应用数学和力学，第6卷第1期（1985年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

概率内积空间中映象的不动点定理*

张　石　生**

（四川大学数学系，1984年3月8日收到）

摘　　要

本文的目的一是对概率度量空间引入一修正的定义；二是对这一空间中的映象建立了几个新的不动点定理。作为本文结果的应用，我们在第四节中讨论了 $L^2(G)$ 空间中 Uryson 算子方程解的存在性和唯一性问题。

概率度量空间的理论是新近发展起来的随机泛函分析理论和应用的重要研究方向。最近 Schwezer，Sklar 和 Dumitrescu 等分别在[1,2]中用不同的方式引入概率内积空间的概念。由于原作者在引入这一概念时，条件过于繁杂，而且个别地方还有错误，因此极大地妨碍了这一空间理论的研究和发展。

本文目的有二：一是用较为简洁的形式重新定义了概率内积空间的概念；二是对这一空间中的映象建立了几个新的不动点定理。另外作为本文结果应用的例子，我们在第四节中讨论了 $L^2(G)$ 空间中 Uryson 算子方程解的存在性和唯一性。

一、概率内积空间的定义和例子

本文以下处处记 $R=(-\infty,+\infty)$，$R^+=[0,\infty)$。

定义 1：一映象 F：$R\to R^+$ 称为分布函数，如果它是不减的，左连续的，且 $\inf\limits_{t\in R}F(t)=0$，$\sup\limits_{t\in R}F(t)=1$。

下面用 $\mathscr{D}$ 表一切分布函数的集合，用 H 表函数

$$H(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ 0 & (t\leqslant 0)\end{cases}$$

定义 2：映象 $\varDelta$：$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 称为强 t 范数，如果满足下面的条件：

(i) $\varDelta(a,1)=a$；$\varDelta(a,b)>0$，$\forall a,b\in(0,1]$；

(ii) $\varDelta(a,b)=\varDelta(b,a)$；

(iii) $\varDelta(c,d)\geqslant\varDelta(a,b)$，$\forall c\geqslant a$，$d\geqslant b$；

(iv) $\varDelta(\varDelta(a,b),c)=\varDelta(a,\varDelta(b,c))$。

---

* 周谟仁推荐。

** 本课题得到中国科学院科学基金的资助。

例 1 下面所列的都是强 t 范数的例子：

$\Delta_1=\text{Product}$，即 $\Delta_1(a,b)=a\cdot b$，$\forall a,b\in[0,1]$

$\Delta_2=\min$，即 $\Delta_2(a,b)=\min\{a,b\}$，$\forall a,b\in[0,1]$

设Δ是强 t 范数，以后我们用∇表Δ的对偶范数，即定义∇如下：

$$\nabla(a,b)=1-\Delta(1-a,\ 1-b),\ \forall a,b\in[0,1]$$

定义 3 一概率内积空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一有序的三元组，其中E是一实线性空间，Δ 是一强 t-范数，$\mathscr{F}$ 是$E\times E\to\mathscr{D}$的映象（以后我们用 $F_{x,y}$表$\mathscr{F}(x,y)$，又 $F_{x,y}(t)$ 表 $F_{x,y}$ 在$t\in R$ 的值）且满足下面的条件：

(PI—1). $F_{x,y}=F_{y,x}$，$\forall x,y\in E$；

(PI—2). $F_{x,x}(0)=0$，$\forall x\in E$；且 $F_{x,x}(t)=H(t)$，$\forall t\in R$，当而且仅当$x=\theta$；

(PI—3). $\nabla(F_{x,z}(t_1),\ F_{y,z}(t_2))\geqslant F_{x+y,z}(t_1+t_2)\geqslant\Delta(F_{x,z}(t_1),\ F_{y,z}(t_2))$，$\forall x,y,z\in E$，$t_1,t_2\in R$；

(PI—4). $\sup\{t\in R,\ F_{x,y}(t)<1\}<\infty$，$\forall x,y\in E$；

(PI—5). $\sup\{t\in R,\ F_{\alpha x,y}(t)<1\}=\alpha\sup\{t\in R,F_{x,y}(t)<1\}$，$\forall\alpha\in R$，$x,y\in E$.

