应用数学和力学，第6卷第3期（1985年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

随机积分和微分方程解的存在性准则*

丁 协 平

（四川师范学院，1984年1月24日收到）

摘 要

在[1]中我们已证明了一个一般的随机不动点定理并给出了某些应用，在本文中我们将给出该结果的进一步应用。首先证明了一随机 Darbo 不动点定理，然后利用此定理在紧性假设下给出了非线性随机 Volterra 积分方程和非线性随机微分方程 Cauchy 问题随机解的存在性准则。我们的定理改进和推广了 Lakshmikantham[2]，Vaugham[3,4]，De Blasi 和 Myjak[5]等人的结果。

一、引 言

众所周知随机积分和微分方程的理论已广泛应用于许多应用科学领域，例如工程、物理、化学、生物学和系统科学等(参见[6～8])。因此将决定性积分方程和微分方程理论中的结果作随机推广已成为许多数学工作者研究的课题。在[1]中我们推广 Engl[8,9]和 Bocsan[10]的结果得到了一个一般的随机不动点定理并给出了对积分和微分方程的某些应用。本文将给出该结果的进一步应用。我们首先证明了一个随机 Darbo 不动点定理，然后利用此定理，在紧性假设下给出了非线性随机 Volterra 积分方程和非线性随机微分方程 Cauchy 问题解的存在性准则。我们的定理改进和推广了 Lakshmikantham[2]，Vaughan[3,4]，De Blasi 和 Myjak[5]等人的最近结果。

二、预 备 知 识

设(X,d)是一Polish 空间，即一可分完备距离空间，$(\Omega,\ \mathscr{A},\ \mu)$是完备$\sigma$-有限测度空间，显然完备概率测度空间$(\Omega,\ \mathscr{A},\ P)$是完备$\sigma$-有限测度空间，我们用$\mathrm{CL}(X)$表$X$的一切非空闭子集的族，$H(\cdot,\cdot)$表由$d$在$\mathrm{CL}(X)$上诱导的 Hausdorff 距离。

下面我们仍采用[1,8,9]中的某些记号和定义。

定义 2.1 称映射$E:\Omega\to\mathrm{CL}(X)$是可测(弱可测或紧可测)的，如果对$X$的任意闭(开或紧)子集$A$有$E^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega:E(\omega)\cap A\neq\phi\}\in\mathscr{A}$。

显然在我们的假设下E的弱可测性和可测性是等价的(见[5,11,12])。我们用$G_r(E)=\{(\omega,x)\in\Omega\times X:x\in E(\omega)\}$表$E$的图。

---

* 钱伟长推荐。

定义 2.2 称映射 $T:G_r(E)\to CL(X)$ 是具有随机定义域 E 的连续集值随机映射，如果

(i) 对每一 $\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot):E(\omega)\to(CL(X),H(\cdot,\cdot))$ 连续；

(ii) 对每一 $x\in X$ 和每一闭集 $A\subset X$，

$$\{\omega\in\Omega:x\in E(\omega)\text{ 和 }T(\omega,x)\cap A\neq\phi\}\in\mathcal{A}$$

称映射 $x:\Omega\to X$ 是 T 的广义不动点，如果对每一 $\omega\in\Omega$ 有 $x(\omega)\in E(\omega)$ 和 $x(\omega)\in T(\omega,x(\omega))$，称 $x:\Omega\to X$ 是 T 的随机不动点，如果它是 T 的一广义不动点且是可测的，即对一切闭集 $A\subset X$ 有 $x^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega:x(\omega)\in A\}\in\mathcal{A}$。称映射 $T:G_r(E)\to X$ 是具有随机定义域 E 的连续点值随机映射，如果由 $\tilde{T}(\omega,x)=\{T(\omega,x)\}$ 定义的映射 $\tilde{T}:G_r(E)\to CL(X)$ 是具有随机定义域 E 的连续集值随机映射。

