应用数学和力学，第6卷第3期（1985年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

一类算子B样条的递推公式*

许 跃 生

（中山大学计算机系，1984年3月26日收到）

摘 要

本文从广义差商-Green函数-B样条的观点出发，给出了以正则系统 $\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^{m}$ 为基解组的一类微分算子的正规B样条的递推公式.

一、引 言

给定 $[a,b]$ 中的一组点 $\{x_i\}_{i=1}^{k}$，

$$\Delta: \ a<\underbrace{x_1=\cdots=x_1}_{m_1}<\cdots<\underbrace{x_k=\cdots=x_k}_{m_k}<b\Leftrightarrow a<t_1\leqslant\cdots\leqslant t_m<b \tag{1.1}$$

其中，$m_1,\cdots,m_k$ 和 m 均是正整数，$m_i\leqslant m$，$m=\sum\limits_{i=1}^{k}m_i$.

设 $\varphi(x)\in C^{m-1}[a,b]$，$X_m=\text{Span}\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^{m}$.

定义1 对于指定的点组(1.1)关于 $\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^{l}$的$l$阶广义重差商有定义，$l=1,2,\cdots,m-1$，我们就称 $\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^{m}$为 $\{x_i\}_{i=1}^{k}$的正则系统. 本文仅讨论正则系统.

定义2 设 L_m 是 m 阶微分算子，称

$$\begin{aligned}\delta(L_m,\ M,\ \Delta)=\{S:\ &S(x)\in N_{L_m},\ x\in(x_i,x_{i+1}),i=0,1,2,\cdots,k;\\ &D^jS(x_i^-)=D^jS(x_i^+),j=0,1,\cdots,m-m_i-1,i=1,\cdots,k\}\end{aligned} \tag{1.2}$$

为L_m的m次样条函数空间. $\dim\delta(L_m,M,\Delta)=n=m+\sum\limits_{i=1}^{k}m_i$. $M=(m_1,\cdots,m_k)$.

我们再给出与 $\delta(L_m,M,\Delta)$ 有关的扩大分划 $\bar{\Delta}$：$y_1\leqslant y_2\leqslant\cdots\leqslant y_{n+m}$ (1.3)

其中，$y_1=\cdots=y_m=a$，$b=y_{n+1}=\cdots=y_{n+m}$，

$$y_{m+1}\leqslant\cdots\leqslant y_n\Leftrightarrow\underbrace{x_1=\cdots=x_1}_{m_1}<\cdots<\underbrace{x_k=\cdots=x_k}_{m_k}.$$

定义3 设 $\{\varphi_i^*(t)\}_{i=1}^{m}$ 是 $L_m^*(D)u(t)=0$的基解组，$G_m(x,t)$是$L_m(D)$的 Green 函数，

* 李灏推荐.

$\varphi_{m+1}^*(t)=\int_a^b G_m(x,t)dx$，其中 $L_m^*(D)$ 是 $L_m(D)$ 的共轭算子，记 $\Phi_{m+1}^*=\{\varphi_i^*(t)\}_{i=1}^{m+1}$。

称

$$B_{i,m}(x)=[y_i,\cdots,y_{i+m}]_{\Phi_{m+1}^*}G_m(x,\cdot)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1.4}$$

为 $\delta(L_m,M,\Delta)$ 的正规 B 样条函数。

引理1 $\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^m$ 是 $[a,b]$ 上的ECT系统当且仅当 $\varphi'(x)>0$，$x\in[a,b]$。ECT系统是任意点组的正则系统。

证明 考虑 Wronsky 行列式：

$$W(1,\varphi(x),\cdots,\varphi^{k-1}(x))=$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(x) & \varphi^2(x) & \cdots\cdots & \varphi^{k-2}(x) & \varphi^{k-1}(x) \\ 0 & \varphi'(x) & 2\varphi(x)\varphi'(x) & \cdots\cdots & (k-2)\varphi^{k-3}(x)\varphi'(x) & (k-1)\varphi^{k-2}(x)\varphi'(x) \\ 0 & 0 & 2(\varphi'(x))^2 & \cdots\cdots & (k-2)(k-3)\varphi^{k-4}(x)(\varphi'(x))^2 & (k-1)(k-2)\varphi^{k-3}(x)(\varphi'(x))^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & (k-2)!(\varphi'(x))^{k-2} & (k-1)\cdots 2\varphi(x)(\varphi'(x))^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & (k-1)!(\varphi'(x))^{k-1} \end{vmatrix}$$

$$=\left(\prod_{i=1}^k(i-1)!\right)(\varphi'(x))^{\frac{1}{2}k(k-1)}>0\quad(k=1,2,\cdots,m)\tag{1.5}$$

