应用数学和力学，第5卷第6期（1984年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

非Fuchs型方程的新理论——树级数解的表现定理(Ⅱ)*

董　明　德

（中国科学院理论物理所，1983年9月9日收到）

摘　　要

本文的主要结果是证明表现定理：非正则积分是类新颖解析函数，它表成Taylor-Fourier混合型树级数，其中Fourier级数的每一系数本身都是Taylor级数，而所有Taylor系数则是方程参数的常项树级数，每一系数的高阶修正项具有树结构的无穷繁衍性.

证明此树级数解在原方程的系数定义域中解析，收敛条件是方程的结构因子小于1. 直接代入可以验证树级数解逐代满足已知方程.

与经典理论相对比，本法的优点不仅可以给出非正则积分的显式，从而解决Poincaré问题，并能统一处理具有多种奇点的方程，扩大解析理论的研究范围.

利用树图法可得非正则积分的严格解析表述. 据此易证树级解的收敛性，并满足方程.

树级数具有自守性，这与Poincaré猜测完全符合.

五、半　收　缩　部

5.1　引理3

引理3　非Fuchs型方程的基本解系的半收缩部$\varphi_\sigma^{*,**}(\zeta)$与其退化方程的基本解$\varphi_\sigma^0(\zeta)$之间存在对应关系

$$\varphi_\sigma^{*,**}(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma^{*,**}(\zeta)\varphi_\sigma^0(\zeta)$$

$$=\sum_n{}' \{C_{\sigma n0}+C_{\sigma n1}\zeta+C_{\sigma n2}\zeta^2+\cdots\}\exp[(\beta_\sigma+n)\zeta] \tag{5.1}$$

对应函数$\mathscr{D}_\sigma^{*,**}(\zeta)$是个Taylor-Fourier混合级数，当结构因子$|q_\sigma|$小于1时，它在平行带域K_ζ ($\xi_1<\mathrm{Re}\zeta<\xi_2$) 内解析，系数$C_{\sigma nk}$是方程参数集$(\alpha, \beta, \gamma)$的常项树级数：（记号见后）

$$k\leqslant p_\lambda,\qquad C_{\sigma nk}=\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\sum_{\lambda,\delta,m}\frac{1}{(p_\lambda+m-k)!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda+m-k}\{\Lambda_\lambda(\beta,n|\Theta)\Delta_\delta^m(\beta)\}$$

$$k>p_\lambda,\qquad C_{\sigma nk}=\lim_{\beta\to\beta_o}\sum_{\lambda,\delta,m}\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^m\{\Lambda_\lambda(\beta,n|\Theta)\Delta_\delta^{k+m-p_\lambda}(\beta)\}$$

---

* 本文第（Ⅰ）部分请见：应用数学和力学，5，5(1984)，647—664.

5.2 求和公式和树算符

半收缩部的结构比全收缩部复杂得多，它需要更多的序列求和公式．它的树算符将给出 Taylor-Fourier 混合级数．其树图见图 3 a，b，c．

半收缩从 $\lambda=3$开始．第 3 代领先项为

$$
\left.\begin{aligned}
&\langle 1\,2\,3\rangle=\sum_n{}'\lim_{\beta\to\beta_0}\frac{\partial}{\partial\beta}\{\varLambda_{3,1}(\beta,n)\exp[(\beta+n)\zeta]\}\\
&\qquad\varLambda_{3,1}(\beta,n)=\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\frac{M_n(\beta)M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta+n)L(\beta-n_1)}\\
&\langle 1,2,3\rangle=\sum_n{}'\lim_{\beta\to\beta_0}\varLambda_{3,2}(\beta_\sigma,n)\exp[(\beta_\sigma+n)\zeta]\\
&\qquad\varLambda_{3,2}(\beta_\sigma,n)=\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\left.\frac{M_{n_1}(\beta+n-n_1)M_{n_2}(\beta+n)M_n(\beta)}{L(\beta+n-n_1)L^2(\beta+n)}\right|_{\beta=\beta_0}\\
&\langle 1\,2\,3\rangle=\sum_n{}'\lim_{\beta\to\beta_0}\varLambda_{3,3}(\beta_\sigma,n)\exp[(\beta_\sigma+n)\zeta]\\
&\qquad\varLambda_{3,3}(\beta_\sigma,n)=\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\left.\frac{M_{n_1}(\beta+n-n_1)M_n(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta)}{L(\beta+n-n_1)L(\beta-n_1)L(\beta+n)}\right|_{\beta=\beta_0}
\end{aligned}\right\}\tag{5.2}
$$

设半收缩部第 λ 代的领先项记作

$$\langle\lambda_i\rangle=\sum_n{}'\lim_{\beta\to\beta_0}\frac{1}{p_{\lambda,i}!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_{\lambda_i}}\{\varLambda_{\lambda_i}(\beta,n)\exp[(\beta+n)\zeta]\}$$

$\varLambda_{\lambda_i}(\beta,n)$ 表领先因子，$(p_{\lambda_i}+1)$ 表极点的阶数，λ 的角标 i 表领先项的次序 $i=1,2,\cdots,N(\lambda)$，$N(\lambda)$是第λ代领先项的总数，如 $\lambda=3$，$N(3)=3$ 等等．注意，与全收缩部的领先因子不同，这里的$\varLambda$与n有关．

