应用数学和力学，第6卷第1期（1985年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

对合变换和薄板弯曲问题的多变量变分原理

钱　伟　长

（上海工业大学，1984年1月15日收到）

摘　要

本文利用拉氏乘子法把薄板弯曲问题的最小位能原理和最小余能原理的变分约束条件解除，从而导出了常见的广义变分原理．为了降低泛函中变量导数的阶次，我们用对合变换引进新的正则变量．于是，我们可以进一步利用拉氏乘子法，把这些对合变换当作变分约束而予以消除，从而导出了各种多变量的薄板弯曲广义变分原理．事实证明，使用上述拉氏乘子法，并不能消除一切变分约束；为此，我们进一步引用高阶拉氏乘子法消除这些剩下来的约束条件，从而导得了薄板弯曲问题的更一般的广义变分原理．

一、引　论

利用拉氏乘子法把薄板弯曲问题的最小位能原理和最小余能原理的变分约束条件解除，从而导出了常见的广义变分原理，这是众所周知的．但是这样求得的泛函中，变量的导数阶次高达二次，对于有限元法计算中选用协调元素时情况较为复杂，计算十分不便．为此，我们可以使用对合变换引进新的正则变量来降低泛函中变量导数的阶次，从而简化有限元法计算．这相当于引进了新的变分约束条件，为了解除这些新增的约束条件，我们可以进一步使用拉氏乘子法，把这些对合变换吸收入泛函中去，建立了新的变量更多的泛函．

我们必须指出，用拉氏乘子法把变分问题通过对合变换引进新变量而写成正规形式的方法，长久以来，业已引起很多学者的注意，例如：E.Trefftz(1927,1928)[1],[2]，K. O. Friedrich(1929)[3]以及R. Courant(1937)[4]等对此都有陈述讨论．如果用这种方法处理薄板弯曲的变分问题，在实质上能更清楚地揭露薄板弯曲问题的多变量变分原理的意义．凡胡海昌(1981)[5]所叙述的薄板多变量变分问题，都可以用拉氏乘子法通过对合变换引进新变量而导出其有关泛函．但是，通过拉氏乘子法建立多变量变分泛函和胡海昌直接写出泛函再从变分确定其自然条件的过程，是有根本差别的．前者可以明确多变量变分所受的必要和充分的变分约束条件，后者并不清楚所建立的泛函究竟受什么变分约束条件．因此，用拉氏乘子法建立多变量变分原理的泛函，对于薄板弯曲问题而言，还是很重要的．

本文证明，使用上述拉氏乘子法，并不能解除一切变分约束；为此，我们进一步引用钱伟长(1983)[6]所阐明的高阶拉氏乘子法解除这些剩下来的变分约束条件，从而导出了前所未

见的薄板弯曲问题的更一般的广义变分原理．

二、对合变换和正则形式

现在让我们用下列简例，说明对合变换（Involutory Transformation）和用拉氏乘子法解除对合变换的约束的方法．

求

$$J(u)=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}\left\{(u_{,1})^2+(u_{,2})^2\right\}d\Omega \tag{2.1}$$

为最小值的欧拉方程，其边界条件为

$$u(s)=\bar{u}(s) \tag{2.2}$$

其中，设 $u_{,1}=\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$，$u_{,2}=\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ 有分段连续性，并设边界 Γ 除在有限个角点上外，到处有连续变化的切线方向，这是一个在约束条件(2.2)的约束下，求 $J(u)$ 的极值的欧拉方程的变分命题．

我们可以引入对合变换

$$u_{,1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}=p,\ u_{,2}=\frac{\partial u}{\partial x_2}=q \tag{2.3}$$

而把，p，q 也看作是独立变量，于是 $J(u)$ 可以写成

$$J'(u,p,q)=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}(p^2+q^2)d\Omega \tag{2.4}$$

原题化为在(2.2)和(2.3)的约束条件下求 $J'(u,p,q)$ 为最小值的欧拉方程，现在让我们引用拉氏乘子法，设采用待定拉氏乘子 λ，μ 和 ρ，新的泛函可以写成

$$H(u,p,q,\lambda,\mu,\rho)=\iint_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}(p^2+q^2)+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-p\right)\right.$$
$$\left.+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-q\right)\right\}d\Omega+\int_{\Gamma}\rho(s)[u(s)-\bar{u}(s)]ds \tag{2.5}$$

这是一个无条件的变分驻值问题．

为了决定这些拉氏乘子，我们把 u，p，q，λ，μ，ρ 当作独立变量，将(2.5)式变分求驻值的条件，即

$$\delta H=\iint_{\Omega}\left\{p\delta p+q\delta q+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-p\right)\delta\lambda+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-q\right)\delta\mu+\lambda\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x_1}-\delta p\right)\right.$$
$$\left.+\mu\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x_2}-\delta q\right)\right\}d\Omega+\int_{\Gamma}\{\delta\rho(s)[u(s)-\bar{u}(s)]+\delta u(s)\cdot\rho(s)\}ds=0 \tag{2.6}$$

通过格林定理，我们有

$$\iint_{\Omega}\left[\lambda\frac{\partial\delta u}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial\delta u}{\partial x_2}\right]d\Omega=-\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)\delta u\,d\Omega+\int_{\Gamma}(\lambda\cdot n_1+\mu n_2)\delta u ds \tag{2.7}$$

所以，(2.6)式可以写成

$$\delta H=\iint_{\Omega}\left\{(p-\lambda)\delta p+(q-\mu)\delta q+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-p\right)\delta\lambda+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-q\right)\delta\mu\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)\delta u\right\}d\Omega+\int_{\Gamma}\{(\lambda n_1+\mu n_2+\rho)\delta u+[u(s)-\bar{u}(s)]\delta\rho\}ds=0 \tag{2.8}$$

所以，在域 Ω 内

$$p=\lambda,\ q=\mu,\ \frac{\partial u}{\partial x_1}=p,\ \frac{\partial u}{\partial x_2}=q,\ \frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}=0 \tag{2.9}$$

在边界 Γ 上，有

$$-\lambda n_1-\mu n_2=\rho,\ u(s)=\bar{u}(s) \tag{2.10}$$

从(2.9)式中消去 λ，μ，p，q，得原题的欧拉方程

$$\nabla^2 u=0 \tag{2.11}$$

从(2.10)，有

$$\rho(s)=-\lambda n_1-\mu n_2=-\lambda(s)n_1-\mu(s)n_2=-p(s)n_1-q(s)n_2 \tag{2.12}$$

于是，本题的广义变分原理的泛函为

$$H(u,p,q)=\iint_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}(p^2+q^2)+p\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-p\right)+q\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-q\right)\right\}d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma}[p(s)n_1+q(s)n_2][u(s)-\bar{u}(s)]ds \tag{2.13}$$

这是 $J(u)$ 的广义变分原理的泛函，它已没有其它的变分约束条件，$H(u,p,q)$ 是用对合变换引进的新的正规变量 p，q 表示的。(2.3)是本题的对合变换。

三、薄板弯曲问题的单变量(w)的最小位能原理和有关的广义变分原理

设有一薄板的抗弯刚度为 D，泊桑比为 ν，在侧向载荷 $\bar{f}(x_1,x_2)$ 作用下的挠度 $w(x_1,x_2)$ 由下式决定

$$\nabla^2\nabla^2 w=\frac{\bar{f}}{D}\qquad(\text{在 }\Omega\text{ 中}) \tag{3.1}$$

其中

$$\nabla^2 w=\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}=w_{,\alpha\alpha} \tag{3.2}$$

α（希腊角标）取 1 和 2，$w_{,\alpha\alpha}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha\partial x_\alpha}$，$\alpha$ 为哑标。这里有各种边界条件：