当且仅当 $\varphi'(x)>0$。由[2]，引理第一部分得证。引理的第二部分显然。

引理2 设 $\Phi_m=\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$，$\varphi_i(x)\in C^{m-1}[a,b]$，$g(x)\in C^{m-1}[a,b]$ 且 $\tilde{\Phi}_m=\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_{m-1}(x),g(x)\}$ 是(1.1)的正则系统，则对于 $\forall f\in C^{m-1}[a,b]$，

$$[t_1,\cdots,t_m]_{\Phi_m}f=\frac{[t_1,\cdots,t_m]_{\tilde{\Phi}_m}f}{[t_1,\cdots,t_m]_{\tilde{\Phi}_m}\varphi_m}\tag{1.6}$$

证明 $[t_1,\cdots,t_m]_{\Phi_m}f$

$$=\frac{\det\begin{pmatrix} t_1, & \cdots, t_{m-1}, & t_m \\ \varphi_1(x), & \cdots, \varphi_{m-1}(x), & f(x)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} t_1, & \cdots, & t_{m-1}, & t_m \\ \varphi_1(x), & \cdots, & \varphi_{m-1}(x), & \varphi_m(x)\end{pmatrix}}$$

$$=\frac{\det\begin{pmatrix} t_1, & \cdots, & t_{m-1}, & t_m \\ \varphi_1(x), & \cdots, & \varphi_{m-1}(x), & f(x)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} t_1, & \cdots, & t_{m-1}, & t_m \\ \varphi_1(x), & \cdots, & \varphi_{m-1}(x), & g(x)\end{pmatrix}}\cdot\frac{\det\begin{pmatrix} t_1, & \cdots, & t_{m-1}, & t_m \\ \varphi_1(x), & \cdots, & \varphi_{m-1}(x), & g(x)\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} t_1, & \cdots, & t_{m-1}, & t_m \\ \varphi_1(x), & \cdots, & \varphi_{m-1}(x), & \varphi_m(x)\end{pmatrix}}$$

$$=\frac{[t_1,\cdots,t_m]_{\tilde{\Phi}_m}f(x)}{[t_1,\cdots,t_m]_{\tilde{\Phi}_m}\varphi_m(x)}$$

引理3 设 $f(x)$，$g(x)\in C^{m-1}[a,b]$ 且 $f(x)\neq0$，$x\in[a,b]$，则

$$[t_1,\cdots,t_m]_{\Phi_m}f\cdot g=[t_1,\cdots,t_m]_{f^{-1}\otimes\Phi_m}g\tag{1.7}$$

其中 $\Phi_m=\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$，$f^{-1}\otimes\Phi_m=\{f^{-1}\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$。

证明 由行列式的性质和 Leibniz 公式

$[t_1,\cdots,t_m]_{\Phi_m}f\cdot g$

$$= \frac{\det\begin{pmatrix} \underbrace{x_1,\cdots,x_1}_{m_1};\cdots; & \underbrace{x_k,\cdots,x_k}_{m_k} \\ \varphi_1(x),\cdots, \varphi_{m-1}(x), & f(x)g(x) \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \underbrace{x_1,\cdots,x_1}_{m_1};\cdots; & \underbrace{x_k,\cdots,x_k}_{m_k} \\ \varphi_1(x),\cdots, & \varphi_{m-1}(x),\ \varphi_m(x) \end{pmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} (\varphi_1(x_1)/f(x_1)) & \cdots & (\varphi_{m-1}(x_1)/f(x_1)) & g(x_1) \\ (\varphi_1(x_1)/f(x_1))' & \cdots & (\varphi_{m-1}(x_1)/f(x_1))' & g'(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_1(x_1)/f(x_1))^{(m_1-1)} & \cdots & (\varphi_{m-1}(x_1)/f(x_1))^{(m_1-1)} \cdots & g^{(m_1-1)}(x_1)\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_1(x_k)/f(x_k)) & \cdots & (\varphi_{m-1}(x_k)/f(x_k)) & g(x_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\varphi_1(x_k)/f(x_k))^{(m_k-1)} & \cdots & (\varphi_{m-1}(x_k)/f(x_k))^{(m_k-1)} & g^{(m_k-1)}(x_k) \end{vmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \underbrace{x_1,\cdots,x_1}_{m_1};\cdots; & \underbrace{x_k,\cdots,x_k}_{m_k} \\ (f(x))^{-1}\varphi_1(x),\cdots,(f(x))^{-1}\varphi_m(x) \end{pmatrix}}$$

我们曾在[3]中证明了关于 ECT 系统 $\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^{m}$ 的广义差商 Leibniz 公式，事实上只要 $\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^{m}$ 是正则系统时，这一结果同样成立。这里不加证明地引用。