（1） 简单序列的求和公式

A 序列

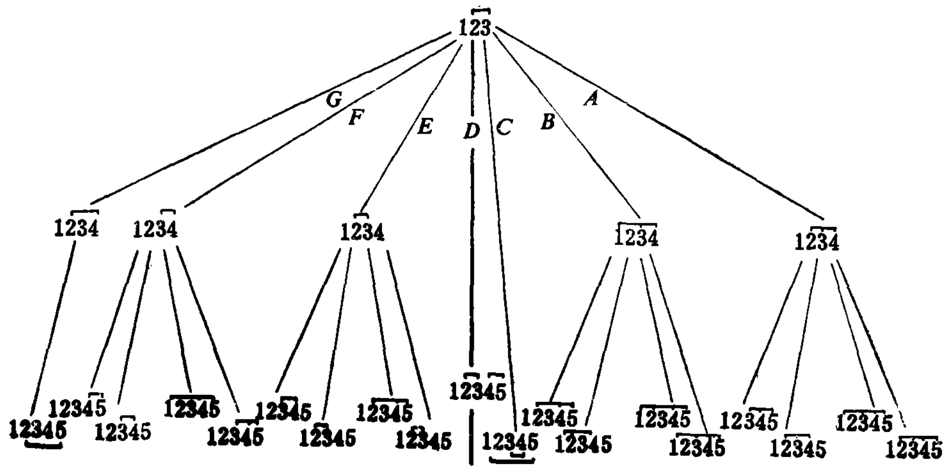

图3a 半收缩部的分支图

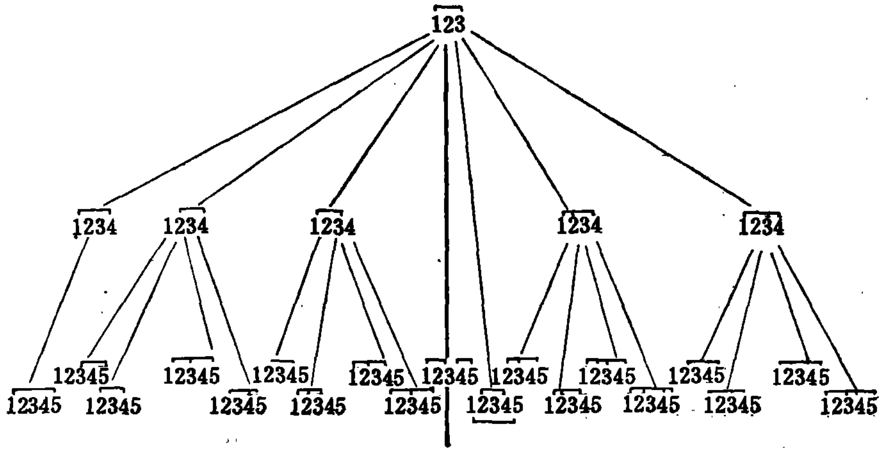

图　3b

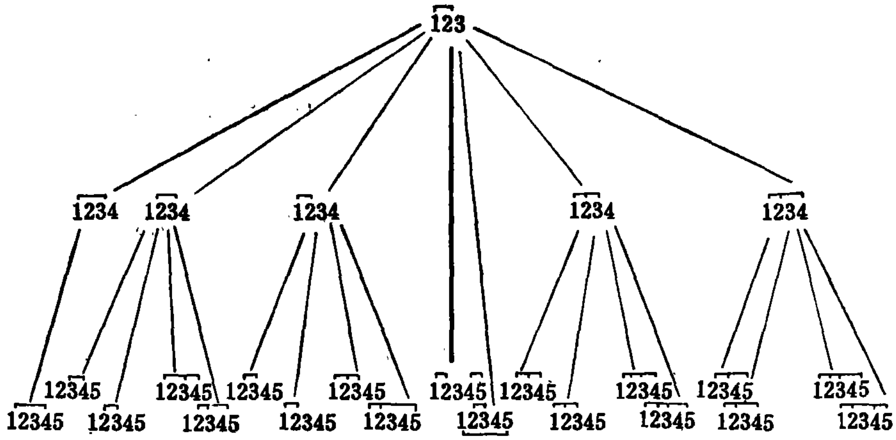

图　3c

$$A\langle \overset{\lambda}{\cdots} \rangle = \langle \overset{\lambda}{\cdots} \rangle + \langle \overset{\lambda}{\cdots}\, a_1 \rangle + \langle \overset{\lambda}{\cdots}\; a_1\; a_2 \rangle + \cdots$$

$$= \lim_{\beta \to \beta_\sigma} {\sum_n}' \frac{1}{p_\lambda!} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^{p_\lambda} \{ A_\lambda(\beta, n | A) \exp[(\beta + n)\zeta] \} \tag{5.3}$$

$$A_{s,1}(\beta, n | A) = A_{s,1}(\beta, n) \Big\{ 1 + \sum_{a_1} \frac{M_{a_1}(\beta)}{M_{n_2}(\beta)} \exp[-n_{(2)}\partial] \frac{M_{n_2}(\beta)}{L(\beta)}$$

$$\cdot \left[1 - \sum \exp[-a\partial] \frac{M_a(\beta)}{L(\beta)} \right]^{-1} \Big\}_{n_{(2)} + \Sigma a = 0}$$

*B*序列

$$B\langle \overset{\lambda}{\cdots} \rangle = \langle \overset{\lambda}{\cdots} \rangle + \langle b_1\; \overset{\lambda}{\cdots} \rangle + \langle b_2\; b_1\; \overset{\lambda}{\cdots} \rangle + \cdots$$

$$= \lim_{\beta \to \beta_\sigma} {\sum_n}' \frac{1}{p_\lambda!} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^{p_\lambda} \{ A_\lambda(\beta, n | B) \exp[(\beta + n)\zeta] \} \tag{5.4}$$

$$A_{s,1}(\beta, n | B) = A_{s,1}(\beta, n) \exp[n\partial] \left[1 - \sum_b M_b(\beta) \exp[-b\partial] \frac{1}{L(\beta)} \right]^{-1}_{n_{(2)} + \Sigma b = 0}$$

C 序列

$$C\langle \overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\langle \overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\langle \overbrace{c_1\ \overset{\lambda}{\cdots}\ c_2}\rangle+\langle \underbrace{c_1\, \overbrace{c_3\ \overset{\lambda}{\cdots}\ c_4}\, c_2}\rangle+\cdots$$

$$=\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\sum_n{}'\frac{\partial}{\partial\beta}\{A_\lambda(\beta,n|C)\exp[(\beta+n)\zeta]\} \tag{5.5}$$

$$A_{s,1}(\beta,n|C)=\left\{\left[1-\sum_{c_1}\frac{M_{c_1}(\beta)}{L(\beta+n)}\exp[-c_1\partial]\frac{M_{c_1}(\beta+n)}{L(\beta+n)}\right]\cdot\frac{L'(\beta)}{L(\beta)}-1\right\}A_{s,1}(\beta,n)$$

D 序列

$$D\langle \overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\langle \overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\langle \overset{\lambda}{\cdots}\overbrace{d_1\ \ d_2}\rangle+\langle \overset{\lambda}{\cdots}\overbrace{d_1\ \ d_2}\,\overbrace{d_3\ \ d_4}\rangle+\cdots$$

$$=\sum_n{}'\exp[(n+\beta_\sigma)\zeta]\sum_{k=0}^{\infty}d_{\sigma k}^{(\lambda)}\zeta^k \tag{5.6}$$

$$k\leqslant p_\lambda,\qquad d_{\sigma k}^{(\lambda)}=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(p_\lambda+m-k)!}\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda+m-k}\{A_\lambda(\beta,n)\Delta^m(\beta)\}$$

$$k>p_\lambda,\qquad d_{\sigma k}^{(\lambda)}=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{m}\{A_\lambda(\beta,n)\Delta^{k+m-p_\lambda}(\beta)\}$$

例

$$D\langle n\,\overbrace{1\ 2}\rangle=\sum_n{}'\exp[(\beta_\sigma+n)\zeta]\sum_{k=0}^{\infty}d_{\sigma k}^{(3)}\zeta^k$$

$$d_{\sigma 0}^{(3)}=\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^2\Delta(\beta)+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^3\Delta^2(\beta)+\cdots\right\}\cdot A_{s,1}(\beta,n)$$

$$d_{\sigma k}^{(3)}=\frac{1}{k!}\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\left\{1+\frac{\partial}{\partial\beta}\Delta+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^2\Delta^2+\cdots\right\}\cdot A_{s,1}(\beta,n)\Delta_2^{k-1}(\beta)$$