(a) 等效剪力（或边界剪力）$H_n=Q_n+M_{ns,s}$ 已给或边界位移 w 已给：

$$H_n=\bar{H}\qquad(\text{在 }\Gamma_{\sigma_1}\text{ 上}) \tag{3.3a}$$
$$w=\bar{w}\qquad(\text{在 }\Gamma_{w_1}\text{ 上}) \tag{3.3b}$$

而

$$\Gamma_{\sigma_1}+\Gamma_{w_1}=\Gamma\qquad(\text{整个边界}) \tag{3.3c}$$

(b) 边界弯矩 M_n 已给，或挠度在边界外法线方向的斜率 $w_{,n}$ 已给

$$M_n=\bar{M} \qquad (在\,\Gamma_{\sigma_2}上) \tag{3.4a}$$

$$w_{,n}=\bar{w}_{,n} \qquad (在\,\Gamma_{w_2}上) \tag{3.4b}$$

而

$$\Gamma_{\sigma_2}+\Gamma_{w_2}=\Gamma \ (整个边界) \tag{3.4c}$$

这里还有边界角点上的角点条件：垂直板的角点集中力已知或角点的位移已知。

$$P_{k_1}=\bar{P}_{k_1} \qquad (在角点\,k_1=1,\ 2,\ \cdots,\ k_\sigma) \tag{3.5a}$$

$$w_{k_2}=\bar{w}_{k_2} \qquad (在角点\,k_2=1,\ 2,\ \cdots,\ k_w) \tag{3.5b}$$

而角点总数 k 为

$$k_\sigma+k_w=k \tag{3.5c}$$

单变量(w)的最小位能原理为

在Γ_{w_1}，Γ_{w_2}上满足(3.3b)，(3.4b)，在k_2上满足（3.5b）的一切$w(x_1,\ x_2)$中，其使代表系统位能的泛函$\Pi_P(w)$为最小的$w(x_1,x_2)$，必为(3.1)在一切边界条件和角点条件下的解，即w既满足(3.1)式的微分方程，而且也满足外力已给的边界条件(3.3a)，(3.4a)和角点条件(3.5a)。

$\Pi_P(w)$可以写成

$$\Pi_P(w)=\iint_\Omega\{A(w)-\bar{f}w\}d\Omega-\int_{\Gamma_{\sigma_1}}\bar{H}\,w ds-\int_{\Gamma_{\sigma_2}}\bar{M}w_{,n}\,ds-\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}\bar{P}_{k_1}w_{k_1} \tag{3.6}$$

其中 $A(w)$为薄板的弯曲能变形密度

$$\left.\begin{aligned}&A(w)=\frac{D}{2}\{(w_{,\alpha\alpha})^2-2(1-\nu)(w_{,11}w_{,22}-w_{,12}^2)\}\ (各向同性)\\&A(w)=\frac{1}{2}D_{\alpha\beta\gamma\delta}\,w_{,\alpha\beta}\,w_{,\gamma\delta}\ (各向异性)\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

这个原理可以通过变分证明。在$\Pi_P(w)$的变分中，我们有[7]

$$\delta\iint_\Omega A(w)d\Omega=\iint_\Omega D\nabla^2\nabla^2 w\delta w d\Omega-\int_\Gamma H_n(w)\delta w ds$$

$$-\int_\Gamma M_n(w)\frac{\partial\delta w}{\partial n}ds+\sum_k P_k(w)\delta w_k \tag{3.8}$$

其中$H_n(w)$，$M_n(w)$，$P_k(w)$为w和它的导数在边界和角点上的线性函数。

$$M_n(w)=-D\{\nu\nabla^2 w+(1-\nu)w_{,nn}\} \qquad (在边界\,\Gamma\,上) \tag{3.9a}$$

$$H_n(w)=-D\left\{\frac{\partial}{\partial n}[\nabla^2 w+(1-\nu)w_{,ss}]-(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial w}{\partial s}\right\}$$

$$(在边界\,\Gamma\,上) \tag{3.9b}$$

$$P_k(w)=-(1-\nu)D\Delta\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial s}-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial w}{\partial s}\right\}_k \qquad (在角点\,k\,上) \tag{3.9c}$$

其中 ρ_s 为边界曲线 Γ 的曲率半径，当边界凸出时，该点的 ρ_s 为 正，当 边 界 为 直 边 时，$\frac{1}{\rho_s}$为 零．$\Delta\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial s}-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial w}{\partial s}\right\}_k$代表$\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial s}-\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial w}{\partial s}$值在角点 k 两侧之间增量。

最小位能原理（单变量 w 的）指出：Γ_{w_1}，Γ_{w_2} 上的 条 件 (3.3b)，(3.4b) 和 k_2 上 的

(3.5b) 都是该原理对 w 的约束条件，方程式(3.1)为该原理的欧拉方程，(3.3a)，(3.4a)和(3.5a)为自然边界条件。其证明见[8]，这里从略。

最小位能原理（单变量 w 的）的约束条件(3.3b)，(3.4b)和(3.5b)可以利用拉氏乘子法予以解除，新的泛函可以利用下列待定拉氏乘子$\lambda_{(1)}$，$\lambda_{(2)}$，$\lambda_{(3)k_2}$（这里的 $k_2=1, 2, \cdots, k_w$)写成

$$\Pi^*_P(w)=\Pi_P(w)+\int_{\Gamma_{w_1}}\lambda_{(1)}(s)(w-\bar{w})ds-\int_{\Gamma_{w_2}}\lambda_{(2)}(s)(w_{,n}-\bar{w}_{,n})ds$$
$$+\sum_{k_2=1}^{k_w}\lambda_{(3)k_2}(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2}) \qquad (3.10)$$

其中 $\Pi_P(w)$见(3.6)式，$\lambda_{(1)},\lambda_{(2)}$ 为边界弧线 s 的函数，$\lambda_{(3)k_2}$ 为待定常数。

利用(3.8)式，可以求得

$$\delta\Pi_P^*(w)=\iint_\Omega(D\nabla^2\nabla^2w-\bar{f})\,\delta w d\,\Omega+\int_{\Gamma_{\sigma_1}}(H_n-\bar{H})\delta w ds-\int_{\Gamma_{\sigma_2}}(M_n-\bar{M}\ )\frac{\partial\delta w}{\partial n}ds$$
$$+\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}(P_{k_1}-\bar{P}_{k_1})\delta w_{k_1}+\int_{\Gamma_{w_1}}[\lambda_{(1)}(s)+H_n(w)]\delta w ds+\int_{\Gamma_{w_2}}[\lambda_{(2)}(s)$$
$$-M_n(w)]\frac{\partial\delta w}{\partial n}ds+\sum_{k_2=1}^{k_w}\{\lambda_{(3)k_2}+P_{k_2}\}\,\delta w_{k_2}+\int_{\Gamma_{w_1}}(w-\bar{w}\ )\delta\lambda_{(1)}ds$$
$$+\int_{\Gamma_{w_2}}(w_{,n}-\bar{w}_{,n})\delta\lambda_2 ds\ +\sum_{k_2=1}^{k_w}(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2})\delta\lambda_{(3)k_2} \qquad (3.11)$$

驻值条件 $\delta\Pi_P^*(w)=0$ 不仅给出场方程(3.1)，边界条件(3.3a,b)，(3.4a,b) 和角点条件(3.5a,b)，而且给出所有待定拉氏乘子 $\lambda_{(1)}(s)$，$\lambda_2(s)$，$\lambda_{(3)k_2}$。

$$\lambda_{(1)}(s)=-H_n(w),\ \lambda_{(2)}(s)=M_n(w),\ \lambda_{(3)k_2}=-P_{k_2}(w) \qquad (3.12)$$