例 2 设$(E,(\cdot,\cdot))$是通常的内积空间，可以证明由$(E,(\cdot,\cdot))$所导出的空间$(E,\mathscr{F},\Delta_2)$就是一特殊的概率内积空间，其中$\Delta_2=\min$，而 $\mathscr{F}$：$E\times E\to\mathscr{D}$由下式定义：

$$F_{x,y}(t)=H(t-(x,y)),\ \forall x,y\in E,\ t\in R$$

命题 1 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一概率内积空间，则函数$\sup\{t\in R,F_{x,y}(t)<1\}$：$E\times E\to R$ 具有下面的性质：

(i) $\sup\{t\in R,F_{x,y}(t)<1\}=\sup\{t\in R,F_{y,x}(t)<1\}$，$\forall x,y\in E$；

(ii) $\sup\{t\in R,F_{x,x}(t)<1\}\geqslant0$；且 $\sup\{t\in R,F_{x,x}(t)<1\}=0$ 当而且仅当 $x=\theta$；

(iii) $\sup\{t\in R,F_{\alpha x,y}(t)<1\}=\alpha\sup\{t\in R,F_{x,y}(t)<1\}$，$\forall\alpha\in R$；

(iv) $\sup\{t\in R,F_{x+y,z}(t)<1\}=\sup\{t\in R,F_{x,z}(t)<1\}+\sup\{t\in R,F_{y,z}(t)<1\}$，$\forall x,y,z\in E$.

证：(i)，(iii)由(PI—1)和(PI—5)直接可得，另由(PI—2)，$F_{x,x}(0)=0$，$\forall x\in E$，故$\sup\{t\in R,\ F_{x,x}(t)<1\}\geqslant0$，$\forall x\in E$.

其次，若 $\sup\{t\in R,\ F_{x,x}(t)<1\}=0$，则对任意的 $\varepsilon>0$ 有 $F_{x,x}(\varepsilon)=1$。于是由分布函数的不减性和 $F_{x,x}(0)=0$，$\forall x\in E$ 得知 $F_{x,x}(t)=H(t)$，$\forall t\in R$。故由(PI—2)有$x=\theta$。

反之，若 $x=\theta$，由(PI—2)有

$\sup\{t\in R,\ F_{\theta,\theta}(t)<1\}=\sup\{t\in R,H(t)<1\}=0$

故性质(ii)得证.

下证性质(iv)成立.

令 $\alpha(x,y)=\sup\{t\in R,\ F_{x,y}(t)<1\}$. 由(PI—3)，对任给的 $\varepsilon>0$

$$F_{x+y,z}(\alpha(x,z)+\alpha(y,z)+\varepsilon)\geqslant\Delta\left(F_{x,z}\left(\alpha(x,z)+\frac{\varepsilon}{2}\right),\ F_{y,z}\left(\alpha(y,z)+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$
$$=\Delta(1,1)=1,\ \forall x,y,z\in E$$

上式表明

$$\sup\{t\in R,\ F_{x+y,z}(t)<1\}\leqslant\alpha(x,z)+\alpha(y,z)+\varepsilon,\ \forall x,y,z\in E$$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，故

$$\sup\{t\in R, F_{x+y,z}(t)<1\}\leqslant\sup\{t\in R, F_{x,z}(t)<1\} +\sup\{t\in R, F_{y,z}(t)<1\},\quad \forall x,y,z\in E \tag{1.1}$$

再由条件(PI—3)，对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$F_{x+y,z}(a(x,z)+a(y,z)-\varepsilon)\leqslant\overline{\Delta}\left(F_{x,z}\left(a(x,z)-\frac{\varepsilon}{2}\right),\ F_{y,z}\left(a(y,z)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

$$=1-\Delta\left(1-F_{x,z}\left(a(x,z)-\frac{\varepsilon}{2}\right),1-F_{y,z}\left(a(y,z)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right),\quad \forall x,y,z\in E$$

因 $F_{x,z}\left(a(x,z)-\frac{\varepsilon}{2}\right)<1$，$F_{y,z}\left(a(y,z)-\frac{\varepsilon}{2}\right)<1$。于是由$\Delta$是强 t 范数，得知

$$F_{x+y,z}(a(x,z)+a(y,z)-\varepsilon)<1\quad(\forall x,y,z\in E)$$

因而有

$$\sup\{t\in R, F_{x+y,z}(t)<1\}\geqslant a(x,z)+a(y,z)-\varepsilon\quad(\forall x,y,z\in E) \tag{1.2}$$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意性，结合(1.1)，(1.2)得证性质(iv)。