E 序列

领先项的收缩形式保持不变，后继项逐代所增的n都不参与收缩。

$$E\langle \overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\langle \overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\langle \overset{\lambda}{\cdots}\ e_1\rangle+\langle \overset{\lambda}{\cdots}e_1\ \ e_2\rangle+\cdots$$

$$=\sum_n{}'\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\frac{1}{p_\lambda!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda}\{A_\lambda(\beta,n|E)\exp[(\beta+n)\zeta]\} \tag{5.7}$$

$$A_{s,1}(\beta,n|E)=\sum_n{}'\left[1-\sum_{e_1}\frac{1}{L(\beta+n)}\exp[-e_1\partial_n]M_{e_1}(\beta+n)\right]^{-1}A_{s,1}(\beta)$$

$$=\sum_{n_1}{}'\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)L(\beta+n)}\left\{M_n(\beta)+\sum_{e_1}{}'\frac{M_{e_1}(\beta+n-e_1)}{L(\beta+n-e_1)}M_{n-e_1}(\beta)\right.$$

$$\left.+\sum_{e_1}\sum_{e_2}\frac{M_{e_1}(\beta+n-e_1)M_{e_2}(\beta+n-e_{(2)})}{L(\beta+n-e_1)L(\beta+n-e_{(2)})}M_{n-e_{(2)}}(\beta)+\cdots\right\}$$

F序列

领先项的收缩形式保不变，逐代向后移动时所增加的 n_i 均不参予收缩．它和 E 序列反向．

$$F\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\langle f_1\overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\langle f_2\ f_1\overset{\lambda}{\cdots}\rangle+\cdots$$

$$=\sum_n{}'\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\frac{1}{p_\lambda!}\Big(\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)^{p_\lambda}\{A_\lambda(\beta,n|F)\exp[(\beta+n)\zeta]\}\tag{5.8}$$

$$A_\lambda(\beta|F)=\exp[n\partial]\Big[1-\sum_f M_f(\beta)\exp[f\partial_f]\frac{1}{L(\beta)}\Big]^{-1}A_\lambda(\beta)$$

$$A_{3,1}(\beta|F)=\sum_{n_1}{}'\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{-n}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)L(\beta+n)}\Big[1-\sum_{f_1}\exp[-f_1\partial_n]\frac{M_{f_1}(\beta+n)}{L(\beta+n)}\Big]^{-1}M_n(\beta)$$

$$=\sum_n{}'\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_1}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)L(\beta+n)}\Big\{M_n(\beta)$$

$$+\sum_{f_1}M_{n-f_1}(\beta)\frac{M_{f_1}(\beta+n-f_1)}{L(\beta+n-f_1)}+\cdots\Big\}$$

G 序列

领先项的收缩中逐代插入的 n_i 均不参予收缩．

$$G\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\langle\overset{\sqcap}{\cdots}\rangle+\langle\cdots\overline{g_1\cdots}\rangle+\langle\cdots\overline{g_1\ g_2\cdots}\ \rangle+\cdots$$

$$=\sum_n{}'\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\frac{1}{p_\lambda!}\Big(\frac{\partial}{\partial\beta}\Big)^{p_\lambda}\{A_\lambda(\beta,n|G)\exp[(\beta+n)\zeta]\}\tag{5.9}$$

$$A_{3,1}(\beta,n|G)=\sum_{n_1}{}'\frac{M_{-n_1}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta+n_1)}\Big[1-\sum_{g_1}\exp[-g_1\partial_n]\frac{M_{g_1}(\beta)}{L(\beta)}\Big]^{-1}$$

$$\cdot\frac{M_n(\beta)M_{n_1}(\beta-n_1)}{L(\beta-n_1)}=\sum_{n_1}{}'\frac{M_{-n_1}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta+n_1)}\Big\{\frac{M_n(\beta)M_{n_1}(\beta-n_1)}{L(\beta-n_1)}$$

$$+\sum_{g_1}\frac{M_{g_1}(\beta-n_1)M_{n_1}(\beta-n_1-g_1)}{L(\beta-g_1)L(\beta-n_1-g_1)}M_{n-g_r}(\beta-g_1)+\cdots\Big\}$$

（2） 树算符

由简单序列算符构成复合算符作为半收缩部的树算符．显见D 算符生成高阶极点序列，从而给出幂级数 ζ^n，其它算符A，B，C，E，…，X，Y，Z只对系数产生贡献．令

$$\Theta^*=\Theta D$$

$$\Theta\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle=ABCEF\cdots XYZ\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\Big\{1+\sum_i\Theta^i\Big\}\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle$$

$$\Theta^{(1)}=a+b+c+e+\cdots$$

$$\Theta^{(2)}=ab+ac+\cdots+bc+be+\cdots$$

$$\Theta^{(3)}=abc+abe+\cdots$$

$$\Theta^{(4)}=abce+abcf+\cdots$$

$\Theta^{(5)}=abcef+\cdots$

$\cdots\cdots$

$A=1+a,\ B=1+b,\ C=1+c,\ E=1+e,\ \cdots$
$X=1+x,\ Y=1+y,\ \cdots.$

5.3 一般表式

先将Θ_λ作用于$\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle$，得到第$\lambda$代分支图然后对$\lambda$求和，自$\lambda=3$至$\lambda\to\infty$。因此，半收缩部的一般表式为

$$\varphi_\sigma^{***}(\zeta)=\sum_{\lambda=3}^{\infty}\Theta_\lambda\langle\overset{\lambda}{\cdots}\rangle=\sum_\lambda\sum_n{}'\sum_{k=0}^{\infty}c_{\sigma nk}^{(\lambda)}\zeta^k\exp[(\beta_\sigma+n)\zeta] \tag{5.10}$$

$$k\leqslant p_\lambda,\qquad c_{\sigma nk}^{(\lambda)}=\sum_\delta\sum_m\frac{1}{(p_\lambda+m-k)!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda+m-k}\{\Lambda_\lambda(\beta,n|\Theta)\Delta_\delta^m(\beta)\}$$

$$k>p_\lambda,\qquad c_{\sigma nk}^{(\lambda)}=\sum_\delta\sum_m\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^m\{\Lambda_\lambda(\beta,n|\Theta)\Delta_\delta^{k+p_\lambda-m}(\beta)\}$$

上式给出非正则积分半收缩部的整体结构．至于它的精细结构，根据树图可逐代一一写出．

5.4 收敛性证明

树级数$\sum\limits_n\sum\limits_k C_{\sigma nk}\zeta^k\exp[n\zeta]$因系混合型，其收敛性证明须分两步进行．首先证明，当n是任意时，$\sum\limits_k C_{\sigma nk}\zeta^k$是$\zeta$平面上整函数．然后证明，当$k$是任意时，$\sum\limits_n{}'\sum\limits_k C_{\sigma nk}\zeta^k\exp[n\zeta]$在平行带域$K_\zeta(\xi_1<\mathrm{Re}\zeta<\xi_2)$内绝对一致收敛．