引理 2.1 ([1,系1]) 令 T 是具有随机定义域 E 的连续集值随机映射，如果 T 有广义不动点，则 T 有随机不动点且由

$$F(\omega)=\{x\in E(\omega):x\in T(\omega,x)\}$$

定义的映射 $F:\Omega\to CL(X)$ 是紧可测的并且存在 T 的(至多)可数个随机不动点 $x_m(\omega)(m=1,2,\cdots)$ 使得对一切 $\omega\in\Omega$，有 $F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega)\}}$，(序列 $\{x_m(\omega)\}$ 的闭包)。

在引理 2.1 中，当 $T:G_r(E)\to X$ 为点值映射时作为特殊情形我们得到

引理 2.2 设 $T:G_r(E)\to X$ 是具有随机定义域 E 的连续点值随机映射，如果 T 有广义不动点，则 T 有随机不动点，且由

$$F(\omega)=\{x\in E(\omega):x=T(\omega,x)\}$$

定义的映射 $F:\Omega\to CL(X)$ 是紧可测的并且存在 T 的(至多)可数个随机不动点 $x_m(\omega)(m=1,2,\cdots)$，使得对一切 $\omega\in\Omega$，有 $F(\omega)=\overline{\{x_m(\omega)\}}$。

下面始终设 $(X,\|\cdot\|)$ 是可分 Banach 空间，α 是定义在 X 的一切有界子集的族上的 Kuratowski 非紧性测度。α 的有关性质可见[13]。

定理 2.1 设 $T:G_r(E)\to X$ 是具有随机定义域 E 的连续点值随机映射，如果

(i) 对每一 $\omega\in\Omega$，$E(\omega)$ 为 X 的一有界闭凸子集且有 $T(\omega,\cdot):E(\omega)\to E(\omega)$，

(ii) 对每一 $\omega\in\Omega$ 和 $B\subset E(\omega)$ 有

$$\alpha(T(\omega,B))\leqslant\varphi(\omega,\alpha(B)) \tag{2.1}$$

其中 $T(\omega,B)=\{T(\omega,x):x\in B\}$，$\varphi:\Omega\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足：对每一 $\omega\in\Omega$，$\varphi(\omega,\cdot)$ 非减和 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n(\omega,t)=0$，$\varphi^n(\omega,t)=\varphi(\omega,\varphi^{n-1}(\omega,t))(\forall n\geqslant1)$，$\varphi^0(\omega,t)=t$，则 T 有一随机不动点。

证明 对任意固定的 $\omega\in\Omega$，令 $E_1(\omega)=E(\omega)$，$E_2(\omega)=\overline{co}T(\omega,E_1(\omega))$（$T(\omega,E_1(\omega))$ 的凸闭包)，由假设 (i) 有 $T(\omega,E_1(\omega))\subset E_1(\omega)$ 和 $E_1(\omega)$ 是闭凸集推得 $E_2(\omega)\subset E_1(\omega)$。于是我们可归纳地定义 $E_{n+1}(\omega)=\overline{co}\,T(\omega,E_n(\omega))$，且有 $E_{n+1}(\omega)\subset E_n(\omega)(\forall n\geqslant1)$。由 α 的性质和假设 (ii) 我们有

$$\begin{aligned}\alpha(E_{n+1}(\omega))&=\alpha(\overline{co}\,T(\omega,E_n(\omega)))=\alpha(T(\omega,E_n(\omega)))\\&\leqslant\varphi(\omega,\alpha(E_n(\omega)))\leqslant\cdots\leqslant\varphi^n(\omega,\alpha(E_1(\omega)))\to0,\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

因此 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n(\omega)\neq\phi$ 是一有界闭凸集且有 $T(\omega,\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n(\omega))\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n(\omega)$。由 Shauder 不动点定理知存在 $x(\omega)\in E(\omega)$ 使得 $x(\omega)=T(\omega,x(\omega))$。再由 $\omega\in\Omega$ 的任意性知存在映射 $x:\Omega\to X$

是 T 的广义不动点，于是由引理 2.2 推得T有随机不动点。

注2.1 定理 2.1 是[4]的定理 2.1 的随机推广. 因为定理2.1对[14]内定义的抽象非紧性测度仍成立，故它也是[14]中定理2.1的随机推广.