引理4 设 $\Phi_m=\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^{m}$ 是(1.1)的正则系统，对 $\forall f(x),\ g(x)\in C^{m-1}[a,b]$ 有

$$[t_1,\cdots,t_m]_{\Phi_m}f\cdot g=\sum_{i=1}^{m}[t_1,\cdots,\ t_i]_{\Phi_i}f[t_i,\cdots,t_m]_{\Phi_{m-i+1}}g \tag{1.8}$$

二、B样条的递推公式

设 $L_m(D)$ 是以 $\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^{m}$ 为基解组的 m 阶微分算子，$L_m^*(D)$ 是 $L_m(D)$ 的共轭算子。

定理1 $L_m(D)$ 的 Green 函数为

$$G_m(x,t)=\frac{(x-t)_+^0}{(m-1)!}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(t)}{\varphi'(t)}\right)^{m-1} \tag{2.1}$$

定理 1 的证明参见[3]。

定理 2 $L_m^*(D)$ 的零空间 $N_{L_m^*(D)}$ 的一组基为

$$\varphi_{i+1}^*(t)=\frac{(\varphi(t))^{m-1-i}}{(\varphi'(t))^{m-1}}\qquad (i=0,\ 1,\cdots,\ m-1) \tag{2.2}$$

证明 由定理 1，有

$$G_m(x,\ t)=\frac{(x-t)_+^0}{(m-1)!(\varphi'(t))^{m-1}}\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-1-i}C_{m-1}^i(\varphi(x))^i(\varphi(t))^{m-1-i}$$

$$=(x-t)_+^0\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_{i+1}(x)\ \frac{(\varphi(t))^{m-1-i}}{(\varphi'(t))^{m-1}}$$

其中

$$\varphi_{i+1}(x)=\frac{(-1)^{m-1-i}}{(m-1)!}C_{m-1}^{i}(\varphi(x))^{i}\in N_{L_m(D)}$$ 且是 $N_{L_m(D)}$ 的一组基。

另一方面，

$$G_m(x,t)=(x-t)_+^0\sum_{i=0}^{m-1}\varphi_{i+1}(x)\varphi_{i+1}^{*}(t),$$

所以

$$(x-t)_+^0\sum_{i=0}^{m-1}\left\{\frac{(\varphi(t))^{m-1-i}}{(\varphi'(t))^{m-1}}-\varphi_{i+1}^{*}(t)\right\}\varphi_{i+1}(x)\equiv 0$$

由 $\varphi_{i+1}(x)$ ($i=0,1,\cdots,m-1$) 的基底性质，便可知定理 2 真。

由定义 3，与 $\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^{m}$关联的$B$ 样条可表为

$$B_{i,m}(x)=[y_i,\cdots,y_{i+m}]_{\Phi_{m+1}^{*}}\frac{(x-\cdot)_+^0}{(m-1)!}\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(\cdot)}{\varphi'(\cdot)}\right]^{m-1}\quad(i=1,2,\cdots,m)\tag{2.3}$$

其中

$$\Phi_{m+1}^{*}=\left\{\frac{(\varphi(t))^{m-1}}{(\varphi'(t))^{m-1}},\cdots,\frac{\varphi(t)}{(\varphi'(t))^{m-1}},\frac{1}{(\varphi'(t))^{m-1}},\frac{\int_t^b(\varphi(x)-\varphi(t))^{m-1}dx}{(m-1)!(\varphi'(t))^{m-1}}\right\}\tag{2.4}$$

定理3 设 $\tilde{\Phi}_{m+1}=\{(\varphi(t))^{i-1}\}_{i=1}^{m+1}$，$I_m(t)=\int_t^b(\varphi(x)-\varphi(t))^{m-1}dx$，

则

$$B_{i,m}(x)=\frac{[y_i,\cdots,y_{i+m}]_{\tilde{\Phi}_{m-1}}(x-\cdot)_+^0(\varphi(x)-\varphi(\cdot))^{m-1}}{[y_i,\cdots,y_{i+m}]_{\tilde{\Phi}_{m+1}}I_m(t)}\tag{2.5}$$

证明 由 (2.3) 式及引理 3 有

$$B_{i,m}(x)=[y_i,\cdots,y_{i+m}]_{(m-1)!(\varphi'(t))^{m-1}\otimes\Phi_{m+1}^{*}}(x-\cdot)_+^0(\varphi(x)-\varphi(\cdot))^{m-1},$$

$$(m-1)!(\varphi'(t))^{m-1}\otimes\Phi_{m+1}^{*}=\Big\{(m-1)!(\varphi(t))^{m-1},\cdots,(m-1)!\varphi(t),(m-1)!,\int_t^b(\varphi(x)-\varphi(t))^{m-1}dx\Big\}$$