其中 $H_n(w)$，$M_n(w)$，P_k 见(3.9a,b,c)是用 w 及其导数表示的线性函数。

把 $\lambda_{(1)}(s)$，$\lambda_{(2)}(s)$，$\lambda_{(3)k_2}$代入(3.10)式，即得**薄板弯曲问题的单变量广义变分原理**（由**最小位能原理导出**）的泛函：

$$\Pi_P^*(w)=\iint_\Omega\{A(w)-\bar{f}w\}d\Omega-\int_{\Gamma_{\sigma_1}}\bar{H}wds+\int_{\Gamma_{\sigma_2}}\bar{M}w_{,n}ds-\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}\bar{P}_{k_1}w_{k_1}$$
$$-\int_{\Gamma_{w_1}}H_n(w)(\ w-\bar{w})\,ds+\int_{\Gamma_{w_2}}M_n(w)(w_{,n}-\bar{w}_{,n})ds-\sum_{k_2=1}^{k_w}P_{k_2}(w)(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2})$$
$$(3.13)$$

于是薄板弯曲问题的单变量(w)广义变分原理为

凡使 $\Pi_P^*(\ w\ )$为驻值的$w(x_1,x_2)$，必为薄板弯曲问题的解，即必满足平衡方程(3.1)式，边界条件(3.3a,b)，(3.4a,b) 和角点条件(3.5a,b)。这是解除了一切约束条件的变分原理。

四、薄板弯曲问题的单变量($M_{\alpha\beta}$)最小余能原理和有关的双变量(w, $M_{\alpha\beta}$)广义变分原理

薄板弯曲也有最小余能原理，其变量为弯矩张量 $M_{\alpha\beta}$，本问题的各种方程和条件为

（1）薄板的平衡方程

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta}+\bar{f}=0 \qquad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \tag{4.1}$$

（2）边界挠度已知的条件

$$w=\bar{w} \qquad (\text{在 } \Gamma_{w_1} \text{上}) \tag{4.2a}$$

$$w_{,n}=\bar{w}_{,n} \qquad (\text{在 } \Gamma_{w_2} \text{上}) \tag{4.2b}$$

（3）边界外力已知的条件

$$M_{nn}=\bar{M} \qquad (\text{在} \Gamma_{\sigma_2} \text{上}) \tag{4.3a}$$

$$H_n(M)=M_{\alpha\beta,\beta}n_\alpha+M_{ns,s}=\bar{H} \qquad (\text{在} \Gamma_{\sigma_1} \text{上}) \tag{4.3b}$$

其中

$$\Gamma_{w_1}+\Gamma_{\sigma_1}=\Gamma_{w_2}+\Gamma_{\sigma_2}=\Gamma \qquad (\text{整个边界}) \tag{4.3c}$$

（4）边界角点(k_2)上挠度已知

$$w_{k_2}=\bar{w}_{k_2} \qquad (\text{在 } k_2=1,\ 2,\ \cdots,\ k_w \text{上}) \tag{4.4a}$$

（5）边界角点(k_1)上集中载荷已知

$$P_{k_1}=-\Delta_{k_1}M_{ns}=\bar{P}_{k_1} \qquad (\text{在} k_1=1,\ 2,\ \cdots, k_\sigma \text{上}) \tag{4.4b}$$

（6）弯矩挠度关系

$$\left.\begin{aligned}
w_{,11}&=-\frac{1}{D(1-\nu^2)}(M_{11}-\nu M_{22})\\
w_{,22}&=-\frac{1}{D(1-\nu^2)}(M_{22}-\nu M_{11})\\
w_{,12}&=-\frac{1}{D(1-\nu)}M_{12}
\end{aligned}\right\} \qquad (\text{各向同性}) \tag{4.5a}$$

$$w_{,\alpha\beta}=-d_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\gamma\delta} \qquad (\text{包括各向异性}) \tag{4.5b}$$

板的弯曲余能密度为

$$B(M)=\frac{1}{2D(1-\nu^2)}\{(M_{11}+M_{22})^2+2(1+\nu)(M_{12}^2-M_{11}M_{22})\} \qquad (\text{各向同性}) \tag{4.6a}$$

$$B(M)=\frac{1}{2}M_{\alpha\beta}d_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\gamma\delta} \qquad (\text{包括各向导性}) \tag{4.6b}$$

薄板弯曲问题的单变量(M)最小余能原理的泛函为

$$\Pi_C(M)=\iint_\Omega B(M)d\Omega-\int_{\Gamma_{w_1}}\bar{w}H_n(M)ds+\int_{\Gamma_{w_2}}\bar{w}_{,n}M_{nn}ds+\sum_{k_2=1}^{k_w}\bar{w}_{k_2}\Delta_{k_2}M_{ns} \tag{4.7}$$

单变量(M)最小余能原理为

在满足平衡方程(4.1)，边界力已给的边界条件(4.3a,b)和角点条件(4.4b)的一切$M_{\alpha\beta}$

中，其使 $\Pi_C(M)$ 为最小的 $M_{\alpha\beta}$，必为薄板弯曲问题的解，亦即变分驻值条件给出欧拉方程(4.1)式，和自然边界条件(4.2a,b)，(4.4a)。我们将略去其证明。

现在让我们从最小余能原理中解除(4.1)，(4.3a,b)和(4.4b)的约束，建立以 $M_{\alpha\beta}$，w 为双变量的广义变分原理。设 λ，μ，η，ξ_{k_1} 为待定的拉氏乘子，设广义变分原理的新泛函可以写成

$$\Pi_C^*(M,w)=\Pi_C(M)+\iint_\Omega \lambda(M_{\alpha\beta,\alpha\beta}+\bar{f})d\Omega-\sum_{k_1=1}^{k_0}\xi_{k_1}[\Delta_{k_1}(M_{ns})+\bar{P}_{k_1}]$$
$$+\int_{\Gamma_{\sigma_2}}\mu(M_{nn}-\bar{M})ds+\int_{\Gamma_{\sigma_1}}\eta[H_n(M)-\bar{H}]ds \tag{4.8}$$

现在让我们先求余能积分的变分

$$\delta\iint_\Omega \frac{1}{2}M_{\alpha\beta}\,d_{\alpha\beta\gamma\delta}\,M_{\gamma\delta}d\,\Omega=\iint_\Omega d_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\gamma\delta}\delta M_{\alpha\beta}d\Omega$$
$$=\iint_\Omega\{d_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\gamma\delta}+w_{,\alpha\beta}\}\delta M_{\alpha\beta}d\Omega-\iint_\Omega w_{,\alpha\beta}\delta M_{\alpha\beta}d\,\Omega \tag{4.9}$$

但是，用部分积分和格林定理，我们有

$$-\iint_\Omega w_{,\alpha\beta}\delta M_{\alpha\beta}d\,\Omega=-\iint_\Omega\{(w_{,\beta}\delta M_{\alpha\beta})_{,\alpha}-w_{,\beta}\delta M_{\alpha\beta,\alpha}\}d\Omega$$
$$=\iint_\Omega w_{,\alpha}\delta M_{\alpha\beta,\beta}d\Omega-\int_\Gamma w_{,\alpha}\delta M_{\alpha\beta}n_\beta ds \tag{4.10}$$

