

文章编号: 1000-0887(2004)011-1113-04

# 复合材料叠层板的非线性动力稳定性\*

魏德敏<sup>1</sup>, 杨桂通<sup>2</sup>

(1. 华南理工大学 土木工程系, 广州 510640;  
2. 太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024)

(我刊原编委杨桂通来稿)

摘要: 研究复合材料叠层板的非线性动力稳定性, 分析中考虑大挠度和初始几何缺陷的存在, 得到了不同边界条件和不同铺设方法叠层板在荷载作用下的突变失稳模型及其屈曲临界条件。

关键词: 复合材料; 叠层板; 动力稳定性; 突变理论

中图分类号: O342 文献标识码: A

## 引言

复合材料叠层板结构的动力屈曲是工程实际中具有应用价值和理论意义的研究课题。目前已经取得一系列研究成果<sup>[1,2]</sup>, 特别是近十年来, 其非线性动力屈曲的理论研究取得较大进展<sup>[3,4]</sup>, 但是仍有许多亟待解决的问题, 譬如对动力失稳现象的直观描述, 失稳过程的仿真分析, 非线性动力学方程的解耦和求解等等。

数学的突变理论提供了描述量变引起质变, 渐变引起突变现象的方法, 在弹性结构非线性动力稳定性研究中得到不少应用, 有圆板受集中动荷载时的动力屈曲分析<sup>[5]</sup>, 梁和拱在分布横向荷载作用下的共振屈曲研究<sup>[6,7]</sup>, 薄壁压力管道在内压作用下的突然破裂<sup>[8]</sup>。本文应用初等突变理论, 研究不同边界条件和不同铺设方法复合材料叠层板的非线性动力稳定性, 得到了考虑非线性大挠度和初始几何缺陷情况下板的失稳突变模型及其屈曲临界条件。

## 1 基本方程

考虑四边简支或四边嵌固的矩形复合材料叠层板, 边长为  $a \times b$ , 板厚为  $h$ 。板的几何方程为:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1)$$

当板受  $x$  方向的压力  $N_x = -N_0$  作用时, 板的内力和变形之间的关系为:

$$F = \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

\* 收稿日期: 2003\_05\_30; 修订日期: 2004\_05\_26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272046); 广东省自然科学基金资助项目(020858)

作者简介: 魏德敏(1955—), 女, 四川资中人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86\_20\_87113753; Fax: + 86\_20\_87114632; E\_mail: weidemin@21.cn.com)。

$$\text{其中 } N = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}, \varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, k = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

而刚度系数  $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 6)$  的表达式参见文献[9]。对于正交对称铺设叠层板,  $B_{ij} = 0$ ; 反对称正交铺设叠层板的耦合刚度矩阵的  $B_{ij}$  中除  $B_{11} \neq 0, B_{22} = -B_{11}$  外, 其余均为零。

如果不考虑板的纵向和转动惯性力及横向剪切效应, 由 Hamilton 原理可以导出叠层板的一般动力学方程:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

其中,  $\rho$  是板的单位面积质量。那么, 由方程(1)~(5)可以得到用位移分量  $u, v, w$  表示的一般动力学方程组<sup>[4]</sup>。

假设满足四边简支叠层板边界条件的挠度函数为:

$$w = f(t) \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b). \quad (6)$$

对于四边简支有初始几何缺陷  $w_0 = f_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$  的正交对称铺设叠层板, 将挠度函数(6)式代入其动力学方程组, 通过伽辽金变分则可以导出关于板振幅  $f(t)$  的基本方程<sup>[3]</sup>:

$$\dot{f}(t) + \Omega^2 f(t) + 2\gamma_0^2 f(t) + 3\gamma_0^2 f^2(t) + \gamma^3(t) = \omega^2 f_0 (N_0 / N_{cr}), \quad (7)$$

式中,

$$\Omega^2 = \omega^2 \left[ 1 - \frac{N_0}{N_{cr}} \right], \quad \gamma = \frac{\pi^4}{16ma^4} (A_{11} + 3\alpha^2 A_{22}) \left[ 1 - \frac{A_{12}^2}{A_{11}A_{22}} \right], \quad m = \rho h, \quad \alpha = \frac{a}{b},$$

$$\frac{\omega^2}{N_{cr}} = \frac{\pi^2}{ma^2} \left[ 1 + \alpha^2 \frac{A_{12}}{A_{11}} \right], \quad \omega^2 = \frac{\pi^4}{ma^4} [D_{11} + \alpha^4 D_{22} + 2\alpha^2 (D_{12} + 2D_{66})].$$