命题证毕。

命题 2 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一概率内积空间，则下面的不等式成立：

(i) $$|\sup\{t\in R, F_{x,y}(t)<1\}|\leqslant(\sup\{t\in R, F_{x,x}(t)<1\})^{1/2}\cdot(\sup\{t\in R, F_{y,y}(t)<1\})^{1/2}\quad(\forall x,y\in E).$$

(ii) $$(\sup\{t\in R, F_{x+y,x+y}(t)<1\})^{1/2}\leqslant(\sup\{t\in R, F_{x,x}(t)<1\})^{1/2}+(\sup\{t\in R, F_{y,y}(t)<1\})^{1/2}\quad(\forall x,y\in E)$$

证：令 $a=\sup\{t\in R, F_{x,y}(t)<1\}$。对每一$\lambda\in R$，由命题 1 得知

$$0\leqslant\sup\{t\in R, F_{\lambda x+y,\lambda x+y}(t)<1\} =\lambda^2\sup\{t\in R, F_{x,x}(t)<1\}+\sup\{t\in R, F_{y,y}(t)<1\}+2\lambda a \tag{1.3}$$

若 $x=\theta$，(i)显然成立。若 $x\neq\theta$，于(1.3)中取

$$\lambda=\frac{-a}{\sup\{t\in R, F_{x,x}(t)<1\}} \tag{1.4}$$

化简，即得

$$0\leqslant\sup\{t\in R, F_{\lambda x+y,\lambda x+y}(t)<1\}=\sup\{t\in R, F_{y,y}(t)<1\}-\frac{a^2}{\sup\{t\in R, F_{x,x}(t)<1\}}$$

(i)得证。

另由命题 1 和上面的结论(i)得知

$$\begin{aligned}\sup\{t\in R, F_{x+y,x+y}(t)<1\}&=\sup\{t\in R, F_{x+y,x}(t)<1\}+\sup\{t\in R, F_{x+y,y}(t)<1\}\\&\leqslant(\sup\{t\in R, F_{x+y,x+y}(t)<1\})^{1/2}[(\sup\{t\in R, F_{x,x}(t)<1\})^{1/2}\\&\quad+(\sup\{t\in R, F_{y,y}(t)<1\}^{1/2}],\quad \forall x,y\in E\end{aligned}$$

(ii)得证。证毕。

二、概率内积空间的拓扑

由命题 1 和命题 2，每一概率内积空间$(E,\mathscr{F},\Delta)$都可以用 $(\sup\{t\in R, F_{x,x}(t)<1\})^{1/2}$，$x\in E$ 赋范化。因此按照这一范数拓扑，可以引进如下概念。

定义 4 设$(E,\mathscr{F},\varDelta)$是一概率内积空间。$E$中的序列$\{x_n\}$称为收敛于$x\in E$（记为$x_n\to x$），如果

$$\lim_{n\to\infty}(\sup\{t\in R, F_{x_n-x,\,x_n-x}(t)<1\})^{1/2}=0$$

$\{x_n\}\subset E$称为 Cauchy 列，如果

$$\lim_{m,n\to\infty}(\sup\{t\in R, F_{x_m-x_n,\,x_m-x_n}(t)<1\})^{1/2}=0$$

$(E,\mathscr{F},\varDelta)$称为完备的概率内积空间，如果$E$中的每一 Cauchy 列都收敛于$E$中的某一点。

定义 5 设$(E,\mathscr{F},\varDelta)$是概率内积空间，映象$T$：$E\to E$称为连续的，如果$x_n\to x$，就有$Tx_n\to Tx$。

三、不动点定理

本节中处处假定$(E,\mathscr{F},\varDelta)$是完备的概率内积空间。

定理 1 设S,T是$(E,\mathscr{F},\varDelta)$上的连续自映象对，满足条件

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sup\{t\in R, F_{S^nx-T^ny,\,S^nx-T^ny}(t)<1\}^{1/2}<\infty \quad (\forall x,y\in E) \tag{3.1}$$

则存在一点$x_*\in E$，使得

(i) x_*是S和T的唯一公共不动点；

(ii) x_*也是每一S和T的唯一不动点；

(iii) 对任一$x_0\in E$，迭代序列$\{S^nx_0\}_{n=0}^{\infty}$，$\{T^nx_0\}_{n=0}^{\infty}$收敛于同一点$x_*$。