与上节证明同理，利用Goursat定理，将系数表成积分形式

$$c_{\sigma nk}^{(\lambda)}=\sum_\delta\sum_m\frac{1}{k!}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\sigma}\Lambda_\lambda(\beta,n|\Theta)(\Delta_\delta(\beta))^{k+m-p_\lambda}\frac{d\beta}{(\beta-\beta_\sigma)^{m+1}}$$

$$=\frac{1}{k!}\ \frac{1}{2\pi i}\sum_\delta\int_{\Gamma_\sigma}\Lambda_\lambda(\beta,n|\Theta)\Delta_\delta^{k-p_\lambda}(\beta)\left[1-\frac{\Delta_\delta(\beta)}{\beta-\beta_\sigma}\right]^{-1}\frac{d\beta}{\beta-\beta_\sigma} \tag{5.11}$$

除含有未收缩n外，证明与上节相似．因此有

$$|c_{\sigma nk}^{(\lambda)}|\leqslant\sum_\delta\frac{1}{k!}\Lambda_\lambda(\beta_\sigma,n|\Theta)\frac{\Delta_\delta^{k-p_\lambda}(\bar\beta_\sigma)}{1-|q_\sigma|^\delta} \tag{5.12}$$

由于

$$\sum_{p_\lambda}\sum_\delta\frac{|\Delta_\delta|^{k-p_\lambda}}{1-|q_\sigma|^\delta}\leqslant\sum_{p_\lambda}\frac{|\Delta_2|^{k-p_\lambda}}{1-|q_\sigma|^2}\cdot[1-|q|^{k-p_\lambda-1}]^{-1}$$

$$\leqslant\left|\frac{\Delta_2}{q_\sigma}\right|^{k-[\lambda/2]}\cdot|q_\sigma|^{-1}\cdot\left[1-\left|\frac{\Delta_2}{q_\sigma}\right|\right]^{-1}$$

再者

$$\sum_{\lambda}\sum_{i}A_\lambda(\beta_\sigma,n|\Theta)\leqslant|A_3(\bar\beta_\sigma,n)|\cdot\{N(3)|\Theta_3|+N(4)|\Theta_4||q_\sigma|$$

$$+\cdots N(\lambda)|\Theta_\lambda||q_\sigma|^{\lambda-2}+\cdots\}$$

$$\leqslant\frac{N(3)|A_3(\beta,n)||\Theta_3|}{1-|q_\sigma|^2}$$

为绝对收敛级数，如条件

$$|\Theta_\lambda|\geqslant|\Theta_{\lambda+1}|$$

成立，而且 $N(\lambda)$ 为有限

$$N(\lambda)<1/|\Theta_\lambda|\cdot|q_\sigma|^\lambda$$

因此

$$\left.\begin{aligned}&|C_{\sigma nk}|\leqslant\frac{1}{k!}\left|\frac{\Delta_2}{q_\sigma}\right|^k A_3(\beta,n)g(q_\sigma)\\&g(q_\sigma)^{-1}=\frac{1}{3}\left|\frac{\Delta_2}{q_\sigma}\right|^{[\lambda/2]}|q_\sigma|[1-|q_\sigma|]^6[1-|q_\sigma|^2]^2\left[1-\left|\frac{\Delta_2}{q_\sigma}\right|\right]\end{aligned}\right\}\tag{5.13}$$

由此得知，当 n 为任意时，幂级数 $\sum\limits_k C_{\sigma nk}\zeta^k$ 的收敛半径为无穷大。

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\right)^{1/k}\left|\frac{\Delta_2(\beta_\sigma)}{q_\sigma}\right|\sqrt[k]{A_3(\beta,n)|g_\sigma|}\longrightarrow0\tag{5.14}$$

再作 $\sum\limits_n C_{\sigma nk}\exp[n\zeta]$ 的强函数 $F_{\sigma n}(\zeta)$，

$$F_\sigma(\zeta)=\sum_n{}'F_{\sigma n}(\zeta)\exp[n\zeta]\gg\sum_n{}'\sum_k C_{\sigma nk}\zeta^k\exp[n\zeta]\tag{5.15}$$

显然，这时可以取

$$F_{\sigma n}(\zeta)=a_{\sigma,n}\exp[b_\sigma\zeta]\tag{5.16}$$

$$a_{\sigma,n}=A_3(\beta_\sigma,n)g_\sigma,\quad b_\sigma=\left|\frac{\Delta_2(\beta_\sigma)}{q_\sigma}\right|$$

将 $F_\sigma(z)$ 分解为两部份 $(z=e^\zeta)$

$$F_\sigma(z)=F_\sigma^+(z)+F_\sigma^-(z)\tag{5.17}$$

$$F_\sigma^-(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{\sigma,n}z^{b_\sigma+n},\qquad F_\sigma^+(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma,-n}z^{b_\sigma-n}$$

现证明 $F_\sigma^-(z)$ 在 $|z|<\rho_2$ 圆内解析，而 $F_\sigma^+(z)$ 在 $|z|>\rho_1$ 圆外解析．$(\rho_2>\rho_1)$．考虑到系数 $a_{\sigma,n}$ 含有未收缩幂次 n，利用Cauchy不等式，只有未收缩 n 须计及 a_n．因此

$$|A_3(\beta,n)|\leqslant\sum_{n_1}{}'\left|\frac{M_n(\beta)M_{n_1}(\beta-n_1)M_{-n_1}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta+n)L(\beta-n_1)}\right|$$

$$\leqslant\frac{\mathfrak{M}(\rho)}{\rho^n}\sum_{n_1}{}'\left|\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{-n_1}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta+n)L(\beta-n_1)}\right|\prod_j|\beta-\gamma_{n,j}|$$

因此有

$$|F_\sigma^+(\rho)|\leqslant\frac{A_{\sigma n}}{\rho^n}\tag{5.18}$$

$$A_{\sigma,n}\leqslant\mathfrak{M}(\rho)\sum_{n_1}{}'\left|\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{-n}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta+n)L(\beta-n_1)}\right|\prod_{j}|\beta-\gamma_{n,j}|\cdot g(q_\sigma)$$

故得 $F^-(z)$的收敛半径为R,

$$R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{A_{\sigma,n}}{\rho^n}\right|^{-\frac{1}{n}}=\rho_2$$

完全同理，可以证明$F^+(z)$的收敛半径为r,

$$r=\lim_{n\to\infty}|A_{\sigma,-n}\rho^n|^{\frac{1}{n}}=\rho_1$$

因此，$F(z)$在环域K_z（$\rho_1<|z|<\rho_2$）内绝对一致收敛．易言之，树级数$\varphi^{***}(z)$在平行带域K_ζ（$\xi_1<\mathrm{Re}\zeta<\xi_2$）内解析，即引理3得证．

六、非正则积分的解析表述

6.1 表现定理

表现定理

已知 l 阶一般非Fuchs型方程的标准式为

$$L\varphi=\sum_{n}{}'\exp[n\zeta]M_n\varphi(\zeta)$$

相应的退化方程为

$$L\varphi^0=0$$

令$\{\varphi_\sigma\}$和$\{\varphi_\sigma^0\}$分别表示此两方程的基本解系，则$\{\varphi_\sigma\}$与$\{\varphi_\sigma^0\}$之间存在一种简单的对应关系：

$$\varphi_\sigma=\mathscr{D}_\sigma\varphi_\sigma^0\qquad(\sigma=1,2,\cdots,l)\tag{6.1}$$