由于有

$$w_{,\alpha}=w_{,n}n_\alpha+w_{,s}s_\alpha \tag{4.11}$$

其中 n_α，s_α 为边界线上的单位外法线矢量和单位切线矢量。在采用(4.11)以后，(4.10)可以写成

$$-\iint_\Omega w_{,\alpha\beta}\delta M_{\alpha\beta}d\Omega=\iint_\Omega w_{,\alpha}\delta M_{\alpha\beta,\beta}d\Omega-\int_\Gamma(w_{,n}\delta M_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta+w_{,s}\delta M_{\alpha\beta}n_\alpha s_\beta)ds \tag{4.12}$$

根据定义，

$$M_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta=M_{nn},\quad M_{\alpha\beta}n_\alpha s_\beta=M_{ns} \tag{4.13}$$

而且

$$\iint_\Omega w_{,\alpha}\delta M_{\alpha\beta,\beta}\,d\Omega=-\iint_\Omega w\delta M_{\alpha\beta,\alpha\beta}\,d\Omega+\int_\Gamma w\delta M_{\alpha\beta,\beta}n_\alpha ds \tag{4.14}$$

$$-\int_\Gamma w_{,s}\delta M_{ns}ds=\int_\Gamma w\delta M_{ns,s}ds-\sum_k w_k\delta\Delta_k M_{ns} \tag{4.15}$$

根据(4.13)，(4.14)，(4.15)，我们可以把(4.12)写成

$$-\iint_\Omega w_{,\alpha\beta}\delta M_{\alpha\beta}d\Omega=-\iint_\Omega w\delta M_{\alpha\beta,\alpha\beta}d\Omega-\int_\Gamma w_{,n}\delta M_{nn}ds$$
$$+\int_\Gamma w(\delta M_{\alpha\beta,\beta}n_\alpha+\delta M_{ns,s})ds-\sum_k w_k\delta\Delta_k M_{ns} \tag{4.16}$$

于是，从(4.7)式，我们有

$$\delta \Pi_C(M)=\iint_\Omega\left\{\frac{\partial B}{\partial M_{\alpha\beta}}+w_{,\alpha\beta}\right\}\delta M_{\alpha\beta}d\Omega-\iint_\Omega w\delta M_{\alpha\beta,\alpha\beta}d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma_{w_1}}(w-\bar{w})\delta H_n(M)ds-\int_{\Gamma_{w_2}}(w_{,n}-\bar{w}_{,n})\delta M_{nn}ds+\int_{\Gamma_{\sigma_1}}w\delta H_n(M)ds$$

$$-\int_{\Gamma_{\sigma_2}}w_{,n}\delta M_{nn}ds-\sum_{k_2=1}^{k_w}(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2})\delta\Delta_{k_2}M_{ns}+\sum_{k_2=1}^{k_w}w_{k_2}\delta\Delta_{k_2}M_{ns} \tag{4.17}$$

把 $M_{\alpha\beta},\lambda,\mu,\eta,\xi_{k_2}$ 当作独立变量，在利用了(4.17)后，(4.8)式的变分可以写成

$$\delta\Pi_C^*(M,w)=\iint_\Omega\left\{(M_{\alpha\beta,\alpha\beta}+\bar{f})\delta\lambda+(\lambda-w)\delta M_{\alpha\beta,\alpha\beta}+\left(\frac{\partial B}{\partial M_{\alpha\beta}}+w_{,\alpha\beta}\right)\delta M_{\alpha\beta}\right\}d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma_{w_1}}(w-\bar{w})\delta H_n ds+\int_{\Gamma_{\sigma_2}}\{(\mu-w_{,n})\delta M_{nn}+(M_{nn}-\bar{M})\delta\mu\}ds$$

$$+\int_{\Gamma_{w_2}}(w_{,n}-\bar{w}_{,n})\delta M_{nn}ds+\int_{\Gamma_{\sigma_1}}\{(\eta+w)\delta H_n+(H_n-\bar{H})\delta\eta\}ds$$

$$-\sum_{k_2=1}^{k_w}(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2})\delta\Delta_{k_2}M_{ns}-\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}\{(\Delta_{k_1}M_{ns}+\bar{P}_{k_1})\delta\xi_{k_2}$$

$$+(\xi_{k_1}+w_{k_1})\delta\Delta_{k_1}M_{ns}\} \tag{4.18}$$

$\Pi_C^*(M,w)$的驻值给出(4.1)，(4.5)，(4.2a,b)，(4.3a,b)，(4.4a,b)以及决定了各待定的拉氏乘子

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=w\quad(\text{在 }\Omega\text{ 内})\text{ , }\mu=w_{,n}\quad(\text{在 }\Gamma_{\sigma_2}\text{ 内})\\ \xi_{k_2}=-w_{k_2}(\text{在 }k_2=1,2,\cdots,k_w),\ \eta=-w(\text{在}\Gamma_{\sigma_1}\text{内})\end{array}\right\} \tag{4.19}$$

把(4.7)，(4.19)代入(4.8)，得双变量(M, w)的广义变分原理的泛函。

$$\Pi_C^*(M,w)=\iint_\Omega\{B(M)+w(M_{\alpha\beta,\alpha\beta}+\bar{f})\}d\Omega-\int_{\Gamma_{w_1}}\bar{w}H_n(M)ds+\int_{\Gamma_{w_2}}\bar{w}_{,n}M_{nn}ds$$

$$+\int_{\Gamma_{\sigma_2}}w_{,n}(M_{nn}-\bar{M})ds-\int_{\Gamma_{\sigma_1}}w[H_n(M)-\bar{H}]ds$$

$$+\sum_{k_2=1}^{k_w}\bar{w}_{k_2}\Delta_{k_2}M_{ns}+\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}w_{k_1}[\Delta_{k_1}M_{nn}+\bar{P}_{k_1}] \tag{4.20}$$

于是，我们从单变量(M)的最小余能原理导出**双变量(M,w)的广义变分原理**。

从一切 $M_{\alpha\beta}$，w 中，选择使 $\Pi_C^*(M,w)$为驻值的$M_{\alpha\beta},w$，它们必为弹性薄板弯曲问题的正确解。这是一个没有约束条件的变分原理。

五、对合变换在$\Pi_P^*(w)$上的应用，含有w，φ_α，$\kappa_{\alpha\beta}$三个变量的广义变分厚理

$\Pi_P^*(w)$[见(3.13)式]中含有 w 的二阶导数，在有限元法使用协调元素时，比较复杂，深为不便。现在让我们引进新的变量 φ_α，$\kappa_{\alpha\beta}$，通过对合变换

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_\alpha=w_{,\alpha}\quad(\varphi_s=w_{,s},\ \ \varphi_n=w_{,n})\\&\kappa_{\alpha\beta}=-w_{,\alpha\beta}=-\frac{1}{2}(\varphi_{\alpha,\beta}+\varphi_{\beta,\alpha})\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

利用$\varphi_\alpha,\kappa_{\alpha\beta}$，可以把$A(w)$，$M_{nn}(M)$，$M_{ns}(M)$，$H_n(M)$等写成

$$\left.\begin{aligned}&A(\omega)=A(\kappa)=\frac{1}{2}\kappa_{\alpha\beta}D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta},\quad M_{nn}(M)=M_{nn}(\kappa)=-n_\alpha n_\beta D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta}\\&M_{ns}(M)=M_{ns}(\kappa)=-\frac{1}{2}(n_\alpha s_\beta+n_\beta s_\alpha)D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta}\\&H_n(M)=H_n(\kappa)=-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta,\beta}n_\alpha+M_{ns,s}(\kappa)\end{aligned}\right\}\tag{5.2}$$