证：对任一$x_0\in E$，作序列$\{x_n=S^nx_0\}_{n=0}^{\infty}$。由命题 2 (ii) 和 (3.1)有

$$(\sup\{t\in R, F_{x_{k+m}-x_k,\,x_{k+m}-x_k}(t)<1\})^{1/2}\leqslant\sum_{i=k}^{k+m-1}(\sup\{t\in R, F_{x_{i+1}-x_i,\,x_{i+1}-x_i}(t)<1\})^{1/2}$$

$$\leqslant\sum_{i=k}^{k+m-1}[(\sup\{t\in R, F_{S^ix_1-T^ix_1,\,S^ix_1-T^ix_1}(t)<1\})^{1/2}$$

$$+(\sup\{t\in R, F_{T^ix_1-S^ix_0,\,T^ix_1-S^ix_0}(t)<1\})^{1/2}]$$

于上式两端让$k\to\infty$取极限，由条件(3.1)即得

$$\lim_{k\to\infty}(\sup\{t\in R, F_{x_{k+m}-x_k,\,x_{k+m}-x_k}(t)<1\})^{1/2}=0 \tag{3.2}$$

上式表明$\{x_n\}$是E中的 Cauchy 列。由$(E,\mathscr{F},\varDelta)$的完备性，不妨设$x_n\to u_*\in E$。由$S$的连续性，有$Sx_n\to Su_*=u_*$。故$u_*$是$S$的不动点。

同理，对任一$x_0\in E$，作序列$\{T^nx_0\}$，亦可证其收敛于同一点$y_*\in E$，且y_*是T的不动点。

下证$u_*=y_*$，而且$x_*=u_*=y_*$就是所求的点。

事实上，设$G(S)$，$G(T)$分别表S和T在E中的一切不动点的集合。因$u_*\in G(S)$，$y_*\in G(T)$，故$G(S)\neq\phi$，$G(T)\neq\phi$。于是由 (3.1) $\forall x\in G(S)$，$y\in G(T)$有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sup\{t\in R,F_{S^nx-T^ny,S^nx-T^ny}(t)<1\})^{1/2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\sup\{t\in R,F_{x-y,x-y}(t)<1\})^{1/2}<\infty$$

由上式即得知

$$\sup\{t\in R,\ F_{x-y,x-y}(t)<1\}=0\qquad(\forall x\in G(S),\ y\in G(T))$$

故 $x=y$，$\forall x\in G(S)$，$y\in G(T)$，即

$$G(S)=G(T)=\{u_*\}=\{y_*\}\tag{3.3}$$

定理得证。

定理 2 设 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 $(E,\mathscr{F},\varDelta)$ 上的连续自映象列，且满足条件：对一切正整数 i，j，$i\neq j$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sup\{t\in R,F_{T_i^nx-T_j^ny,T_i^nx-T_j^ny}(t)<1\})^{1/2}<\infty\qquad(\forall x,y\in E.)\tag{3.4}$$

则存在一点 $x_*\in E$，使得

(i) x_* 是 $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的唯一的公共不动点；

(ii) x_* 是每一 $T\in\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的唯一不动点；

(iii) 对每一 $x_0\in E$，和每一 i，序列 $\{T_i^nx_0\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛于 x_*。

证：这一定理直接由定理 1 得之。

定理 3 设 S,T 是 $(E,\mathscr{F},\varDelta)$ 上的自映象对，设存在常数 $c\in(0,1)$，使得

$$F_{Sx-Ty,Sx-Ty}(t)\geqslant F_{x-y,x-y}\left(\frac{t}{c}\right)\qquad(\forall x,y\in E,\ t\in R)\tag{3.5}$$

则定理 1 的结论仍成立。

证：由 (3.5) 有

$$\sup\{t\in R,F_{Sx-Ty,Sx-Ty}(t)<1\}\leqslant\sup\left\{t\in R,F_{x-y,x-y}\left(\frac{t}{c}\right)<1\right\}$$

$$=c\cdot\sup\{t\in R,F_{x-y,x-y}(t)<1\}\qquad(\forall x,y\in E)\tag{3.6}$$

故对任意的正整数 n，$n=1,2\cdots$，由 (3.6) 可得

$$\sup\{t\in R,F_{S^nx-T^ny,S^nx-T^ny}(t)<1\}\leqslant c^n\cdot\sup\{t\in R,F_{x-y,x-y}(t)<1\},\quad\forall x,y\in E\tag{3.7}$$