假设满足四边嵌固叠层板边界条件的挠度函数为:

$$w = f(t) \sin^2(\pi x/a) \sin^2(\pi y/b),$$

同理可以得到四边嵌固无初始几何缺陷正交反对称铺设叠层板的基本方程<sup>[2]</sup>:

$$\dot{f}(t) + \Omega^2 f(t) + \beta^2(t) + \gamma^3(t) = 0, \quad (8)$$

其中,  $\Omega^2$  同上, 其它系数详见参考文献[4]。

## 2 失稳分析

### 2.1 四边简支无初始缺陷正交对称铺设叠层板

理想叠层板受面内压力和横向分布简谐荷载共同作用, 则板的基本方程为:

$$\dot{f}(t) + \Omega^2 f(t) + \gamma^3(t) = p_0 \sin \theta t. \quad (9)$$

假设板的振幅随时间变化的规律为  $f(t) = F \sin \theta t$ , 将  $f(t)$  代入方程(9), 并且忽略  $\sin 3\theta t$  项, 可得以  $F$  为状态变量,  $u$  和  $v$  为控制变量的尖点突变模型:

$$F^3 - uF - v = 0, \quad (10)$$

其中,  $u = 4(\theta^2 - \Omega^2)/\gamma, v = 4p_0/\gamma$ 。该突变流形的分叉点集是  $u-v$  平面上的钻石形区域的边界, 其表达式为:

$$4u^3 - 27v^2 = 0. \quad (11)$$

由图1可以看出, 当载荷频率  $\theta \leq \Omega$  (即  $u \leq 0$ ) 时, 板的振幅  $F$  随着控制变量  $v$  的变化连续变化,  $F$  与  $v$  之间存在着——对应的关系, 不会发生振幅的突变。当  $\theta > \Omega$  (即  $u > 0$ ) 时,

如果控制变量  $u$  和  $v$  处在钻石形区域之外(即  $v > \sqrt{4u^3/27}$ ) 时, 板的振幅  $F$  与  $u, v$  之间的关系是一一对应的。如果  $u$  和  $v$  处在钻石形区域之内(即  $0 < v < \sqrt{4u^3/27}$ ) 时, 板的振幅可能处在突变流形的上叶( $F$  为正值) 或者下叶( $F$  为负值), 这取决于  $v$  的变化过程: 若  $v$  是由小逐渐增大, 振幅处于突变流形的下叶, 当  $v$  增大到  $v = \sqrt{4u^3/27}$  时, 振幅  $F$  将突然由负变正, 发生突跳; 若  $v$  是由大逐渐减小, 振幅  $F$  始终为正值, 处于突变流形的上叶。

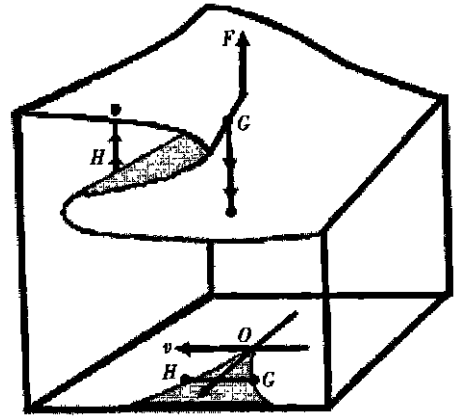


图1 式(10)表示的尖点突变流形及其分叉点集

由以上的分析可知, 当  $\theta > \Omega, p_0 = \sqrt{16(\theta^2 - \Omega^2)^3/(27\gamma)}$  时, 板可能发生振动屈曲。

显然, 板的屈曲临界条件与横向载荷的频率  $\theta$ 、板的纵向自振频率  $\Omega$  及刚度系数  $A_{ij}$  有关。

### 2.2 四边简支有初始缺陷正交对称铺设叠层板

对于四边简支无初始缺陷正交对称铺设叠层板, 将动力学方程(7)两边同乘以  $f$ , 然后积分可得:

$$f \ddot{f}(t)/2 + \Omega^2 f^2/2 + \gamma \dot{f}^2/2 + \gamma f \dot{f}^3 + \gamma^2 f^4/4 = \omega^2 f_0 N_0 N_{cr}^{-1} f \quad (12)$$

当  $f \geq 0$  时, 有

$$f_{max}^3 + a f_{max}^2 + b f_{max} + c_1 = 0, \quad (13)$$

其中,  $a_1 = 4f_0, b_1 = 2\Omega^2/\gamma + 4f_0^2, c_1 = \omega^2 f_0 N_0/N_{cr}$ 。令  $f_{max} = F_1 - a/3$ , 则有:

$$F_1^3 - u_1 F_1 - v_1 = 0, \quad (14)$$

这里,  $u_1 = a^2/3 - b_1, v_1 = a_1 b/3 - 2a^3/27 + c_1$ 。

由此可知, 当初始几何缺陷达到一定的量值, 即  $f_0^2 > 1.5\Omega^2/\gamma$  时, 会引起板的振幅发生突然变化, 这种振幅的突变有可能造成板的屈曲破坏。因此, 在叠层板的加工过程中应当控制初始几何缺陷的数值, 使其低于临界值。