于是，$\Pi^*_P(w)$可以用w,φ_α，$\kappa_{\alpha\beta}$表达如下：

$$\Pi^*_P(w,\ \varphi,\ \kappa)=\iint_\Omega\{A(\kappa)-\bar{f}w\}d\Omega-\int_{\Gamma\sigma_1}\bar{H}w ds+\int_{\Gamma\sigma_2}\bar{M}\varphi_n ds-\int_{\Gamma w_1}H_n(\kappa)(w-\bar{w})ds$$

$$+\int_{\Gamma w_2}M_{nn}(\kappa)(\varphi_n-\bar{w}_{,n})ds-\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}\bar{P}_{k_1}w_{k_1}+\sum_{k_2=1}^{k_w}\Delta_{k_2}M_{ns}(\kappa)(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2})\tag{5.3}$$

对于这个泛函而言，对合变换(5.1)就是以$\Pi^*_P(w,\ \varphi,\ \kappa)$为泛函的变分原理的约束条件，为了解除这些约束，我们引进下列拉氏乘子：$\rho^*_\alpha,\lambda^*_{\alpha\beta},\mu^*_n,\mu^*_s$。新的泛函可以写成

$$\Pi_G(w,\varphi,\kappa)=\Pi^*_P(w,\varphi,\ \kappa)+\iint_\Omega\Big\{\rho^*_\alpha(\varphi_\alpha-w_{,\alpha})+\lambda^*_{\alpha\beta}\Big[\kappa_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}(\varphi_{\alpha,\beta}+\varphi_{\beta,\alpha})\Big]\Big\}d\Omega$$

$$+\int_{\Gamma w_1+\Gamma\sigma_1}\mu^*_s(\varphi_s-w_{,s})ds+\int_{\Gamma w_2+\Gamma\sigma_2}\mu^*_n(\varphi_n-w_{,n})ds\tag{5.4}$$

其变分可以写成

$$\delta\Pi_G(w,\varphi,\ \kappa)=\delta\Pi^*_P(w,\varphi,\ \kappa)-\sum_k\Delta_k\mu^*_s\,\delta w_k+\iint_\Omega\Big\{(\varphi_\alpha-w_{,\alpha})\delta\rho^*_\alpha+\Big[\kappa_{\alpha\beta}$$

$$+\frac{1}{2}(\varphi_{\alpha,\beta}+\varphi_{\beta,\alpha})\Big]\delta\lambda^*_{\alpha\beta}\Big\}d\Omega+\iint_\Omega\{(\rho^*_\alpha-\lambda^*_{\alpha\beta,\beta})\delta\varphi_\alpha+\lambda^*_{\alpha\beta}\delta\kappa_{\alpha\beta}$$

$$+\rho^*_{p,\alpha}\,\delta w\}d\Omega+\int_{\Gamma w_1+\Gamma\sigma_1}\{(\varphi_s-w_{,s})\delta\mu^*_s+(\mu^*_s+\lambda^*_{ns})\delta\varphi_s+(\mu^*_{s,s}$$

$$-\rho^*_n)\delta w\}ds+\int_{\Gamma w_2+\Gamma\sigma_2}\{(\varphi_n-w_{,n})\delta\mu^*_n+(\mu^*_n+\lambda^*_{nn})\delta\varphi_n-\mu^*_n\delta w_{,n}\}ds$$

$$\tag{5.5}$$

其中

$$\delta\Pi^*_P(w,\varphi,\ \kappa)=\iint_\Omega\{D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta}\delta\kappa_{\alpha\beta}-\bar{f}\delta w\}\,d\Omega-\int_{\Gamma\sigma_1}\bar{H}\delta w ds-\int_{\Gamma w_1}\{(w-\bar{w})\delta H_n(\kappa)$$

$$+H_n(\kappa)\delta w\}ds+\int_{\Gamma\sigma_2}\bar{M}\delta\varphi_n ds+\int_{\Gamma w_2}\{(\varphi_n-\bar{w}_{,n})\delta M_{nn}(\kappa)$$

$$+M_{nn}(\kappa)\delta\varphi_n\}ds-\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}\bar{P}_{k_1}\delta w_{k_1}+\sum_{k_2=1}^{k_w}\{\Delta_{k_2}\delta M_{ns}(\kappa)(w_{k_2}$$

$$-\bar{w}_{k_2})+\Delta_{k_2}M_{ns}(\kappa)\delta w_{k_2}\}\tag{5.6}$$

$\Pi_G(w,\varphi,\kappa)$的驻值条件

$$\delta\Pi_G(w,\varphi,\kappa)=0 \tag{5.7}$$

给出下列自然条件：

（1）欧拉方程：在Ω内

$$\delta w: \quad \rho^*_{\alpha,\alpha}-\bar{f}=0 \tag{5.8a}$$

$$\delta\varphi_\alpha: \quad \rho^*_\alpha-\lambda^*_{\alpha\beta,\beta}=0 \tag{5.8b}$$

$$\delta\kappa_{\alpha\beta}: \quad \lambda^*_{\alpha\beta}+D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta}=0 \tag{5.8c}$$

$$\delta\rho^*_\alpha: \quad \varphi_\alpha-w_{,\alpha}=0 \tag{5.8d}$$

$$\delta\lambda^*_{\alpha\beta}: \quad \kappa_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}(\varphi_{\alpha,\beta}+\varphi_{\beta,\alpha})=0 \tag{5.8e}$$

（2）自然边界条件

$$\delta\mu^*_n: \quad \varphi_n-w_{,n}=0 \quad （在\Gamma=\Gamma_{w_1}+\Gamma_{\sigma_1}上） \tag{5.9a}$$

$$\delta\mu^*_s: \quad \varphi_s-w_{,s}=0 \quad （在\Gamma=\Gamma_{w_1}+\Gamma_{\sigma_1}上） \tag{5.9b}$$

$$\delta\varphi_s: \quad \mu^*_s+\lambda^*_{ns}=0 \quad （在\Gamma=\Gamma_{w_1}+\Gamma_{\sigma_1}上） \tag{5.9c}$$

$$\delta w_{,n}: \quad \mu^*_n=0 \quad （在\Gamma=\Gamma_{w_2}+\Gamma_{\sigma_2}上） \tag{5.9d}$$

$$\delta w: \quad -H_n(\kappa)+\mu^*_{s,s}-\rho^*_n=0 \quad （在\Gamma_{w_1}上） \tag{5.9e}$$

$$\delta H_n(\kappa): \quad w-\bar{w}=0 \quad （在\Gamma_{w_1}上） \tag{5.9f}$$

$$\delta w: \quad -\bar{H}+\mu^*_{s,s}-\rho^*_n=0 \quad （在\Gamma_{\sigma_1}上） \tag{5.9g}$$

$$\delta\varphi_n: \quad M_{nn}(\kappa)+\mu^*_n+\lambda^*_{nn}=0 \quad （在\Gamma_{w_2}上） \tag{5.9h}$$

$$\delta M_{nn}(\kappa): \quad \varphi_n-\bar{w}_{,n}=0 \quad （在\Gamma_{w_2}上） \tag{5.9i}$$

$$\delta\varphi_n: \quad \bar{M}+\mu^*_n+\lambda^*_{nn}=0 \quad （在\Gamma_{\sigma_2}上） \tag{5.9j}$$

（3）自然角点条件

$$\delta w_{k_1}: \ \Delta_{k_1}\mu^*_s+\bar{P}_{k_1}=0 \quad （在k_1=1,2,\cdots,k_\sigma上） \tag{5.10a}$$

$$\delta w_{k_2}: \ -\Delta_{k_2}\mu^*_s+\Delta_{k_2}M_{ns}(k)=0 \quad （在k_2=1,2,\cdots,k_w上） \tag{5.10b}$$

$$\delta\Delta_{k_2}M_{ns}(k): \ w_{k_2}-\bar{w}_{k_2}=0 \quad （在k_2=1,2,\cdots,k_w上） \tag{5.10c}$$