因而有

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sup\{t\in R,F_{S^nx-T^ny,S^nx-T^ny}(t)<1\})^{1/2}$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}c^{\frac{n}{2}}(\sup\{t\in R,F_{x-y,x-y}(t)<1\})^{1/2}<\infty\qquad(\forall x,\ y\in E)$$

另由(3.6)和命题 2 (ii)有

$$(\sup\{t\in R,F_{Tx-Ty,Tx-Ty}(t)<1\})^{1/2}$$

$$\leqslant(\sup\{t\in R,F_{Tx-Sx,Tx-Sx}(t)<1\})^{1/2}+(\sup\{t\in R,F_{Sx-Ty,Sx-Ty}(t)<1\})^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\sup\left\{t\in R,F_{x-x,x-x}\left(\frac{t}{c}\right)<1\right\}\right)^{1/2}+\left(\sup\left\{t\in R,F_{x-y,x-y}\left(\frac{t}{c}\right)<1\right\}\right)^{1/2}$$

$$=0+(c\cdot\sup\{t\in R,F_{x-y,x-y}(t)<1\})^{1/2}\qquad(\forall x,y\in E)$$

上式表明 T 是 $(E,\mathscr{F},\varDelta)$ 上的连续映象。

同理可证 S 是 $(E,\mathscr{F},\varDelta)$ 上的连续映象。因而定理 1 的条件全部被满足。证毕。

定理 4 设 S,T 是 $(E,\mathscr{F},\varDelta)$ 上的自映象。设 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是满足 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{1/2}<\infty$ 的正常数序列。再设对每一 $n\,(n=0,1,2,\cdots)$，下式成立

$$F_{S^nx-T^ny,S^nx-T^ny}(t)\geqslant F_{x-y,x-y}\left(\frac{t}{c_n}\right)\qquad(\forall x,y\in E,t\in R)\tag{3.8}$$

则定理 1 的结论仍成立。

证：于(3.8)取 $n=1$，仿定理 3 一样可证 S,T 是 $(E,\mathscr{F},\varDelta)$ 上的连续自映象。其次由 (3.8) 知

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sup\{t\in R,F_{S^nx-T^ny,S^nx-T^ny}(t)<1\})^{1/2}$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sup\left\{t\in R,F_{x-y,x-y}\left(\frac{t}{c_n}\right)<1\right\}\right)^{1/2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{\frac{1}{2}}(\sup\{t\in R,F_{x-y,x-y}(t)<1\})^{1/2}<\infty\qquad(\forall x,y\in E)$$

其中 $C_0=1$ 故定理 1 的条件全部被满足。证毕。

四、应　用

作为应用的例子，在本节中我们应用第三节中所得结果研究 $L^2(G)$ 空间中 Uryson 积分方程

$$x(s)=y(s)+\int_G K(s,t,x(t))dt\tag{4.1}$$

解的存在性和唯一性问题，这里 G 是有限维空间 R^n 中的有界闭集，$L^2(G)$ 是 G 上平方 Lebesgue 可积的实函数空间，$y(s)$ 是 $L^2(G)$ 中的给定的函数。

我们先证下面的引理。

引理 1 设 $(E,(\cdot,\cdot))$ 是实 Hilbert 空间，$\|\cdot\|_E$ 表 E 中的范数，设 $(E,\mathscr{F},\varDelta_2)$ 是由 $(E,(\cdot,\cdot))$ 导出的概率内积空间，其中 $\varDelta_2=\min$，$\mathscr{F}$：$E\times E\to\mathscr{D}$ 由下式定义：

$$F_{x,y}(t)=H(t-(x,y))\qquad(\forall x,y\in E)\tag{4.2}$$

则下面的结论等价：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|_E=0$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sup\{t\in R,F_{x_n-x,x_n-x}(t)<1\})^{1/2}=0$.

证：由(4.2)有

$$(\sup\{t\in R, F_{x_n-x,x_n-x}(t)<1\})^{1/2}=(\sup\{t\in R, H(t-(x_n-x,x_n-x))<1\})^{1/2}$$
$$=(x_n-x,\ x_n-x)^{1/2}=\|x_n-x\|_E \tag{4.3}$$

于是引理 1 的结论由(4.3)得之.证毕.

