应用数学和力学，第6卷第3期（1985年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

带参数微分方程边值问题的追赶法在流体力学中的应用*

郭本铁 应玉燕 陈邦国 徐宝智

（浙江大学，1983年7月5日收到）

摘　要

本文首先介绍带参数微分方程边值问题的追赶法（包括共轭方法及拟线性化方法），然后用追赶法计算流体力学润滑方程定解问题的一个实例，其数值结果比较满意。

一、带参数微分方程两点边值问题的追赶法

所谓带参数微分方程两点边值问题是求下述方程组

$$\dot{y}_i=f_i(t;\ y_1,\ \cdots\cdots,\ y_n;\ \mu_1,\ \cdots,\ \mu_l)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ t_0\leqslant t\leqslant t_f) \tag{1.1}$$

满足边值条件：

$$y_i(t_0)=c_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r) \tag{1.2}$$

$$y_{i_m}(t_f)=d_m \qquad (m=1,\ 2,\ \cdots,\ s;\ 1\leqslant i_m\leqslant n) \tag{1.3}$$

的解，其中 c_i，d_m 是给定的参数，μ_1，$\cdots$，μ_l 是 l 个待定的参数，$n+l=r+s$。我们假定函数 $f_i(t,\ y,\mu)$ 在 $(t,\ y,\ \mu)$ 空间的某一区域内（其中 $t\in(\alpha,\ \beta)\supseteq[t_0,\ t_f]$）连续，且对每一$\mu\in R_\mu=\{\mu/\mu_i\in(c_i,\ d_i),\ i=1,\ \cdots,\ l\}$，方程（1.1）Cauchy 问题的解存在且唯一。

当带参数微分方程两点边值问题（1.1），（1.2），（1.3）（以下简称为问题 P_μ），$l=0$ 时，即为不带参数的情况在文献［1］中已详细讨论。因此，在这里仅给出解问题 P_μ 的共轭方法和拟线性方法。

（Ⅰ） 线性边值问题 P_μ 的共轭方法

对于线性边值问题 P_μ，可将它归结为一线性代数方程求解（而非迭代过程）。现考察满足边值条件（1.2），（1.3）线性参数微分方程

$$\dot{y}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)y_j+\sum_{j=1}^{l}\beta_{ij}(t)\mu_j+\gamma_i(t)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.4}$$

* 钱伟长推荐。

的解。

方程组（1.4）对应的共轭组为

$$\dot{x}_i=-\sum_{j=1}^{n}a_{ji}(t)x_j \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.5}$$

以 x_i，y_i 分别乘（1.4），（1.5）的第 i 个方程，并对 i 从 1 到 n 求和，得

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)=\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\beta_{ij}(t)\right)\mu_j+\sum_{i=1}^{n}x_i\gamma_i(t) \tag{1.6}$$

以 Kronecker 符号函数

$$x_i^{(m)}(t_f)=\begin{cases}1 & i=i_m\\ 0 & i\neq i_m\end{cases} \qquad (m=1,\ 2,\ \cdots,\ s) \tag{1.7}$$

作共轭组（1.5）的初值条件，得初值问题（1.5），（1.7）的 s 个线性无关解组 $X^{(m)}(t)=(x_1^{(m)}(t),\ \cdots,\ x_n^{(m)}(t))^T(1\leqslant m\leqslant s)$，对关系式(1.6)在$[t_0,\ t_f]$区间上求积，并由(1.2)，(1.3)及（1.7）可得

$$\sum_{i=r+1}^{n}x_i^{(m)}(t_0)y_i(t_0)+\sum_{j=1}^{l}\left(\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}x_i^{(m)}(t)\beta_{ij}(t)dt\right)\mu_j$$

$$=d_m-\sum_{i=1}^{r}x_i^{(m)}(t_0)c_i-\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{n}x_i^{(m)}(t)\gamma_i^{(t)}dt \quad (m=1,2,\cdots,s) \tag{1.8}$$

此式是关于 s 个变元，即缺少的初值 $y_{r+1}(t_0),\cdots,y_n(t_0)$和参数 $\mu_1,\cdots,\mu_l$ 的线性方程组。