从(5.8b,c)，求得

$$\lambda^*_{\alpha\beta}=-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta}=-M_{\alpha\beta}(\kappa) \tag{5.11a}$$

$$\rho^*_\alpha=-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta,\beta}=-M_{\alpha\beta,\beta}(\kappa)=-Q_\alpha(\kappa) \tag{5.11b}$$

从(5.9c)，(5.9d)，求得

$$\mu^*_n=0 \quad （在\Gamma=\Gamma_{w_2}+\Gamma_{\sigma_2}上） \tag{5.12a}$$

$$\mu^*_s=-\lambda^*_{ns}=M_{ns}(\kappa) \quad （在\Gamma=\Gamma_{w_1}+\Gamma_{\sigma_1}上） \tag{5.12b}$$

把(5.11a,b)，(5.12a,b)代入(5.8a)，(5.9e,g,h,j)，得

$$Q_{\alpha,\alpha}+\bar{f}=0 \qquad (\text{在}\,\Omega\,\text{内}) \tag{5.13a}$$

$$-H_n(\kappa)+M_{ns}(\kappa)+Q_n(\kappa)=0 \qquad (\text{在}\,\Gamma_{w_1}\text{上}) \tag{5.13b}$$

$$-\bar{H}+M_{ns}(\kappa)+Q_n(\kappa)=0 \qquad (\text{在}\,\Gamma_{\sigma_1}\text{上}) \tag{5.13c}$$

$$M_{nn}(\kappa)-M_{nn}(\kappa)=0 \qquad (\text{在}\,\Gamma_{w_2}\text{上}) \tag{5.13d}$$

$$\bar{M}-M_{nn}(\kappa)=0 \qquad (\text{在}\,\Gamma_{\sigma_2}\text{上}) \tag{5.13e}$$

除(5.13b,d)是恒等式外，其余(5.8d,e)，(5.9a,b)都是(5.3)式$\Pi^*_P(w,\varphi,\kappa)$的约束条件，(5.9f，i)以及(5.13a,c,e)等都是薄板弯曲的平衡方程和边界条件，(5.10a,c)化为原来的角点条件，(5.10b)为角点上的恒等式。

把(5.11a,b)，(5.12a,b)代入(5.4)式，即得用三类变量$w,\varphi_\alpha,\kappa_{\alpha\beta}$表示的广义变分原理的泛函$\Pi_G(w,\varphi,\kappa)$

$$\begin{aligned}\Pi_G(w,\varphi,\kappa)=&\iint_\Omega\Big\{A(\kappa)-\bar{f}w-Q_\alpha(\kappa)(\varphi_\alpha-w_{,\alpha})-M_{\alpha\beta}(\kappa)\Big[\kappa_{\alpha\beta}+\frac{1}{2}(\varphi_{\alpha,\beta}+\varphi_{\beta,\alpha})\Big]\Big\}d\Omega\\&-\int_{\Gamma_{w_1}}\{H_n(\kappa)(w-\bar{w})-M_{ns}(\kappa)(\varphi_s-w_{,s})\}ds\\&-\int_{\Gamma_{\sigma_1}}\{\bar{H}w-M_{ns}(\kappa)(\varphi_s-w_{,s})\}ds+\int_{\Gamma_{w_2}}M_{nn}(\kappa)(\varphi_n-\bar{w}_{,n})ds\\&+\int_{\Gamma_{\sigma_2}}\bar{M}\varphi_n ds-\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}\bar{P}_{k_1}w_{k_1}+\sum_{k_2=1}^{k_w}\Delta_{k_2}M_{ns}(\kappa)(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2})\end{aligned} \tag{5.14}$$

薄板弯曲问题的**三类变量($w,\varphi_\alpha,\kappa_{\alpha\beta}$)的广义变分原理**为：

凡使$\delta\Pi_G(w,\varphi,\kappa)=0$（驻值）的$w,\varphi_\alpha$，$\kappa_{\alpha\beta}$,必为薄板弯曲问题的正确解

六、对合变换在$\Pi^*_C(M,w)$上的应用，含有$M_{\alpha\beta}$，Q_α，W三大类变量的广义变分原理

$\Pi^*_C(M,w)$中两个变量w，$M_{\alpha\beta}$，在(4.20)式的$\Pi^*_C(M,w)$中，$H_n(M)$是作为$M_{\alpha\beta}$的已知函数引入的。即

$$H_n(M)=Q_n(M)+M_{ns,s}=M_{nn,n}+2M_{ns,s} \tag{6.1}$$

现在让我们正式引进Q_α作为变量之一，首先在$\Pi^*_C(M,w)$中引进Q_α，其中我们引用剪力弯矩关系

$$Q_\alpha=M_{\alpha\beta,\beta} \tag{6.2}$$

$\Pi^*_C(M,w)$可写成$\Pi^*_C(M,Q,w)$：

$$\begin{aligned}\Pi^*_C(M,Q,w)=&\iint_\Omega\{B(M)+w(Q_{\alpha,\alpha}+\bar{f})\}d\Omega+\int_{\Gamma_{\sigma_2}}w_{,n}(M_{nn}-\bar{M})ds\\&-\int_{\Gamma_{w_1}}\bar{w}(Q_n+M_{ns,s})ds-\int_{\Gamma_{\sigma_1}}w\Big[Q_n+M_{ns,s}-\bar{H})ds\\&+\int_{\Gamma_{w_2}}\bar{w}_{,n}M_{nn}ds+\sum_{k_2=1}^{k_w}\bar{w}_{k_1}\Delta_{k_2}M_{ns}+\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}w_{k_1}[\Delta_{k_1}M_{ns}+\bar{P}_{k_1}]\end{aligned} \tag{6.3}$$

其中

$$B(M)=\frac{1}{2}d_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\alpha\beta}M_{\gamma\delta} \tag{6.4}$$

现在把对合变换(6.2)用拉氏变换引入新泛函。拉氏乘子为 λ_α。新泛函为

$$\Pi_G(M,Q,w)=\Pi_C^*(M,\ Q,\ w)+\iint_\Omega \lambda_\alpha(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})\,d\Omega \tag{6.5}$$

而

$$\begin{aligned}\delta\Pi_G(M,Q,w)=&\iint_\Omega\{(\lambda_{\alpha,\beta}+d_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\gamma\delta})\delta M_{\alpha\beta}+(Q_{\alpha,\alpha}+\bar f)\delta w+(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})\delta\lambda_\alpha\\&+(\lambda_\alpha-w_{,\alpha})\delta Q_\alpha\}d\Omega+\int_{\Gamma_{w_1}}\{(w-\bar w)\delta Q_n+(\bar w_{,s}-\lambda_s)\delta M_{ns}\}ds\\&+\int_{\Gamma_{w_2}}(\bar w_{,n}-\lambda_n)\delta M_{nn}ds+\int_{\Gamma_{\sigma_1}}\{(w_{,s}-\lambda_s)\delta M_{ns}-(Q_n+M_{ns,s}\\&-\bar H)\delta w\}ds+\int_{\Gamma_{\sigma_2}}\{(M_{nn}-\bar M)\delta w_{,n}+(w_{,n}-\lambda_n)\delta M_{nn}\}ds\\&-\sum_{k_2=1}^{k_w}(w_{k_2}-\bar w_{k_2})\delta\Delta_{k_2}M_{ns}+\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}[\Delta_{k_1}M_{ns}+\bar P_{k_1}]\delta w_{k_1}\end{aligned} \tag{6.6}$$