其中$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)$是个 Taylor-Fourier 型混合树级数：

$$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}D_{\sigma n}(\zeta)\exp[n\zeta]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}D_{\sigma nk}\zeta^k\exp[n\zeta]\tag{6.2}$$

在原方程系数所定义的平行带域K_ζ（$\xi_1<\mathrm{Re}\zeta<\xi_2$）内均匀一致收敛，如果结构因子$q_\sigma$小于1

$$|q_\sigma|=\sum_{n}{}'\left|\frac{M_n(\beta_\sigma+n)}{L(\beta_\sigma+n)}\right|<1$$

所有系数$D_{\sigma nk}$是方程参数（α，β，γ）的常项树级数：

$$D_{\sigma00}=1+B_{\sigma0}=1+\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\sum_{(\lambda)}\sum_{\delta}\sum_{m}\frac{1}{(p_\lambda+m)!}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda+m}\{A_\lambda(\beta|\Omega)\Delta_\delta^m(\beta)\}$$

$$(0=k\leqslant p_\lambda)$$

$$D_{\sigma0k}=B_{\sigma k}=\begin{cases}\lim\limits_{\beta\to\beta_\sigma}\sum\limits_{(\lambda)}\sum\limits_{\delta}\sum\limits_{m}\dfrac{1}{m!}\left(\dfrac{\partial}{\partial\beta}\right)^m\{A_\lambda(\beta|\Omega)\Delta_\delta^{k+m-p_\lambda}(\beta)\} & (k>0,k>p_\lambda)\\[2ex]\lim\limits_{\beta\to\beta_\sigma}\sum\limits_{(\lambda)}\sum\limits_{\delta}\sum\limits_{m}\dfrac{1}{(p_\lambda+m-k)!}\left(\dfrac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda+m-k}\{A_\lambda(\beta|\Omega)\Delta_\delta^m(\beta)\} & (0<k\leqslant p_\lambda)\end{cases}$$

$(n\leqslant 0)$

$$D_{\sigma n0}=A_{\sigma n}+C_{\sigma n0}=\frac{1}{L(\beta_\sigma+n)}\left\{M_n(\beta_\sigma)+{}^*\left(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\right)_n\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)}+\cdots\right\}$$

$$+\begin{cases}\lim\limits_{\beta\to\beta_\sigma}\sum\limits_{(\lambda)}\sum\limits_{\delta}\sum\limits_{m}\dfrac{1}{m!}\left(\dfrac{\partial}{\partial\beta}\right)^m\{\Lambda_\lambda(\beta,n|\Theta)\Delta_\delta^{k+m-p_\lambda}(\beta)\} & (k>p_\lambda)\\ \lim\limits_{\beta\to\beta_\sigma}\sum\limits_{(\lambda)}\sum\limits_{\delta}\sum\limits_{m}\dfrac{1}{(p_\lambda+m-k)!}\left(\dfrac{\partial}{\partial\beta}\right)^{p_\lambda+m-k}\{\Lambda_\lambda(\beta,n|\Theta)\Delta_\delta^m(\beta)\} & (k\leqslant p_\lambda)\end{cases}$$

证明

根据引理1,2,3,得到

$$\varphi_\sigma(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma(\zeta)\varphi_\sigma^0(\zeta) \tag{6.3}$$

其中

$$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)=\mathscr{D}_\sigma^*(\zeta)+\mathscr{D}_\sigma^{**}(\zeta)+\mathscr{D}_\sigma^{***}(\zeta)$$

$$\mathscr{D}_\sigma^*(\zeta)=\sum_n A_{\sigma n}\exp[n\zeta]\qquad (A_{\sigma 0}=1)$$

$$\mathscr{D}_\sigma^{**}(\zeta)=B_{\sigma 0}+B_{\sigma 1}\zeta+\cdots+B_{\sigma k}\zeta^k+\cdots$$

$$\mathscr{D}_\sigma^{***}(\zeta)=\sum_n{}'\{C_{\sigma n0}+C_{\sigma n1}\zeta+\cdots+C_{\sigma nk}\zeta^k+\cdots\}\exp[n\zeta]$$

$$D_{\sigma 00}=1+B_{\sigma 0},\qquad D_{\sigma 0k}=B_{\sigma k},$$
$$D_{\sigma n0}=A_{\sigma n}+C_{\sigma n0},\qquad D_{\sigma nk}=C_{\sigma nk}\qquad (k>0)$$

则得对应函数$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)$如上。且根据上述引理 1,2 和 3 的证明，函数$\mathscr{D}_\sigma(\zeta)$在平行带域$K_\zeta$内解析。

显然，根据系数的估值

$$A_{\sigma 0}=1,\qquad A_{\sigma n}=O(q_\sigma)$$
$$B_{\sigma 0}=O(q_\sigma^2),\qquad C_{\sigma n0}=O(q_\sigma^3)$$

得到

$$D_{\sigma 0}(\zeta)=(1+O(q_\sigma^2))+O(q_\sigma^2)\zeta+\cdots+O(q_\sigma^{2k})\zeta^{2k}+\cdots$$
$$D_{\sigma n}(\zeta)=O(q_\sigma)+O(q_\sigma^3)\zeta+\cdots+O(q_\sigma^{2k+1})\zeta^{2k+1}+\cdots$$
$$(n=\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

对于自变量为 $z(=e^\zeta)$，立即可得下列结果：非 Fuchs 型方程$\mathscr{L}\left(z,\ \dfrac{d}{dz}\right)\varphi=0$与其退化方程 $L\varphi^0=0$ 的基本解系之间的对应关系为

$$\varphi_\sigma(z)=\mathscr{D}_\sigma(z)\varphi_\sigma^0(z)=\sum D_{\sigma n}(\ln z)z^{\beta_\sigma+n} \tag{6.4}$$

对应函数$\mathscr{D}_\sigma(z)$在沿正实轴割开的环域K_z ($\rho_1<|z|<\rho_2$) 内解析，所有系数 $D_{\sigma nk}$ 都是方程参数的树级数：

$$D_{\sigma n}(\ln z)=D_{\sigma n0}+D_{\sigma n1}\ln z+\cdots+D_{\sigma nk}\ln^k z+\cdots$$

6.2 直接验证

可以验证，树级数解逐代满足方程。将正常部 $\varphi_\sigma^*(\zeta)$代入原始方程的左右端，分别得到

$$
\left.\begin{aligned}
L\varphi_\sigma^* &= \exp[\beta_\sigma\zeta]\Big\{L(\beta_\sigma)+{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\Big)M_{n_1}(\beta_\sigma)\exp[n_1\zeta] \\
&\quad +{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_{(2)})}{L(\beta_\sigma+n_1)}\exp[n_{(2)}\zeta]+\cdots \\
&\quad +{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_{(2)})\cdots M_{n_\lambda}(\beta_\sigma+n_{(\lambda)})}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})\cdots L(\beta_\sigma+n_{(\lambda-1)})} \\
&\quad \cdot\exp[n_{(\lambda)}\zeta]+\cdots\Big\} \\
\sum_n{}'\exp[n\zeta]M_n\varphi_\sigma^* &= \exp[\beta_\sigma\zeta]\Big\{\sum_{n_1}{}'M_{n_1}(\beta_\sigma)\exp[n_1\zeta] \\
&\quad +\sum_{n_2}{}'{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)}\exp[n_1\zeta]+\cdots \\
&\quad +{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)\cdots M_{n_\lambda}(\beta_\sigma+n_{(\lambda-1)})}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})\cdots L(\beta_\sigma+n_{(\lambda-1)})} \\
&\quad \cdot\exp[n_{(\lambda)}\zeta]+\cdots\Big\}
\end{aligned}\right\} \tag{6.5}
$$