系2.1 设$T:G_r(E)\to X$ 是具有随机定义域E的连续点值随机映射，如果

(i) 定理 2.1 的假设(i)成立，

(ii) 存在函数 $\beta:\Omega\to[0,1)$使得对每一 $\omega\in\Omega$和一切 $B\subset E(\omega)$有

$$\alpha(T(\omega,B))\leqslant\beta(\omega)\alpha(B)$$

则T有一随机不动点。

证明 在定理 2.1 中令 $\varphi(\omega,t)=\beta(\omega)t$, $\forall(\omega,t)\in\Omega\times[0,\infty)$时，立即得到本系结论。

注2.2 系 2.1 是Darbo 不动点定理的随机推广.

令 G 为X的一开子集, $J=[t_0,t_0+a]\subset R$ 是实直线上的一闭区间. 记

$$C[\Omega\times J,G]=\{x:\Omega\times J\to G\mid \forall\omega\in\Omega,\ x(\omega,\cdot)\text{ 连续和 }\forall t\in J,\ x(\cdot,t)\text{ 可测}\}$$

$$C[\Omega\times J\times J\times G,\ G]=\{K:\Omega\times J\times J\times G\to G\mid\forall\omega\in\Omega,\ K(\omega,\cdot,\cdot,\cdot)$$
$$\text{连续和}\forall(t,s,x)\in J\times J\times G,K(\cdot,t,s,x)\text{ 可测}\}$$

引理 2.3 设 $x_0\in C[\Omega\times J,\ G]$, 如果对每一 $\omega\in\Omega$ 存在 $\sigma(\omega)>0$ 使得 $S(x_0(\omega,t_0),\sigma(\omega))\subset G$ ($S(x,r)$表X内以 x 为心 r 为半径的开球)，则存在可测函数 $\eta:\Omega\to(0,\infty)$ 使得 $S(x_0(\omega,t_0),\ \eta(\omega))\subset G$, 则若有某 $\theta:\Omega\to(0,\infty)$ 满足 $S(x_0(\omega,t_0),\ \theta(\omega))\subset G$, 则 $\eta(\omega)\geqslant\theta(\omega)$, $\forall\omega\in\Omega$。

证明 因为 $x_0\in C[\Omega\times J,G]$, 故函数

$$\omega\mapsto\eta(\omega)=d(x_0(w,t_0),\ X\backslash G)$$
$$=\inf_{y\in X\backslash G}d(x_0(\omega,t_0),y)$$

是可测的，容易验证 $\eta(\omega)$满足引理 2.3 的要求。

引理 2.4 设 $x_0\in C[\Omega\times J,G]$, $\eta:\Omega\to(o,\infty)$ 可测，则存在可测函数 $\delta:\Omega\to(0,\infty)$使得

$$|t-t_0|<\delta(\omega)\Rightarrow\|x_0(\omega,t)-x_0(\omega,t_0)\|<\frac{\eta(\omega)}{2}$$

证明 我们定义映射 $f:\Omega\times J\to R$ 如下：

$$f(\omega,t)=\|x_0(\omega,t)-x_0(w,\ t_0)\|-\frac{\eta(\omega)}{2}$$

因为 $x_0\in C[\Omega\times J,G]$, 由[6, p16]知 $f\in C[\Omega\times J,R]$, 从而映射 $\omega\mapsto\Gamma(\omega)=\{t\in J:f(\omega,t)<0\}$ 是非空可测的。虽然 $f_0(\omega)=t_0\ \forall\omega\in\Omega$, 是 Γ的一可测选择，又因对每一 $\omega\in\Omega$, $x_0(\omega,t)$ 在 J 上一致连续，故存在 $\delta_1(\omega)>0$ 使得$[t_0,t_0+\delta_1(\omega))\subset\Gamma(\omega)$。于是从[5]的引理 2.3 推知存在可测函数 $\delta:\Omega\to(0,\infty)$满足引理 2.4 的要求。

令 $C[J,X]=\{x:J\to X\mid x\text{ 连续},\ \|x(t)\|_J=\sup_{t\in J}\|x(t)\|\}$。则 $(C[J,\ X)\|\cdot\|_J)$ 是一可分 Banach 空间。