从中求得了

$$\lambda_\alpha=w_{,\alpha} \tag{6.7}$$

所以，用三类变量 $M_{\alpha\beta},Q_\alpha,w$ 表示的广义变分原理的泛函为：

$$\begin{aligned}\Pi_G(M,Q,w)=&\iint_\Omega\{B(M)+w(Q_{\alpha,\alpha}+\bar f)+w_{,\alpha}(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})\}d\Omega-\int_{\Gamma_{\sigma_1}}w[Q_n+M_{ns,s}\\&-\bar H]ds+\int_{\Gamma_{\sigma_2}}w_{,n}(M_{nn}-\bar M)ds-\int_{\Gamma_{w_1}}\bar w(Q_n+M_{ns,s})ds+\int_{\Gamma_{w_2}}\bar w_{,n}M_{nn}ds\\&+\sum_{k_2=1}^{k_w}\bar w_{k_2}\Delta_{k_2}M_{ns}+\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}w_{k_1}[\Delta_{k_1}M_{ns}+\bar P_{k_1}]\end{aligned} \tag{6.8}$$

薄板弯曲问题的三类变量($M_{\alpha\beta}$，Q_α,w)的广义变分原理为：凡使$\Pi_G(M,Q,w)$为驻值的$M_{\alpha\beta}$，Q_α，w，必为薄板弯曲问题的正确解，这是一个没有约束的变分原理。

七、对合变换和高阶拉氏乘子法在$\Pi_G(w,\varphi,\kappa)$上的应用，含有W，φ_α，$\kappa_{\alpha\beta}$，$M_{\alpha\beta}$，Q_α五类变量的广义变分原理

我们现在引用对合变换

$$Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta}=0 \tag{7.1a}$$

$$M_{\alpha\beta}-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta}=0 \tag{7.1b}$$

把$\Pi_G(w,\varphi,\kappa)$扩大为 5 类变量 $w,\varphi_\alpha,\kappa_{\alpha\beta},M_{\alpha\beta},Q_\alpha$的广义变分原理。设 λ°_α、$\mu^\circ_{\alpha\beta}$ 为两种拉氏乘子，于是新的泛函可以写成

$$\Pi_G(w,\varphi,\kappa,M,Q)=\Pi_G^*(w,\varphi,\kappa,\ M,\ Q)+\iint_\Omega\lambda^\circ_\alpha(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})d\Omega$$

$$+\iint_{\Omega}\mu^{\circ}_{\alpha\beta}(M_{\alpha\beta}-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta})d\Omega \tag{7.2}$$

其中$\Pi^{*}_{G}(w,\varphi,\kappa,M,Q)$是把$\Pi_{G}(w,\varphi,\kappa)$中的$Q_n(\kappa),M_{nn}(\kappa),M_{sn}(\kappa)$，$Q_\alpha(\kappa),M_{\alpha\beta}(\kappa)$都看作为独立变量$Q_n,M_{nn},M_{sn},Q_\alpha,M_{\alpha\beta}$的泛函。同时引用

$$A(\kappa)-\kappa_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}(\kappa)=-B(M)=-\frac{1}{2}d_{\alpha\beta\gamma\delta}M_{\alpha\beta}M_{\gamma\delta} \tag{7.3}$$

于是$\Pi_{G}(w,\varphi,\kappa,M,Q)$可写成

$$\begin{aligned}\Pi_{G}(w,\varphi,\kappa,M,Q)=&\iint_{\Omega}\{B(M)+\bar{f}w+Q_\alpha(\varphi_\alpha-w_{,\alpha})+M_{\alpha\beta}\ \varphi_{\alpha,\beta}\\&+\lambda^{\circ}_{\alpha}(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})+\mu^{\circ}_{\alpha\beta}(M_{\alpha\beta}-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta})\}d\Omega\\&+\int_{\Gamma_{w_1}}\{(Q_n+M_{ns,s})(w-\bar{w})-M_{ns}(\varphi_s-w_{,s})\}ds\\&+\int_{\Gamma_{\sigma_1}}\{\bar{H}w-M_{ns}(\varphi_s-w_{,s})\}ds-\int_{\Gamma_{w_2}}M_{nn}(\varphi_n-\bar{w}_{,n})ds\\&-\int_{\Gamma_{\sigma_2}}\bar{M}\varphi_n ds-\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}\bar{P}_{k_1}w_{k_1}+\sum_{k_2=1}^{k}\Delta_{k_2}M_{ns}(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2})\end{aligned} \tag{7.4}$$

我们很易证明

$$\lambda^{\circ}_{\alpha}=0,\quad \mu^{\circ}_{\alpha\beta}=0 \tag{7.5}$$

亦即是说，对合变换这两种约束条件，无法用线性拉氏乘子法解除。所以：

$$\begin{aligned}\Pi_{G}(w,\varphi,\kappa,M,Q)=&\iint_{\Omega}\{B(M)+\bar{f}w+Q_\alpha(\varphi_\alpha-w_{,\alpha})+M_{\alpha\beta}\varphi_{\alpha,\beta}\}d\Omega\\&+\int_{\Gamma_{w_1}}\{(Q_n+M_{ns,s})(w-\bar{w})-M_{ns}(\varphi_s-w_{,s})\}ds\\&+\int_{\Gamma_{\sigma_1}}\{\bar{H}w-M_{ns}(\varphi_s-w_{,s})\}ds-\int_{\Gamma_{w_2}}M_{nn}(\varphi_n-\bar{w}_{,n})ds\\&-\int_{\Gamma_{\sigma_2}}\bar{M}\varphi_n ds+\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}\bar{P}_{k_1}w_{k_1}-\sum_{k_2=1}^{k_w}\Delta_{k_2}M_{ns}(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2})\end{aligned} \tag{7.6}$$

这是一个在形式上是5个变量的泛函，但在实质上，它们不是都独立的，而受有(7.1a,b)两个条件的约束。

要解除其约束，可以引用高阶拉氏乘子法[6]。例如在$\Pi_{G}(w,\varphi,\kappa,M,Q)$上增加

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_{G}(w,\varphi,\kappa,M,Q)=&\iint_{\Omega}\lambda_1(M_{\alpha\beta}-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta})(\kappa_{\alpha\beta}+\varphi_{\alpha,\beta})d\Omega+\iint_{\Omega}\lambda_2(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})(\varphi_\alpha\\&-w_{,\alpha})d\Omega+\iint_{\Omega}\lambda_3[A(\kappa)+B(M)-\kappa_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}]d\Omega\end{aligned} \tag{7.7}$$

就能使$\varphi_\alpha,\kappa_{\alpha\beta},w,M_{\alpha\beta},Q_\alpha$五种变量完全独立，$\lambda_1$，$\lambda_2$，$\lambda_3$为任意给出的$(x_1,x_2)$的函数。

所以，我们得到五种变量的广义变分原理

$$\Pi_{G\lambda}(w,\varphi,\kappa,M,Q)=\iint_{\Omega}\{B(M)+\bar{f}w+Q_\alpha(\varphi_\alpha-w_{,\alpha})+M_{\alpha\beta}\varphi_{\alpha,\beta}\}d\Omega$$

$$+\iint_{\Omega}\lambda_1(M_{\alpha\beta}-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta})(\kappa_{\alpha\beta}+\varphi_{\alpha,\beta})d\Omega$$
$$+\iint_{\Omega}\lambda_2(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})(\varphi_\alpha-w_{,\alpha})d\Omega+\iint_{\Omega}\lambda_3[A(\kappa)+B(M)-\kappa_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}]d\Omega$$
$$+\int_{\Gamma w_1}\{(Q_n+M_{ns,s})(w-\bar{w})-M_{ns}(\varphi_s-w_{,s})\}ds$$
$$+\int_{\Gamma\sigma_1}\{\bar{H}w-M_{ns}(\varphi_s-w_{,s})\}ds-\int_{\Gamma w_2}M_{nn}(\varphi_n-\bar{w}_{,n})ds-\int_{\Gamma\sigma_2}\bar{M}\varphi_n ds$$
$$+\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}\bar{P}_{k_1}w_{k_1}-\sum_{k_2=1}^{k_w}\Delta_{k_2}M_{ns}(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2}) \tag{7.8}$$