假如（1.8）有解，则由所得的解及（1.2）作定解条件积分方程组（1.4）即得所求解。

（Ⅱ） 非线性边值问题 P_μ 的共轭方法

假定 $y(t)$是关于参数 μ 一般问题 P_μ 的解，而 δy 和 $\delta\mu$ 分别是 $y(t)$ 和 μ 的变分，它们满足下面的微分方程组

$$\dot{y}_i(t)+\delta\dot{y}_i(t)=f_i(t;\ y_1(t)+\delta y_1(t),\cdots,y_n(t)+\delta y_n(t);\ \mu_1+\delta\mu_1,\cdots,\mu_l+\delta\mu_l)$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{1.9}$$

展开（1.9）的右端函数为变元（y，μ）的 Taylor 级数并保留其一阶项，由（1.1）得变分组

$$\delta\dot{y}_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\delta y_i(t)+\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial f_i}{\partial \mu_j}\delta\mu_j \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1.10}$$

此处$\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$，$\dfrac{\partial f_i}{\partial \mu_j}$在$(t,\ y_1(t),\ \cdots,\ y_n(t);\ \mu_1,\cdots,\mu_l)$处取值，它是（1.9）的线性近似组

$$\dot{x}_i=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}x_j \tag{1.11}$$

应用上面对线性边值问题 P_μ 所作的类似方法，同样地可得到下述的关系式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t_f)\delta y_i(t_f) - \sum_{i=1}^{n} x_i(t_0)\delta y_i(t_0) = \sum_{j=1}^{l}\int_{t_0}^{t_f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\frac{\partial f_i}{\partial \mu_j}\right)\delta\mu_j \tag{1.12}$$

我们称它为基本关系式。

变分 $\delta y_i(t)$可看作问题 P_μ 的精确解（实际在一般情况下它多为$[t_0, t_f]$区间上的数值解）与用适当的方法给出参数 $\mu_1, \cdots, \mu_l$ 和缺少的初值 $y_{r+1}(t_0), \cdots, y_n(t_0)$ 的近似值作为Cauchy 问题定解条件所得到的近似解（它一般也是数值解）之间的偏差，后者可由一迭代过程逐步产生。

首先适当的给出参数 $\mu_1, \cdots, \mu_l$ 和缺少的初值 $y_{r+1}(t_0), \cdots, y_n(t_0)$ 的初始估计，由积分方程组（1.1）得初始近似 $y^{(0)}(t)$，令

$$\delta y_i^{(k)}(t) = y_i(t) - y_i^{(k)}(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_f;\ i=1,2,\cdots,n;\ k=0,1,2,\cdots) \tag{1.13}$$

此处 $y_i(t)$ 为问题 P_μ 的精确解，$y_i^{(k)}$为 $y_i(t)$的第 k 次近似，在各次迭代中恒取

$$y_i^{(k)}(t_0) = y_i(t_0) = c_i \qquad (i=1,2,\cdots,r)$$

或即

$$\delta y_i^{(k)}(t_0) = 0 \qquad (i=1,2,\cdots,r;\ k=0,1,2,\cdots) \tag{1.14}$$

根据基本关系式（1.12）可求得各次迭代中 μ_j $(j=1,2,\cdots,l)$和 $y_i(t_0)$ $(i=r+1,\cdots,n)$ 的校正值，为此，我们仍以

$$x_{i(k)}^{(m)}(t_f) = \begin{cases} 1 & i=i_m \\ 0 & i \neq i_m \end{cases} \qquad (m=1,2\cdots,s;\ k=1,2,\cdots,l) \tag{1.15}$$

在区间$[t_0, t_f]$上反向积分共轭组（1.11）得到它的 s 个线性无关解组，并由此得到下面的关于所求校正值的线性代数方程组

$$\sum_{i=r+1}^{n} x_{i(k)}^{(m)}(t_0)\,\delta y_i^{(k)}(t_0) + \sum_{j=1}^{l}\int_{t_0}^{t_f}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i(k)}^{(m)}(t)\frac{\partial f_i}{\partial \mu_j}\right)dt\,\delta\mu_j = \delta y_{i_m}^{(k)}(t_f) \tag{1.16}$$

其中

$$\delta y_{i_m}^{(k)}(t_f) = y_{i_m}(t_f) - y_{i_m}^{(k)}(t_f) = d_m - y_{i_m}^{(k)}(t_f)$$