引理 2.5[[6]] $x\in C[\Omega\times J,X]$ 的充要条件是映射$\omega\mapsto x(\omega,\cdot)$被视为从$\Omega$到$C[J,X]$的函数时是可测的。

引理 2.6 设 $x_0\in C[\Omega\times J,G]$; $\eta:\Omega\to(0,\infty)$和 $\gamma:\Omega\to(0,a)$ 是可测函数。令$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$, 则由 $E(\omega)=\{x\in C[J_0(\omega),G]:\|x(t)-x_0(\omega,t)\|_{J_0(\omega)}\leqslant\frac{1}{2}\eta(\omega)\}$ 定义的映射 $E:\Omega\to CL(C[J_0(\omega),G])$ 是可测的。

证明 注意到 $\omega\mapsto J_0(\omega)$是紧集值可测映射，由[12，定理Ⅲ，8]存在$J_0(\omega)$的可择选择序列$\{\sigma_n\}$使得$\overline{\{\sigma_n(\omega)\}}=J_0(\omega)$。于是由假设和［6，p16]知对任意$x\in C[J_0(\omega),G]$函数

$$\|x(t)-x_0(\omega,t)\|_{J_0(\omega)}=\sup_{t\in J_0(\omega)}\|x(t)-x_0(\omega,t)\|$$
$$=\sup_n\|x(\sigma_n(\omega))-x_0(\omega,\sigma_n(\omega))\|$$

是可测的，从而我们得到函数

$$\omega\mapsto d(x,E(\omega))=\max\left\{0,\|x(t)-x_0(\omega,t)\|_{J_0(\omega)}-\frac{1}{2}\eta(\omega)\right\}$$

可测，其中$d(x,E(\omega))=\inf\limits_{y\in E(\omega)}\|x(t)-y(t)\|_{J_0(\omega)}$。再由[12，定理Ⅲ，30]知$E:\Omega\to \mathrm{CL}(C[J_0(\omega),G])$是可测的。

三、主要结果

定理 3.1 设 $x_0\in C[\Omega\times J,G]$，$K\in C[\Omega\times J\times J\times G,G]$，假设下列条件成立：

(A_1) 存在可测函数$M:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$有$\|K(\omega,t,s,x)\|\leqslant M(\omega)$，$\forall(t,s,x)\in J\times J\times G$

(A_2) 对每一$\omega\in\Omega$，$I\subset J$，$t\in J$和有界集$B\subset G$，$\lim\limits_{t\to\tau}(\sup\int_I\|K(\omega,t,s,\psi(\omega,s))-K(\omega,\tau,s,\psi(\omega,s))\|ds\mid\psi\in C[\Omega\times I,B]=0$

(A_3) 存在可测函数 $\beta:\Omega\to(0,\infty)$ 使得对每一 $\omega\in\Omega$ 和有界集 $B\subset G$ 有.

$$\alpha(K(\omega,J,J,B))\leqslant\beta(\omega)\alpha(B)$$

则存在可测函数 $\gamma:\Omega\to(0,a)$ 使得非线性随机 Volterra 积分方程

$$x(\omega,t)=x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x,(\omega,s))ds \tag{3.1}$$

在 $J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$ 上有一随机解 $x^*\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$。

证明 设 $\eta(\omega)$ 和 $\delta(\omega)$ 如在引理 2.3 和 2.4 内一样被定义。令 $\gamma(\omega)=\min\{a,\delta(\omega),\eta(\omega)/2M(\omega),b/\beta(\omega)\}$ 其中 $b\in(0,1)$，则 $\gamma:\Omega\to(0,a)$ 是一可测函数。如象在引理 2.6 内一样定义映射 $E:\Omega\to\mathrm{CL}(C[J_0(\omega),G])$，由引理 2.6 知此映射是可测的。且显然对每一$\omega\in\Omega$，$E(\omega)$是$C[J_0(\omega),X]$内的非空有界闭凸集。我们定义映射$T:\Omega\times C[J_0(\omega),G]\to C[J_0(\omega),G]$如下：

$$T(\omega,x(\omega,t))=x_0(\omega,t)+\int_{t_0}^{t}K(\omega,t,s,x(\omega,s))ds \tag{3.2}$$