对于 Fuchs 型方程，幂次 n_i 全是正（或全是负）时，解只含正常部 $\varphi_\sigma(\zeta)=\varphi_\sigma^*(\zeta)$ 不含任何收缩部 φ_σ^{**}，φ_σ^{***}，所有 $\sum\limits_{n_\lambda}{}'{}^*\Big(\sum\limits_{n_1}{}'\sum\limits_{n_2}{}'\cdots\sum\limits_{n_{\lambda-1}}{}'\Big)$全化为${}^*\Big(\sum\limits_{n_1}{}'\sum\limits_{n_2}{}'\cdots\sum\limits_{n_\lambda}{}'\Big)$. 显见 $\mathscr{L}\varphi_\sigma\equiv\mathscr{L}\varphi_\sigma^*\equiv 0$.

对于非Fuchs 型方程，$\sum\limits_n{}'\exp[n\zeta]M_n\Big(\dfrac{d}{d\zeta}\Big)\varphi_\sigma^*(\zeta)$中$n$与 $\varphi_\sigma^*(\zeta)$中 n_i 可以构成正常部，全、半收缩部：

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{n_1}{}'{}^*\Big(\sum_{n_2}{}'\Big)={}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\Big)+{}^{**}\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\Big) \\
(\lambda\geqslant 3)\quad &\sum_{n_\lambda}{}'{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\cdots\sum_{n_{\lambda-1}}{}'\Big)={}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\Big)+{}^{**}\Big(\sum_{n_1}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\Big)+{}^{***}\Big(\sum_{n_1}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\Big)
\end{aligned}\right\} \tag{6.6}
$$

因此须要逐代验证．所谓第 λ 代项 $\overset{(\lambda)}{\varphi}_\sigma(\zeta)$ 是指含 λ 个 $\sum\limits_n{}'$ 的乘积项．按代展开，有

$$
\left.\begin{aligned}
&\varphi_\sigma=\sum_{\lambda=0}^{\infty}\overset{(\lambda)}{\varphi}_\sigma,\qquad \overset{0}{\varphi}_\sigma=\exp[\beta_\sigma\zeta] \\
&\overset{(\lambda)}{\varphi}_\sigma={}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\Big)+{}^{**}\Big(\sum_{n_1}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\Big)+{}^{***}\Big(\sum_{n_1}{}'\cdots\sum_{n_\lambda}{}'\Big)
\end{aligned}\right\} \tag{6.7}
$$

代入方程，逐代比较有

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{第 0 代} & L\overset{0}{\varphi}_\sigma=0 \qquad (\because L(\beta_\sigma)=0)\\[2mm]
\text{第 1 代} & L\overset{(1)}{\varphi}{}^*_\sigma=\sum\limits_n{}'\exp[n\zeta]M_n\overset{0}{\varphi}{}^*_\sigma=0\\[4mm]
\text{第 2 代} & L(\overset{(2)}{\varphi}{}^*_\sigma+\overset{(2)}{\varphi}{}^{**}_\sigma)-\sum\limits_n{}'\exp[n\zeta]M_n\overset{(1)}{\varphi}{}^*_\sigma=0\\[4mm]
\text{第 3 代} & L\overset{(3)}{\varphi}_\sigma-\sum\limits_n{}'\exp[n\zeta]M_n(\overset{(2)}{\varphi}{}^*_\sigma+\overset{(2)}{\varphi}{}^{**}_\sigma)=0\\[4mm]
\text{第 }\lambda\text{ 代}(\lambda\geqslant 4) & L\overset{(\lambda)}{\varphi}_\sigma-\sum\limits_n{}'\exp[n\zeta]M_n\overset{(\lambda-1)}{\varphi}_\sigma=0
\end{array}\right\} \tag{6.8}
$$

第 0 代和第 1 代方程显然满足。对于第二代方程有

$$
\left.\begin{aligned}
L\overset{(2)}{\varphi}{}^*_\sigma&={}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)}\exp[(\beta_\sigma+n_{(2)})\zeta]\\
L\overset{(2)}{\varphi}{}^{**}_\sigma&=L\overline{\sum_{n_1}\sum_{n_2}}\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\frac{\partial}{\partial\beta}\;\frac{M_{n_1}(\beta)M_{n_2}(\beta-n_1)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)}\exp[\beta\zeta]\\
&=\overline{\sum_{n_1}\sum_{n_2}}\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma-n_1)}{L(\beta_\sigma-n_1)}\exp[\beta_\sigma\zeta]\\
\sum_n{}'\exp[n\zeta]M_n\overset{(1)}{\varphi}{}^*_\sigma&=\sum_{n_2}{}'{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)}\exp[(\beta_\sigma+n_{(2)})\zeta]\\
&=\overline{\sum_{n_1}\sum_{n_2}}\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)}\exp[\beta_\sigma\zeta]\\
&\quad+{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)}\exp[(\beta_\sigma+n_{(2)})\zeta]
\end{aligned}\right\} \tag{6.9}
$$

显然满足．考虑第 3 代方程，这时 $\overset{(3)}{\varphi}_\sigma$ 共有五项：

$$
{}^*(n_1,n_2,n_3),\ (\overline{n_1\,n_2\,n_3}),\ (\overline{n_1\ n_2\ n_3}),\ (\overline{n_1\ n_2}\ n_3),\ (n_1\ \overline{n_2\ n_3})
$$

因此有

$$
\left.\begin{aligned}
L\overset{(3)}{\varphi}{}^*_\sigma&={}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)M_{n_3}(\beta_\sigma+n_1+n_2)}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})}\\
&\quad\cdot\exp[(\beta_\sigma+n_{(3)})\zeta]\\
L\overset{(3)}{\varphi}{}^{**}_\sigma&={}^{**}\Big(\overline{\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'}\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)M_{n_3}(\beta_\sigma+n_1+n_2)}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})}\\
&\quad\cdot\exp[(\beta_\sigma+n_{(3)})\zeta]\\
L\overset{(3)}{\varphi}{}^{***}_\sigma&=L\{(\overline{n_1\ n_2\ n_3})+(\overline{n_1\ n_2}\ n_3)+(n_1\ \overline{n_2\ n_3})\}
\end{aligned}\right|
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&=\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma+n_2-n_1)M_{n_2}(\beta_\sigma-n_1)M_{n_3}(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma+n_2-n_1)L(\beta_\sigma-n_1)}\\
&\quad\cdot\exp[(\beta_\sigma+n_2)\zeta]\\
&\quad+\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma+n_3-n_1)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_3)M_{n_3}(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma+n_3)L(\beta_\sigma+n_3-n_1)}\\
&\quad\cdot\exp[(\beta_\sigma+n_3)\zeta]\\
&\quad+\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\lim_{\beta\to\beta_\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left\{\frac{M_{n_1}(\beta)M_{n_2}(\beta-n_2)M_{n_3}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_2)}\right.\\
&\quad\left.\cdot\exp[(\beta+n_1)\zeta]\right\}
\end{aligned}\right\}\qquad(6.10)
$$