由解此方程组而后得到下次迭代的参数值和初值

$$\left.\begin{aligned} &\mu_j^{(k+1)} = \mu_j^{(k)} + \delta\mu_j^{(k)} \qquad (j=1,2,\cdots,l) \\ &y_i^{(k+1)}(t_0) = y_i(t_0) = c_i \quad (i=1,2,\cdots,r) \\ &y_i^{(k+1)} = y_i^{(k)}(t_0) + \delta y_i^{(k)}(t_0) \qquad (i=r+1,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

当 $\max\left\{\left|\delta y_{i_m}^{(k)}(t_f)\right|,\ m=1,2,\ \cdots,\ s\right\} < \varepsilon$，终止迭代，这里 ε 为予先给定的容限。关于迭代收敛性讨论见文献[2]。

最后以初值$y_i^{(k)}(t_0)=c_i$ $(i=1,2,\cdots,r)$,$y_i^{(k)}(t_0)$ $(i=r+1,\cdots,n)$和参数$\mu_j^{(k)}$ $(j=1,2,\cdots,l)$积分方程（1.1）即得所求问题的 k 次近似解$y_i^{(k)}(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$。

（Ⅱ） 非线性问题 P_μ 的拟线性化方法

设已求得问题 P_μ 的 k次近似解 $y^{(k)}(t) = (y_1^{(k)}(t), \cdots, y_n^{(k)}(t))^T$，$\mu^{(k)} = (\mu_1^{(k)}, \cdots, \mu_l^{(k)})^T$，记 $\delta y^{(k)}(t)$，$\delta\mu^{(k)}$分别是 k 次近似解$y^{(k)}(t)$，$\mu^{(k)}$ 的变分，并将方程（1.1）的右端在 $y^{(k)}(t)$，

$\mu^{(k)}$处 Taylor 展开并保留一次项得

$$\dot{y}_i^{(k+1)}(t)=f_i(t;y_1^{(k)}(t),\cdots,y_n^{k}(t);\ \mu_1^{(k)},\cdots,\ \mu_l^{(k)})$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\delta y_j^{(k)}(t)+\sum_{j=1}^{l}\frac{\partial f_i}{\partial \mu_j}\delta\mu_j^{(k)}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \qquad (1.18)$$

方程（1.18）是带参数的一阶线性方程组，用来代替方程（1.1）。满足边值条件：

$$y_i^{(k+1)}(t_0)=c_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r) \qquad (1.19)$$

$$y_{i_m}^{(k+1)}(t_f)=d_m \qquad (m=1,\ 2,\ \cdots,\ s) \qquad (1.20)$$

于是可用上面（Ⅰ）中提供的线性边值问题 P_μ 的共轭方法求解，理论上我们要求

$$\lim_{k\to\infty} y_i^{(k)}(t)=y_i(t) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$\lim_{k\to\infty} \mu_j^{(k)}=\mu_j \qquad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$$

此处 $y_i(t)$，μ_j，$(i=1,\ 2,\ \cdots n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ 是非线性边值问题 P_μ 的精确解。在实际计算中我们要求：

$$\max_{i=1,2,\cdots,n}\ \max_{t_0\le t\le t_f}\left|\ y_i^{(k+1)}(t)-y_i^{(k)}(t)\ \right|<\varepsilon_1$$

$$\max_{j=1,2,\cdots,l}\ \max_{t_0\le t\le t_f}\left|\ \mu_j^{(k+1)}-\mu_j^{(k)}\ \right|<\varepsilon_2$$

ε_1，ε_2 是事先指定的小正数。则 $y^{(k)}(t)$，$\mu^{(k)}$ 就是问题的近似解。

关于拟线性方法的收敛性的讨论见文献[3]。

二、追赶法在流体力学中的应用

设流体力学润滑问题的简化力学模型如图 1 所示。AB 和 OC 为固体界面，且 OC 以速度U_0沿 x 向运动，两界面间空间充满层流状态的不可压缩润滑流体。

引入无量纲量

$$\left.\begin{aligned}&\bar{x}=\frac{x}{L},\ \bar{y}=\frac{y}{h_i},\\&\bar{u}=\frac{u}{U_0},\ \bar{v}=\frac{v}{U_0}\cdot\frac{L}{h_i}\\&\bar{p}=\frac{ph_i^2}{L\mu U_0},\quad \overline{Q}=\frac{Q}{U_0h_i}\\&Re^*=\frac{U_0L}{\gamma}\left(\frac{h_i}{L}\right)^2\end{aligned}\right\}\qquad(2.1)$$