引理 2[3] 设 Vryson 方程(4.1)中的函数 $K(s,t,u)$ $(s,t\in G,-\infty<u<\infty)$ 关于 u 连续，且满足条件

$$|K(s,t,u)|\leqslant R(s,t)(a+b|u|)\qquad(s,t\in G,\ -\infty<u<\infty) \tag{4.4}$$

其中 $a,b>0$，且

$$\int_G\int_G|R(s,t)|^2dsdt<\infty \tag{4.5}$$

则由下式定义的算子T：

$$Tx(s)=y(s)+\int_G K(s,t,x(t))dt \tag{4.6}$$

是$L^2(G)\to L^2(G)$的连续算子.

定理 5 设方程(4.1)中的函数 $K(s,t,u)(s,t\in G,\ -\infty<u<\infty)$ 关于 u 连续且满足条件(4.4)和(4.5). 对给定的 $y(s)\in L^2(G)$，由(4.6)定义的积分算子 T：$L^2(G)\to L^2(G)$ 满足下面的条件：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n x-T^n u\|_{L^2(G)}<\infty\qquad(\forall x(s),\ u(s)\in L^2(G)) \tag{4.7}$$

则对给定的 $y(s)\in L^2(G)$，方程(4.1)在$L^2(G)$中存在唯一解$x_*(s)$，而且对任一$x_0(s)\in L^2(G)$，迭代序列

$$x_{n+1}(s)=y(s)+\int_G K(s,t,x_n(t))dt\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

按$L^2(G)$中的范数$\|\cdot\|_{L^2(G)}$收敛于 $x_*(s)$.

证：现考虑由 $(L^2(G),\ (\cdot,\cdot))$所诱导出的概率内积空间$(L^2(G),\mathscr{F},\varDelta_2)$，其中$\varDelta_2=\min$，$\mathscr{F}$：$L^2(G)\times L^2(G)\to\mathscr{D}$ 由下式定义：

$$F_{x,u}(t)=H\left(t-\int_G x(s)u(s)ds\right)\qquad(t\in R, x(s), u(s)\in L^2(G)) \tag{4.8}$$

由引理 1 知$(L^2(G),\mathscr{F},\varDelta_2)$是一完备的概率内积空间. 由引理 2，$T$是$(L^2(G),\ \mathscr{F},\varDelta_2)\to(L^2(G),\mathscr{F},\varDelta_2)$的连续算子，另由(4.8)我们有

$$\sup\{t\in R, F_{x,u}(t)<1\}=\sup\left\{t\in R,\ H\left(t-\int_G x(s)u(s)\,ds\right)<1\right\}$$
$$=\int_G x(s)u(s)ds\qquad(\forall x(s), u(s)\in L^2(G)) \tag{4.9}$$

由(4.9)即可得知

$$(\sup\{t\in R, F_{x-u,x-u}(t)<1\})^{1/2}=\left(\int_G[x(s)-u(s)]^2ds\right)^{1/2}=\|x-u\|_{L^2(G)} \tag{4.10}$$

于是由(4.7)和(4.10)得出

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sup\{t\in R, F_{T^n x-T^n u,T^n x-T^n u}(t)<1\})^{1/2}<\infty\quad(\forall x(s), u(s)\in L^2(G)) \tag{4.11}$$

故定理 1 的条件（当$S=T$时）全部被满足．故 T 在 $L^2(G)$存在唯一不动点 $x_*(s)$，即方程(4.1)在 $L^2(G)$中存在唯一解 $x_*(s)$，而且对任一 $x_0(s)\in L^2(G)$，迭代序列

$$x_{n+1}(s)=y(s)+\int_G K(s,t,x_n(t))dt \qquad (n=0,1,2\cdots)$$

按$L^2(G)$ 中的范数$\|\cdot\|_{L^2(G)}$ 收敛于 $x_*(s)$．证毕．

参 考 文 献

[1] Schweizer, B. and A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New York, Amsterdam, Oxford, (1982).

[2] Dumitrescu, C., Un Produit scalaire probabiliste, *Rev. Roum. Math. Pure eti Appl.*, T. 26, No. 3(1981), 399—404.

[3] Krasnoselskii, M. A., *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, (1964).

Fixed Point Theorem in Probabilistic Inner Product Spaces

Zhang Shi-sheng

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Abstract

The purpose of this paper is to introduce a new modifying definition for probabilistic inner product space, and to establish several new fixed point theorems for mappings on such kind of apaces. As an example of applications, we utilize the results of this paper to study the existence and uniqueness of solution of Urysons integral equation in [4].