由［1，§4，引理 2］推得对每一 $x\in C[J_0(\omega),G]$，有

$$T(\cdot,x(\cdot,t)):\Omega\to C[J_0(\omega),G]$$

是可测的。完全仿照［3］中定理 3.1 的证明可证得对每一 $\omega\in\Omega$，$T(\omega,\cdot):E(\omega)\to E(\omega)$ 连续和对每一 $\omega\in\Omega$ 及 $B\subset E(\omega)$ 有

$$\alpha(T(\omega,B))\leqslant\gamma(\omega)\cdot\beta(\omega)\alpha(B)$$

因为 $\gamma(\omega)\cdot\beta(\omega)\leqslant b<1$。由系 2.1 推得$T$有一随机不动点，$x^*(\omega,t)$。它即是随机方程(3.1)的一随机解。且由引理 2.5 知 $x^*\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$

注 3.1 定理 3.1 是[3]中定理2.1和[2]中定理3.1 的随机推广。

定理 3.2 设 $x_0\in C[\Omega\times J,G]$，$K\in C[\Omega\times J\times J\times G,G]$。如果定理 3.1 中的条件($A_1$)和($A_2$)成立，条件($A_3$)由下列条件代替：

$(A_3)'$ 对每一$\omega\in\Omega$和对每一有界集$B\subset G$，有

$$\alpha(K(\omega,J,J,B))\leqslant\varphi(\omega,\alpha(B)).$$

其中φ满足定理2.1内假设。

则定理3.1的结论成立。

证明 设$\eta(\omega)$和$\delta(\omega)$如在引理2.3和2.4内一样被定义。令$\gamma(\omega)=\min\left\{a,\ \delta(\omega),\ \frac{\eta(\omega)}{2M(\omega)},1\right\}$则$\gamma:\Omega\to(0,a)$可测，于是在引理2.6内定义的$E:\Omega\to \mathrm{CL}(C[J_0(\omega),G])$可测且对每一$\omega\in\Omega$，$E(\omega)$是$C[J_0(\omega),G]$内的非空有界闭凸集。如在定理3.1内一样定义映射$T:\Omega\times C[J_0(\omega),G]\to C[J_0(\omega),G]$。按定理3.1的证明对每一$x\in C[J_0(\omega),G]$，$T(\cdot,x(\cdot,t)):\Omega\to C[J_0(\omega),G]$可测，对每一$\omega\in\Omega$和有界集$B\subset E(\omega)$，完全仿照[4]中定理3.1的证明可证得$T:E(\omega)\to E(\omega)$连续和

$$\alpha(T(\omega,B))\leqslant\varphi(\omega,\alpha(B))$$

因此由定理2.1推得T有一随机不动点$x^*(\omega,t)$，它即是随机方程(3.1)的一随机解且由引理2.5知$x^*(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0(\omega),\ G]$。

注3.2 定理3.2是[4]中定理3.1的随机推广。

定理3.3 设$x_0:\Omega\to G$可测，$f:\Omega\times J\times G\to G$满足对每一$\omega\in\Omega$，$f(\omega,\cdot,\cdot)$连续和对每一$(s,x)\in J\times G,f(\cdot,s,x)$可测。假设下列条件成立：

(B_1) 存在可测函数$M:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$，$\|f(\omega,s,x)\|\leqslant M(\omega),\ \forall(s,x)\in J\times G$，

(B_2) 存在可测函数$\beta:\Omega\to(0,\infty)$使得对每一$\omega\in\Omega$和有界集$B\subset G$有

$$\alpha(f(\omega,J,B))\leqslant\beta(\omega)\alpha(B)$$

则存在可测函数$\gamma:\Omega\to(0,a)$，使得随机Cauchy问题

$$\left.\begin{array}{l} dx(\omega,t)/dt=f(\omega,t,x(\omega,t)) \\ x(\omega,t_0)=x_0(\omega)\end{array}\right\}\tag{3.3}$$

在$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$上有一随机解$x^*(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$。