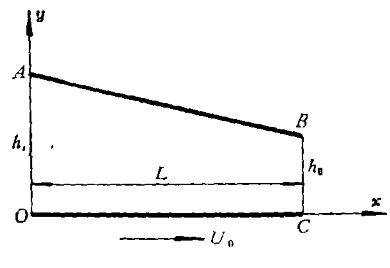

图 1 润滑问题的力学模型

无量纲化后的润滑问题的方程为：

$$\left.\begin{aligned}&Re^*\left(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\right)=-\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}+\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}\\&\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=0\end{aligned}\right\}\qquad(2.2)$$

边界条件：

$$\left.\begin{array}{l}\bar{u}(\bar{x},\ 0)=1,\ \bar{v}(\bar{x},\ 0)=0\\ \bar{u}(\bar{x},\ \bar{y}_h)=\bar{v}(\bar{x},\ \bar{y}_h)=0,\ \bar{p}(0)=\bar{p}(1)=0\end{array}\right\} \tag{2.3}$$

式中

$$\bar{y}_h=k_h\bar{x}+1,\ k_h=\frac{h_0}{h_i}-1 \qquad (0\leqslant\bar{x}\leqslant 1)$$

引入流函数 ψ，使

$$\bar{u}=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{y}},\ \bar{v}=-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}} \tag{2.4}$$

则方程（2.2）可写为：

$$Re^*\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{y}}\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{x}}\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{y}^2}\right)=-\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}+\frac{\partial^3\bar{\psi}}{\partial\bar{y}^3},\quad \frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}-\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{y}\partial\bar{x}}=0 \tag{2.5}$$

设流函数 $\bar{\psi}$ 的级数解为：

$$\bar{\psi}=\kappa\sum_{n=0}^{\infty}f_n(\eta)\delta^n \tag{2.6}$$

式中

$$\eta=\frac{h_i\bar{y}}{h},\quad \delta=\frac{h}{h_i}=\bar{y}_h,\quad \kappa=\frac{1}{k_h}$$

记

$$\left(\frac{h}{h_i}\right)^2\frac{1}{\kappa}\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\delta^n \tag{2.7}$$

则（2.5）第一式又可化为：

$$Re^*\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}f'_n\delta^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)f'_n\delta^n\right)-\left(\sum_{n=0}^{\infty}nf_n\delta^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}f''_n\delta^n\right)\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}f'''_n\delta^n-\sum_{n=0}^{\infty}D_n\delta^n \tag{2.8}$$

将方程（2.8）两端展开的 δ 各次幂的系数相等，即可求得如下的常微分方程组：

$$\left.\begin{array}{ll}\delta^0: & f'''_0+Re^*f'_0f'_0=D_0\\ \delta^1: & f'''_1+Re^*(f''_0f_1+f'_0f'_1)=D_1\\ \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots\\ \delta^n: & f'''_n+Re^*\sum\limits_{m=n}^{0}\left\{mf''_{n-n}f_n-(n-m-1)f'_nf'_{n-m}\right\}=D_n\\ & \qquad (n\geqslant 2)\end{array}\right\} \tag{2.9}$$

由（2.3），（2.4），（2.6），（2.7），可求得函数 f 的条件为：

$$f_0(0)=f'_0(0)=f'_0(1)=0,\quad f_0(1)=\frac{\overline{Q}}{\kappa} \tag{2.10}$$

$$f_1(0)=f_1(1)=f_1'(1)=0,\quad f_1'(0)=\frac{1}{\kappa} \tag{2.11}$$

…………

$$f_n(0)=f_n(1)=f_n'(0)=f_n'(1)=0 \qquad (n\geqslant 2) \tag{2.12}$$

式（2.10）中$\overline{Q}=\bar{\psi}|_{\eta=1}$是待定值，要根据压力$\bar{p}$的终值条件$\bar{p}(1)=0$来决定。