而

$$
\left.\begin{aligned}
&\sum_{n}{}'\exp[n\zeta]M_n\overset{(2)}{\varphi}{}^*_\sigma(\zeta)=\sum_{n}{}'\exp[n\zeta]M_n\\
&\quad\cdot{}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})}\exp[(\beta_\sigma+n_{(2)})\zeta]\\
&={}^*\Big(\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\Big)\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)M_{n_3}(\beta_\sigma+n_{(2)})}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})}\exp[(\beta_\sigma+n_{(3)})\zeta]\\
&\quad+\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_1)M_{n_3}(\beta_\sigma+n_{(2)})}{L(\beta_\sigma+n_1)L(\beta_\sigma+n_{(2)})}\exp[\beta_\sigma\zeta]\\
&\quad+\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma+n_2-n_1)M_{n_2}(\beta_\sigma-n_1)M_{n_3}(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma-n_1)L(\beta_\sigma-n_1+n_2)}\exp[(\beta_\sigma+n_2)\zeta]\\
&\quad+\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\frac{M_{n_1}(\beta_\sigma+n_3-n_1)M_{n_2}(\beta_\sigma+n_3)M_{n_3}(\beta_\sigma)}{L(\beta_\sigma+n_3)L(\beta_\sigma+n_3-n_1)}\exp[(\beta_\sigma+n_3)\zeta]\\
&\sum_{n}{}'\exp[n\zeta]M_n\overset{(2)}{\varphi}{}^{**}(\zeta)=\sum_{n}{}'\exp[n\zeta]M_n\\
&\quad\cdot\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{M_{n_1}(\beta-n_1)M_{n_2}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)}\exp[\beta_\sigma\zeta]\right\}\\
&=\sum_{n_1}{}'\sum_{n_2}{}'\sum_{n_3}{}'\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{M_{n_2}(\beta-n_1)M_{n_3}(\beta)M_{n_1}(\beta)}{L'(\beta)L(\beta-n_1)}\exp[(\beta+n_1)\zeta]\right\}
\end{aligned}\right\}\qquad(6.11)
$$

故得$\mathscr{L}\overset{(3)}{\varphi}\equiv0$。同理，可证$\mathscr{L}\overset{(\lambda)}{\varphi}\equiv0$ $(\lambda\geqslant4)$。

七、讨　论

7.1 对应原理和经典理论的对比

本文的对应原理和一般经典理论（以 Hill 无穷行列式为基础）相比较，两者的基本不同处列入表1．现略述两种理论的逻辑基础以及进一步推广应用树级数法的可能性．

经典理论在逻辑基础上的缺点．

经典理论不能求出非正则积分的明显表式已经完全暴露出它的基本缺陷．

对应原理的建立可以克服传统方法上两个基本缺点，即形式解的先验性和基本解系求法的不完备性．

（1） 形式解的先验性．

由非正则积分表式可知假定的形式解并不能给出真实解的内禀结构．显然，解的结构与方程的奇点类型有密切关系．但是，解的结构定理只对正则极点才有证明，即 Fuchs 定理．对于其它类型的奇异性并未一一建立．形式解不仅导致不可求显式的矛盾，有时事先难以臆测（如对奇线情况）．对应原理是以解析法为基础，求解有自然性，不必计及奇点的类型，故有一定的优越性．

表 1　经典理论与对应原理的比较表

	经　典　理　论	对　应　原　理
1. 方　程	$\sum\limits_{\mu} P_{\mu}(z)d^{\mu}/dz^{\mu}\varphi=0$	$L\varphi=\sum\limits_{n}{}' \exp[n\zeta]M_{n}\varphi$
2. 解　法	代数法： a. 形式解假定 b. 比较系数法 c. 数值解	解析法： a. 对应关系 b. 延拓原理 c. 树图法
3. 解析解	显式不可求（Poincaré）	可得树级数显式（表现定理）
4 指　标	$\gamma_{\sigma}\begin{cases}\text{无穷行列式}\\ \text{个数未证}\end{cases}$	$\beta_{\sigma}\begin{cases}\text{特征方程}L(\beta)=0\\ \text{个数即方程阶数 } l\end{cases}$
5 系　数	无递推关系	有树结构
6 收敛性	von Koch 证明 （Poincaré 收敛条件）	表现定理 （条件 $\lvert q_{\sigma}\rvert<1$）
7 校　验	（数值计算？）	直接代入
8. 基本解系	Frobenius 法无法应用	异常指标表现定理
9. 方法基础	a. 形式解的先验性 b. 基本解系求法不完备性	a. 求解的自然性 b. 基本解系求法的统一性
10 备　注		a. 推广方程统一理论 b. 新颖函数的内禀结构

（2） 基本解系求法的不完备性．

对于异常指标情况，即 Cayley 指标（或极点）之差为零或整数时，基本解系的求法就比较复杂．对于正则积分，须要利用 Frobenius 的参数微分法．实际上，变系数方程中 Frobenius 法只不过是常系数方程中 Abel 法的推广．熟知 Weierstrass 对此曾提出反例，并

论证 Abel 法并非无条件成立，这就是微振理论中所谓 Abel 矛盾（或称 D'alembert-Lagrange 矛盾）．Frobenius 法既是 Abel 法的推广，自然而然地也将包含类似性质的矛盾．这在方法论上缺乏内在封闭性．

进一步分析表明参数微分法与求第一解的比较系数法两者本质上并不相同．前者以后者为基础，再从外部引进微分运算．这样，求一个方程的全部线性独立解须用两种不同手续，任一法都不具有完备性．对应原理则与此不同，它用解析法统一地求出所有线性独立解，异常指标情况同样由 Cauchy 留数定理给出，自动计及高阶极点的阶数及其分布情况．

最后，还应强调指出，对于非正则积分，应用参数微分法在异常指标的一般情况将导致明显的错误，这比 Weierstrass 讨论的情况更具有一般性（详见[2]）

总之，不论正则积分或非正则积分，不论正常指标或异常指标，对应原理可以自动地、统一地给出基本解系，从而消除了经典方法的先验性和不完备性．

7.2　树级数

A．　树级数的意义和重要性

综上可以断言，一般线性方程除了通常递推级数外，还存另一类新的树级数解．这两类积分的根本区别在于不同的内禀结构．

正则积分之所以能表成递推级数形式是由于解的展开系数是方程的代数函数，直接归纳法完全成立，如 Legendre 函数等完全有确定的递推关系来表述．

非正则积分之所以要表成树级数形式是由于其中一部份级数解符合直接归纳法，即系数有递推关系，与正则积分完全相同，但是另一部份级数解的系数具有树结构，必须采用简接的树图归纳法来表述．简言之，非正则积分是类新颖的解析函数，展开系数则是方程参数的一种独特的超越函数（树级数）．换句话说，Poincaré 问题的实质在于非正则积分是类新颖的解析函数，因此必须采用直接和简接归纳法才能给出完整的解析表述．