记 $$\tilde{\Phi}_{m+1}^{*}=\left\{1,\varphi(t),\cdots,(\varphi(t))^{m-1},\int_t^b(\varphi(x)-\varphi(t))^{m-1}dx\right\}$$

由 [3] 的引理 3,

$$B_{i,m}(x)=[y_i,\cdots,y_{i+m}]_{\tilde{\Phi}_{m+1}^{*}}(x-\cdot)_+^0[\varphi(x)-\varphi(\cdot)]^{m-1}.$$

由引理 2，本定理得证。

定理 4 由(2.3) 式定义的 B 样条有如下的递推公式：

$$B_{i,m}(x)=\frac{w_i^{m-1}(x)B_{i,m-1}(x)+\tilde{w}_{i+1}^{m-1}(x)B_{i+1,m-1}(x)}{w_i^{m}(y_{i+m})}\tag{2.6}$$

其中

$$w_i^{m-1}(x)=[\varphi(x)-\varphi(y_i)][y_i,\cdots,y_{i+m-1}]_{\tilde{\Phi}_m}\int_t^b(\varphi(x)-\varphi(t))^{m-2}dx,$$

$$\tilde{w}_{i+1}^{m-1}(x)=[\varphi(y_{i+m})-\varphi(x)][y_{i+1},\cdots,y_{i+m}]_{\tilde{\Phi}_m}\int_t^b(\varphi(x)-\varphi(t))^{m-2}dx.$$

证明 令 $c_{i,m}=[y_i,\cdots,y_{i+m}]_{\tilde{\Phi}_{m+1}}I_m(t)$，由定理 3,

$$B_{i,m}(x)=\frac{1}{c_{i,m}}[y_i,\cdots,y_{i+m}]_{\Phi_{m+1}}(x-\cdot)_+^0(\varphi(x)-\varphi(\cdot))^{m-1}.$$

由引理 4,

$$B_{i,m}(x)=\frac{1}{c_{i,m}}\{[y_i]_{\Phi_1}(\varphi(x)-\varphi(\cdot))[y_i,\cdots,y_{i+m}]_{\Phi_{m+1}}(x-\cdot)_+^0(\varphi(x)-\varphi(\cdot))^{m-2}$$
$$+c_{i+1,m-1}B_{i+1,m-1}(x)\}$$

另一方面,

$$B_{i,m}(x)=\frac{1}{c_{i,m}}\{(\varphi(x)-\varphi(y_{i+m}))[y_i,\cdots,y_{i+m}]_{\Phi_{m+1}}(x-\cdot)_+^0(\varphi(x)-\varphi(\cdot))^{m-2}$$
$$+c_{i,m-1}B_{i,m-1}(x)\}$$

故 $$B_{i,m}(x)(\varphi(y_{i+m})-\varphi(y_i))=\frac{1}{c_{i,m}}\{(\varphi(y_{i+m})-\varphi(x))c_{i+1,m-1}B_{i+1,m-1}(x)$$
$$+(\varphi(x)-\varphi(y_i))c_{i,m-1}B_{i,m-1}(x)\}$$

由于 $\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^m$ 是(1.1)的正则系统, 故 $\varphi(y_{i+m})-\varphi(y_i)\neq 0$。

令

$$w_i^{m-1}(x)=[\varphi(x)-\varphi(y_i)][y_i,\cdots,y_{i+m-1}]_{\Phi_m}\int_t^b(\varphi(x)-\varphi(t))^{m-2}dx$$

$$\tilde{w}_i^{m-1}(x)=[\varphi(y_{i+m})-\varphi(x)][y_{i+1},\cdots,y_{i+m}]_{\Phi_m}\int_t^b(\varphi(x)-\varphi(t))^{m-2}dx$$

由上式便得(2.6)式。

作者对黄友谦教授的指导谨表感谢。

参 考 文 献

[1] Schumaker, L. L., *Splines Function*: Basic Theory, New York, (1981).

[2] Karlin, S. and W. J. Studden, *Tchebycheff System*: With Applications in Analysis and Statistics, Interscience, New York, (1966)

[3] 许跃生, 一类广义差商 Leibniz 公式与 Green 函数的递推公式, 应用数学和力学, 5, 3 (1984), 391~399.

Recurrence Formula for B-Splines with Respect a Class of Differential Operators

Xu Yue-sheng

(Department of Computer Science, Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

In this paper, we give recurrence formula for normalized B-Splines with respect to standard system $\{\varphi^{i-1}(x)\}_{i=1}^m$ which is the basic sets of solutions to a class of differential operators from the stand point of generalized divided difference-Green function-B-Splines.