而且 $\Pi_{G\lambda}$ 的驻值条件

$$\delta\Pi_{G\lambda}=0 \tag{7.9}$$

给出问题的解。

通过对合变换和高阶拉氏乘子法，我们也可以从$\Pi_G(w,\ M,\ Q)$找到另一种 φ_α, $\kappa_{\alpha\beta}$, w, $M_{\alpha\beta}$, Q_α 五种变量完全独立的广义变分原理，其中同样也含有 λ_1'，λ_2', λ_3' 三种任意给出的$(x_1,\ x_2)$的函数。

$$\Pi_{G\lambda'}(w,\varphi,\kappa,M,Q)=\iint_{\Omega}\{B(M)+w(Q_{\alpha,\alpha}+\bar{f})+\varphi_\alpha(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})\}d\Omega-\iint_{\Omega}\lambda_1'(M_{\alpha\beta}$$
$$-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta})(\varphi_{\alpha,\beta}+\kappa_{\alpha\beta})d\Omega-\iint_{\Omega}\lambda_2'(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})(\varphi_\alpha$$
$$-w_{,\alpha})d\Omega-\iint_{\Omega}\lambda_2'[A(\kappa)+B(M)-\kappa_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}]d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma\sigma_1}w[Q_n+M_{ns,s}-\bar{H}]ds+\int_{\Gamma\sigma_2}\varphi_n(M_{nn}-\bar{M})ds$$
$$-\int_{\Gamma w_1}\bar{w}(Q_n+M_{ns,s})ds+\int_{\Gamma w_2}\bar{w}_{,n}M_{nn}ds$$
$$+\sum_{k_2=1}^{k_w}\bar{w}_{k_2}\Delta_{k_2}M_{ns}+\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}w_{k_1}[\Delta_{k_1}M_{ns}+\bar{P}_{k_1}] \tag{7.10}$$

而且 $\Pi_{G\lambda'}$ 的驻值条件

$$\delta\Pi_{G\lambda'}=0 \tag{7.11}$$

给出问题的解。

我们很易证明

$$\Pi_{G\lambda}-\Pi_{G\lambda'}=\iint_{\Omega}(\lambda_1+\lambda_1')(M_{\alpha\beta}-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta})(\varphi_{\alpha,\beta}+\kappa_{\alpha\beta})d\Omega$$
$$+\iint_{\Omega}(\lambda_2+\lambda_2')(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})(\varphi_\alpha-w_{,\alpha})d\Omega$$
$$+\iint_{\Omega}(\lambda_3+\lambda_3')[A(\kappa)+B(M)-\kappa_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}]d\Omega \tag{7.12}$$

只要 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，$\lambda_1'$，$\lambda_2'$，$\lambda_3'$ 满足下列等价条件

$$\lambda_1+\lambda_1'=0,\quad \lambda_2+\lambda_2'=0,\quad \lambda_3+\lambda_3'=0 \tag{7.13}$$

则 $\Pi_{G\lambda}$ 和 $\Pi_{G\lambda'}$ 就是等价的。即

$$\Pi_{G\lambda}=\Pi_{G\lambda'} \tag{7.14}$$

我们必须指出 $\Pi_{G\lambda}(w,\ \varphi,\ \kappa,\ M,\ Q)$ 也可以写成

$$\begin{aligned}
-\Pi_{G\lambda}(w,\varphi,\kappa,M,Q)=&\iint_\Omega\{A(\kappa)-\bar{f}w-Q_\alpha(\varphi_\alpha-w_{,\alpha})-M_{\alpha\beta}(\kappa_{\alpha\beta}+\varphi_{\alpha,\beta})\}d\Omega\\
&-\iint_\Omega\lambda_1(M_{\alpha\beta}-D_{\alpha\beta\gamma\delta}\kappa_{\gamma\delta})(\kappa_{\alpha\beta}+\varphi_{\alpha,\beta})d\Omega-\iint_\Omega\lambda_2(Q_\alpha-M_{\alpha\beta,\beta})(\varphi_\alpha-w_{,\alpha})d\Omega\\
&-\iint_\Omega(\lambda_3+1)[A(\kappa)+B(M)-\kappa_{\alpha\beta}M_{\alpha\beta}]d\Omega-\int_{\Gamma w_1}\{(Q_n+M_{ns,s})(w-\bar{w})\\
&-M_{ns}(\varphi_s-w_{,s})\}ds-\int_{\Gamma\sigma_1}\{\bar{H}w-M_{ns}(\varphi_s-w_{,s})\}ds+\int_{\Gamma w_2}M_{nn}(\varphi_n-\bar{w}_{,n})ds\\
&+\int_{\Gamma\sigma_2}\bar{M}\varphi_n ds+\sum_{k_1=1}^{k_\sigma}\bar{P}_{k_1}w_{k_1}+\sum_{k_2=1}^{k_w}\Delta_{k_2}M_{ns}(w_{k_2}-\bar{w}_{k_2})
\end{aligned} \tag{7.15}$$

如果把它和 Reddy (1976)[7] 的广义变分原理相比，则就证明了 Reddy 的变分原理中 $M_{\alpha\beta}$，Q_α，$\kappa_{\gamma\delta}$ 并不是独立的，而是受着(7.1a，b)的约束。

参　考　文　献

[1] Trefftz, E., *Ein Gegenstuck Zun Ritzschen Verfahren*, Verh. d. 2, Int. Kongr. fur Technische Mechanik, Zurich(1927), 101.

[2] Trefftz, E., Konrergenz und Fehlerschätzum Beim Kitzschn Verfechren, *Math. Ann*, **100**(1928), 503—521.

[3] Friedrichs, K. O., Ein Verfahren der Variationsrechnug···, Nachr. der Ges. d. Wiss. Gottingen,(1929), 13—20.

[4] Courant, R. and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publisher, Inc, New York(1953),德文原版 (1937).

[5] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社，(1981).

[6] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，4，2(1983)，137—150.

[7] Reddy, J. N., On complementary variational principle for linear theory of plates, *Journal of Structural Mechanics*, 4, 4(1976), 417.

[8] 钱伟长，《变分法和有限元》，科学出版社，(1982).

Involutory Transformations and Variational Principles with Multi-Variables in Thin Plate Bending Problems

Chien Wei-zang

(*Shanghai University of Technology, Shanghai*)

Abstract

In this paper, the generalized variational principles of plate bending problems are established from their minimum potential energy principle and minimum complementary energy principle through the elimination of their constraints by means of the method of Lagrange multipliers. The involutory transformations are also introduced in order to reduce the order of differentiations for the variables in the variation. Furthermore, these involutory transformations become in fact the additional constraints in the variation, and additional Lagrange multipliers may be used in order to remove these additional constraints. Thus, various multi-variable variational principles are obtained for the plate bending problems. However, it is observed that, not all the constraints of variation can be removed simply by the ordinary method of linear Lagrange multipliers. In Such cases, the method of high-order Lagrange multipliers are used to remove those constraints left over by ordinary linear multiplier method. And consequently, some functionals of more general forms are obtained for the generalized variational principles of plate bending problems.