由上可看出经处理后原先的非线性偏微分方程（2.2）转化为一常微分方程组（2.9），式中除（2.9)第一式为带参数非线性常微分方程外，其它均为带参数线性常微分方程。求解这类带参数的微分方程边值问题，可用如上所述的追赶法。下以方程（2.9)第一式为例用二种方法求解并进行比较。

（Ⅰ） **共轭法**

令 $$y_1=f_0,\quad \dot{y}_1=y_2=f_0',\quad \dot{y}_2=y_3=f_0'' \tag{2.13}$$

化方程（2.9)第一式为一阶方程组

$$\dot{y}_1=y_2,\quad \dot{y}_2=y_3,\quad \dot{y}_3=-R^*ey_2^2+D_0 \tag{2.14}$$

边值条件：

$$y_1(0)=0,\ y_2(0)=0;\ y_1(1)=\frac{\overline{Q}}{\kappa},\ y_2(1)=0 \tag{2.15}$$

（2.14）的变分方程为：

$$\left.\begin{aligned}&\delta\dot{y}_1=\delta y_2,\quad \delta\dot{y}_2=\delta y_3\\&\delta\dot{y}_3=-2Re^*y_2\delta y_2+\delta D_0\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

其共轭方程组为：

$$\dot{x}_1=0,\quad \dot{x}_2=-x_1+2Re^*y_2x_3,\quad \dot{x}_3=-x_2 \tag{2.17}$$

以x_i，$\delta y_i(i=1,\ 2,\ 3)$分别乘（2.17），（2.16）的第i式，并对i从1到3求和，然后在$[0,\ 1]$区间积分得如下基本关系式

$$\sum_{i=1}^{3}x_i(1)\delta y_i(1)-\sum_{i=1}^{3}x_i(0)\delta y_i(0)=\left(\int_0^1 x_3dt\right)\delta D_0 \tag{2.18}$$

在求解时，我们首先给出参数D_0和所缺少的初值$y_3(0)$及无量纲流量$\overline{Q}$的初始估计值，然后积分方程组(2.14)以求得初始近似$y_i^{(0)}(\eta)$，在各次迭代中，恒取$y_1^{(k)}(0)=y_1(0)=0$，

$$y_2^{(k)}(0)=y_2(0)=0\quad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

式（2.18）的系数和右端项由 Kronecker 符号函数在区间$[0,\ 1]$上反向积分共轭方程组（2.17）所得到的二个线性无关的解组来确定，并由此根据已知的（2.15）中的终值条件及式（2.18）求得校正值$\delta y_3(0)$，δD_0后，于是迭代的参数值和初值即为：

$$\left.\begin{aligned}&D_0^{(k+1)}=D_0^{(k)}+\delta D_0^{(k)},\quad y_1^{(k+1)}(0)=y_1(0)=0\\&y_2^{(k+1)}(0)=y_2(0)=0,\quad y_3^{(k+1)}(0)=y_3^{(k)}(0)+\delta y_2^{(k)}(0)\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

当$\max\{|\delta y_{i_m}^{(k)}(1)|,\ m=1,2\}<\varepsilon$，终止迭代。由所求得的参数$D_0$及所缺少的初值条件$y_3(0)$，结合已给的初值条件$y_1(0)$，$y_2(0)$，于是得原方程（2.14）的数值积分所需要的完整的一组初值条件，从而解出方程组（2.14），即带参数的非线性方程（2.9)第一式解出。

（Ⅱ） **拟线性化方法**

按第一节中所述的拟线性化方法将非线性方程组（2.14）转化为如下的拟线性方程：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{y}_1^{(k+1)}=y_2^{(k+1)},\quad \dot{y}_2^{(k+1)}=y_3^{(k+1)}\\&y_3^{(k+1)}=-2Re^*y_2^{(k)}y_2^{(k+1)}+D_0^{(k+1)}+Re^*[y_2^{(k)}]^2\end{aligned}\right\}\quad(2.20)$$

$$(k=0,1,2,\cdots)$$

详细的算法见第一节，这里不再赘述。

为了对共轭法与拟线性化方法的计算结果进行比较，给定边值条件：$y_1(0)=0$，$y_2(0)=0$，$y_1(1)=-0.171991$，$y_2(1)=0$，取积分步长$H=0.05$，选取所缺少的原始迭代初值$y_3(0)=-0.75$，$Re^*=2$，$M=2$，$h_i/h_0=2$，经四次迭代结果如下：

