20] Streletzky, N., Ergebnisse der Experimentellen Brückenuntersuchungen, Berlin, (1928).

[21] Ayre, R. S., Ford, G. and L. S., Jacobsen, *J. Appl. Mech.*, 17, (1950), 1; 391.

[22] Диментберг М. Ф., *Инж. Журн.* 1, №2, (1961), 97—105.

[23] Киселев В. А., *Теория Пластин и Оболочек*, Изд. АН УССР, Киев, (1962).

[24] 陈靖东、钟灼然，运动载荷引起的扁壳振动，建筑学报，2 (1962)，27—30.

[25] 成祥生，在弹性地基上的正交各向异性扁壳由移动载荷作用而引起的强迫振动．江苏省力学学会论文，(1964).

[26] 叶开沅，计及行动载荷质量及惯性力影响的列车过桥动力理论（摘要)，科学通报，二月号，(1963)，50—52.

[27] Ониашвили О.Д., *Некоторые Динамические Задачи Теории Оболочек*, АН СССР, (1957).

[28] Власов В.З., *Общая Теория Оболочек*, Гостехиздат., (1949).

[29] Болотин В. В., *ТРУДЫ МИИТ*, Вып. 74, (1950); Вып. 76, (1952).

[30] Болотин В. В., *Динамическая Устойчивость Упругих Систем*, (1956).

[31] Вольмир А. С., *Нелинейная Динамика Пластинок и Оболочек*, Изд. Наука, (1972).

[32] Barlow, P., *Treatise on the Strength of Timber, Cast Iron and Malleable Iron*, London, (1851).

[33] Timoshenko, S., *Vibration Problems in Engineering*, Second Edition, (1937).

Forced Vibrations of Elastic Shallow Shell Due to the Moving Mass

Cheng Xiang-sheng

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

This paper discusses the forced vibrations of the elastic shallow shell due to the moving mass by means of the variational method. The text mentions a series of problems such as the forced vibrations, resonance conditions and critical speed and so forth.