### 2.3 四边嵌固无初始缺陷正交反对称铺设叠层板

将四边嵌固初无初始缺陷正交反对称铺设叠层板的基本方程(8)进行积分, 可以得到关于最大振幅  $f_{max}$  的方程:

$$f_{max}^3 + a_2 f_{max}^2 + b_2 f_{max} = 0, \quad (15)$$

其中,  $a_2 = 4\beta/(3\gamma), b_2 = 2\Omega^2/\gamma$ 。令  $f_{max} = F_2 - a_2/3$ , 经过类似的推导, 可以得到以  $F_2$  为状态变量,  $u_2$  和  $v_2$  为控制变量的尖点突变模型:

$$F_2^3 - u_2 F_2 - v_2 = 0, \quad (16)$$

其中  $u_2 = a_2^2/3 - b_2, v_2 = a_2 b_2/3 - 2a_2^3/27$ 。

因此, 当  $8\beta^2 - 27\gamma\Omega^2 > 0$  时, 叠层板的振幅  $F_2$  可能发生突然变化, 引起板的屈曲破坏。

## 3 结 语

本文应用初等突变理论, 对不同支承条件、不同铺设方法的复合材料叠层板在载荷作用下的非线性动力稳定性进行分析, 得出以下结论:

1) 四边简支无初始缺陷正交对称铺设叠层板在预压应力和横向分布简谐载荷共同作用

下,失稳的临界条件为:

$$16(\theta^2 - \Omega^2)^3 - 27p_0^2 \gamma = 0 \quad (17)$$

2) 四边简支有初始缺陷正交对称铺设叠层板在预压应力作用下失稳的临界条件为:

$$32 \left[ \frac{2f_0^2}{3} - \frac{\Omega^2}{\gamma} \right]^3 - 27f_0^2 \left[ \frac{8\Omega^2}{3\gamma} + \frac{16}{27}f_0^2 + \frac{\omega^2 N_0}{N_{cr}} \right]^2 = 0 \quad (18)$$

3) 四边嵌固无初始缺陷正交反对称铺设叠层板在预压应力作用下失稳的临界条件为:

$$\left[ \frac{16\beta^2}{27\gamma^2} - \frac{2\Omega^2}{\gamma} \right]^3 = \frac{27}{4} \left[ \frac{8\beta\Omega^2}{9\gamma^2} - \frac{128\beta^3}{729\gamma^3} \right]^2 = 0 \quad (19)$$

总之,如果结构非线性振动方程的解能够用初等突变模型描述,那么结构就可能发生突跳失稳,失稳的临界条件就是该突变模型的分叉点集。

### [参 考 文 献]

- [1] Birman V. Dynamic stability of rectangular laminated composite plates[J]. Computers and Structures, 1986, 24(2): 233—238.
- [2] 周承侗,王列东,刘正宁. 复合材料叠层板非线性动力稳定性理论的几个基本问题[A]. 见:陈树辉,程昌钧,戴世强,等编.现代数学和力学(MMM—VIII)[C]. 广州:中山大学出版社,2000,500—506.
- [3] 周承侗. 复合材料迭层板的非线性动力稳定性理论[J]. 应用数学和力学,1991,12(2): 101—108.
- [4] 王列东,刘正宁,周承侗. 初始缺陷和拉弯耦合对于叠层板的振动、屈曲和非线性动力稳定性的影响[J]. 应用数学和力学,1999,20(5): 477—485.
- [5] WEI De\_min, ZHANG Shan\_yuan, YANG Gui\_tong. Resonance buckling of elastic circular plates[A]. In: CHIEN Wei\_zang, CHENG Chang\_jun, DAI Shi\_qiang, et al Eds. Proc 3rd International Conference on Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 1998, 387—390.
- [6] 魏德敏. 周期荷载作用下杆的突变失稳分析[J]. 太原工业大学学报, 1990, 20(3): 38—43.
- [7] 沈茂山,魏德敏. 弹性拱振动失稳的突变模型[J]. 应用数学和力学, 1990, 11(12): 1099—1102.
- [8] 魏德敏,杨桂通. 薄壁压力管道的突然破裂[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(2): 146—149.
- [9] Jones Robert M. Mechanics of Composite Materials [M]. Washington USA: Hemisphere Publishing Co, 1975.

## Nonlinear Dynamic Stability of Composite Laminated Plates

WEI De\_min<sup>1</sup>, YANG Gui\_tong<sup>2</sup>

(1. Department of Civil Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, P. R. China;

2. Research Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, P. R. China)

**Abstract:** Catastrophe theory was applied to the investigation of nonlinear dynamic stability of composite laminated plates. The influence of large deflection, initial imperfection, support conditions and ply angle of the fibers were considered. The catastrophic models and the critical conditions of dynamic buckling of composite laminated plates are obtained.

**Key words:** composite material; laminated plate; dynamic stability; catastrophe theory