证明 因为求随机Cauchy问题(3.3)的随机解等价于求下面非线性随机Volterra积分方程的随机解：

$$x(\omega,t)=x_0(\omega)+\int_{t_0}^{t}f(\omega,s,x(\omega,s))ds\tag{3.4}$$

由在定理3.1中令$x_0(\omega,t)=x_0(\omega)$和$K(\omega,t,s,x)=f(\omega,s,x)$对一切$t\in J$成立。则由本定理假设容易验证定理3.1内条件$(A_1)$，$(A_2)$和$(A_3)$均成立，于是由定理3.1知存在$\gamma_0:\Omega\to(0,a)$使得随机方程(3.4)在$J_0(\omega)$上有一随机解$x^*(\omega,t)$，它也就是随机Cauchy问题(3.3)的一随机解且$x^*\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$。

注3.3 仔细比较定理3.3和[5]中定理4.2的假设条件，可知定理3.3是该定理的改进和推广。

利用定理3.2和定理3.3的证明方法我们也容易证明下面定理。

定理3.4 设$x_0:\Omega\to G$可测$f:\Omega\times J\times G\to G$满足定理3.3内假设，如果定理3.3内条件$(B_1)$成立，条件$(B_2)$由下面条件代替

$(B_2)'$ 对每一$\omega\in\Omega$和有界集$B\subset G$有

$$\alpha(f(\omega,J,B))\leqslant\varphi(\omega,\alpha(B))$$

其中φ满足定理2.1内假设。

则存在可测函数$\gamma:\Omega\to(0,a)$，使得随机Cauchy问题(3.3)在$J_0(\omega)=[t_0,t_0+\gamma(\omega)]$上

有一随机解. $x^*(\omega,t)\in C[\Omega\times J_0(\omega),G]$.

参 考 文 献

[1] 丁协平, 一般随机不动点定理及其应用, 应用数学和力学, 5, 5(1984), 699—708.

[2] Lakshmikantham, V., *In Volterra Integral Equations*, Springer-verlag, 737(1979), 120—126.

[3] Vaughn, R. L., Existence and comparison results for nonlinear Volterra integral equations in a Banach space, *Appl. Analysis*, 7(1978), 337—348.

[4] Vaughn, R. L., *In Nonlinear Equations in Abstract Spaces*, Academic Press, New York (1978), 463—468.

[5] De Blasi, F. S. and J. Myjak, Random differential equations on closed subsets of a Banach space, *J. Math. Anal. Appl.* 90(1982), 273—285.

[6] Bharucha-Reid, A. T., *Random Integral Equations*, Academic Press, New York (1972).

[7] Tsokos, C. J. and W. J. Padgett, *Random Integral Equations with Applications to Life Sciences and Engineering*, Academic Press, New York(1974).

[8] Engl, H. W., A general stochastic fixed-point theorem for continuons random operators on stochastic domains, *J. Math. Anal. Appl.*, 66(1978), 220—231.

[9] Engl, H. W., Random fixed point theorems, *In Nonlinear Equations in Abstract Spaces*, Acadmic Press, New York(1978), 67—80.

[10] Bocsan Gh., A general random fixed point theorem and applications to random equations, *Rev. Roum. Math. Pureset. Appl.* 26(3)(1981), 375—379.

[11] Himmelberg, C. J., Measurable relations, *Fund Math.* 87(1975), 53—72.

[12] Castaing, C. and M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Springer-Verlag 580(1977).

[13] Lakshmikantham, V. and S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, New York(1981).

[14] Rus, I. A., On a theorem of Eisenfeld-Lakshmikantham, *Nonlinear Anal. TMA.* 7(3) (1983), 279—281.

Criteria for the Existence of Solutions to Random Integral and Differential Equations

Ding Xie-ping

(Sichuan Teacher's College, Chengdu)

Abstract

In[1], we proved a general random fixed point theorem and gave some applications. In this paper, we shall give further applications of the theorem. We first obtain a random Darbo's fixed point theorem, using the theorem, we give the criteria for the existence of solutions under compactness hypotheses to nonlinear random Volterra integral equations and the Cauchy problem of nonlinear random differential equations. Our theorems improve and generalize some main results of Lakshmikantham[2], Vaughan[3,4] and De Blasi, Myjak[5].