η	共轭法				拟线性化法			
	y_1	y_2	y_3	D_0	y_1	y_2	y_3	D_0
0	0	0	-1.0357	2.10697	0	0	-1.03664	2.10660
0.1	-4.827×10^{-2}	-0.9305×10^{-1}	-0.8250		-0.4832×10^{-2}	-0.9313×10^{-1}	-0.8262	
0.2	-0.1791×10^{-2}	-0.1651	-0.6160		-0.179×10^{-1}	-0.16629	-0.61727	
0.3	-0.3716×10^{-1}	-0.2164	-0.4090		-0.3719×10^{-1}	-0.21665	-0.41032	
0.4	-0.605×10^{-1}	-0.24708	-0.2040		-0.605×10^{-1}	-0.24741	-0.20512	
0.5	-0.8589×10^{-1}	-0.25729	0.209×10^{-9}		-0.8599×10^{-1}	-0.25771	-0.933×10^{-3}	
0.6	-0.1112	-0.2470	0.2042		-0.11143	-0.24760	0.2032	
0.7	-0.134	-0.2170	0.4080		-0.13463	-0.21702	0.4084	
0.8	-0.1538	-0.1651	0.6160		-0.15415	-0.16535	0.6153	
0.9	-0.1669	-0.93×10^{-1}	0.8252		-0.16731	-0.9388×10^{-1}	0.8243	
1.0	-0.171791	-0.18×10^{-10}	1.0350		-0.17223	-0.942×10^{-3}	1.0347	

由上可看出用共轭法和拟线性化方法所计算的结果很接近。

以上所述是关于带参数的非线性方程(2.9)第一式的解法，至于其余的线性方程的解法参阅第一节中关于线性边值问题P_μ的共轭方法来求解，这里不再重述。

至此，常微分方程组(2.9)全部解出，即润滑问题的方程(2.2)解得。根据所求得的压力分布$p(\bar{x})$，我们不难计算出惯性项对润滑流的承载能力$\overline{W}$的影响，其结果与文献[4]中所述的相一致，见图2。图中$\overline{W}_2$是考虑惯性项的承载能力，$\overline{W}_1$是不考虑惯性项的承载能力。

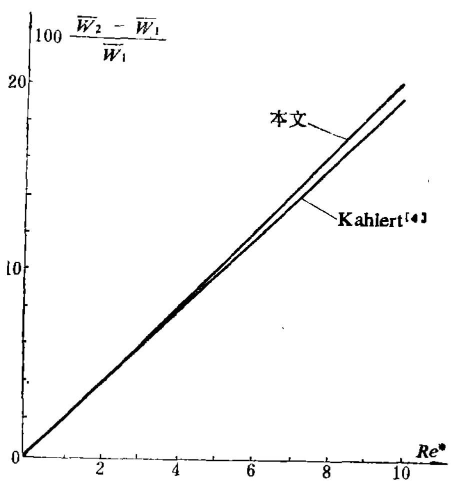

图2　惯性项对承载能力$\overline{W}$的影响

参 考 文 献

[1] Roberts, S. M. and J. S. Shipman, *Two-Point Boundary Value Problems; Shooting Methods*, Elsevier. New York (1972).

[2] 李兆华,参数微分方程两点边值问题最优化算法及其应用(I),高等学校计算数学学报,1(1980), 54—63.

[3] 徐宝智、吴雄, 关于参数微分方程两点边值问题的拟线性化方法, 浙江大学学报, 4(1983), 81—96.

[4] Kahlert, W., *Der Einflub der Trägheitskräfte bei der Hydrodynamischen Schmiermitteltheorie Ingenieur-Archir*, 16 (1948), 321—342.

Application of Shooting Methods for Two-Point Boundary Value Problems of Ordinary Differential Equations with Parameters in Hydrodynamics

Guo Ben-tia　　Ying Yu-yan

Chen Bang-guo　　Qu Ba-zhi

(*Zhejiang University, Hangzhou*)

Abstract

In this paper, first we introduce the shooting method (including the method of adjoints and the method of quasi-linearization for two-point boundary value problems of ordinary differential equations with parameters, and give out an example of solving hydrodynamic lubrication equation by using the shooting method. The calculated results are satisfactory.