显然，引进树级数这一分析工具可以扩大微分方程解析理论的研究领域．

实际上，通常的递推级数只是树级数的特例而已．这是由于正则方程只是非正则方程的特例．直接归纳法只是简接归纳法的特例——在树图中只留“主干”，去除一切分支图形，就得到通常的递推关系．

根据表现定理，非正则积分通过方程的参数集可以表成 Taylor-Fourier 混合型树级数，其中 Fourier 级数的系数本身都是 Taylor 级数，而所有 Taylor 系数又都是方程参数的常项树级数，它的高阶修正项具有树结构的无穷繁衍性．这类树级数解过去未见讨论．它的解析性质有待进一步阐明，特别是结合自守函数理论．

经典理论（Hill-Poincaré-von Koch）所假定的形式解完全符合非正则积分的内禀结构，即自然解．为此需将解表成赝周期级数，即证明表现定理具有以下形式[2]：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_\sigma(\zeta)&=\mathscr{D}_\sigma(\zeta)\varphi_\sigma^0(\zeta)\\ \mathscr{D}_\sigma(\zeta)&=\exp[\gamma_\sigma\zeta]\sum_{-\infty}^{\infty}A_{\sigma,m}\exp[m\zeta]\end{aligned}\right\}\tag{7.1}$$

其中 $\gamma, A_{\sigma,m}$ 分别是方程参数的树级数

$$\gamma_\sigma={}^{(2)}\gamma_\sigma+{}^{(3)}\gamma_\sigma+{}^{(3)}\gamma_\sigma+\cdots$$

$$A_{\sigma,m}={}^{(1)}A_{\sigma,m}+{}^{(2)}A_{\sigma,m}+{}^{(3)}A_{\sigma,m}+\cdots$$

而　$${}^{(2)}\gamma_\sigma=\lim_{s\to\beta_\sigma}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\sum_n{}'\frac{M_n(s-n)M_{-n}(s)}{L'(s)L(s-n)}\right\}\quad\left(={}^{(2)}\gamma(s)\Big|_{s=\beta_\sigma}\right)$$

$$^{(2)}A_{\sigma,m}={}^{(1)}A_{\sigma,m}+\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{k}\{{}^{(2)}\gamma^{k}(s)\cdot{}^{(1)}A_{m}(s)\}\Big|_{s=\beta_{\sigma}},\quad {}^{(1)}A_{\sigma,m}={}^{(1)}A_{m}(s)\Big|_{s=\beta_{\sigma}}$$

$$^{(1)}A_{m}(s)=\frac{1}{L(s+m)}\Big\{M_{m}(s)+\sum_{n_1}{}'M_{n_1}(s)\Big[1-\sum_{n_2}{}'M_{n_2}(s+n_1)\exp[n_2\partial_n]\Big]^{-1}\cdot\frac{M_{m-n}(s+n_1)}{L(s+n_1)}\Big\}$$

……

左上角标(i)表第i代树图贡献。

B. 树级数的计算程序

根据树图法求树级数解时须同时考虑两种情况：为了一般分析，如证明收敛性，须考虑它的整体结构；为了具体数值计算，可以只计及前面几代的近似结构，再根据参数值的量阶，对所不保留的高阶项，进行估值就已经足够了。

综上显见，求树级数解的程序是完全确定的。先作主干图，按确定序列建立求和公式，由此作树算符。再作高“代”的分支图。树算符对各代领先项的作用给出相应各代的树级数。直接验证这种显式解逐代满足方程。再对 Taylor-Fourier 树级数的任一系数，按照数值计算所要求的精确度，写出它的解析表述。

树级数的形式虽然比较通常的递推级数复杂得多，但是利用电子计算机完全可以处理。为此，须要建立计算$\mathscr{D}$函数的标准程序。关于$\mathscr{D}$函数的数值分析将另行讨论。在[2]中给出它的一个重要特例，即Hill函数的解析表述。

7.3 Poincaré 猜测

Poincaré 在论断非正则积分的显式无法写出时，还曾经作过猜测：解和方程的系数之间的超越关系可能和他所提出的高级自守函数（Fuchs函数和 Klein 函数等）之间存在密切的联系（全集卷Ⅰ，p334）。如所周知，正是为了解决非正则积分问题，Poincaré 创立了自守函数理论。

高级自守函数，虽然对于方程的拓扑结构得到较完善的描述，但是它仍然不能给出非正则积分的解析表述。正如F. Klein 所指出过的，这些高级自守函数具有明显的自守性，但是缺乏数值运算的适用性。以后，自守函数理论的发展偏离了微分方程的求解问题，形成本身独立的一个分支。

综上分析，Poincaré 的高级自守函数之所以缺乏解析表述是由于将问题局限于通常的递推级数，而树级数可为解决这一问题提供新基础。

易证，$\mathscr{D}$函数在双线性变换下保持不变：

$$\mathscr{D}\left\{\frac{z}{\omega(n),(\alpha_n)}\middle|\frac{(\beta)}{(\gamma)}\right\}\longrightarrow\mathscr{D}\left\{\frac{z'}{\omega'(n)(\alpha'_n)}\middle|\frac{(\beta')}{(\gamma')}\right\}$$

$$z\longrightarrow z'=\frac{az+b}{cz+d}\qquad(ac-bd\neq 0)$$

因此，我们有理由期望，以树级数作为新的解析表述工具，进一步发展 Poincaré 的思想，有可能为微分方程的解析理论（线性以及非线性方程）开拓新的探讨途径。

（续完）

参考文献

[1] 董明德，非Fuchs型方程的新理论——树级数解的表现定理(Ⅰ)，应用数学和力学，5，5(1984).
[2] 董明德，变系数微分方程的解析理论（讲义，待刊）.

New Theory for Equations of Non-Fuchsian Type ——Representation Theorem of Tree Series Solution (Ⅱ)

Dong Ming-de

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

Our main result consists in proving the representation theorem. Irregular integral is a new type of analytic functions, represented by a compound Taylor-Fourier tree series, in which each coefficient of the Fourier series is a Taylor series, while the Taylor coefficients are tree series in terms of equations parameters, higher order correction terms to each coefficient having tree structure with inexaustable proliferation.

The solution obtained is proved to be convergent absolutely and uniformly in the region defined by coefficient functions of the original equation, provided the structure parameter is less than unity. Direct substitution shows that our tree series solution satisfies the equation explicitly generation by generation.

As compared with classical theory our method not only furnishes explicit expression of irregular integral, leading to the solution of Poincaré problem, but also provides possibility of extending the scope of investigation for analytic theory to equations with various kinds of singularities in a unifying way.

Exact explicit analytic expression for irregular integrals can be obtained by means of correspondence principle.

It is not difficult to prove the convergence of the tree series solution obtained. Direct subsitution shows it satisfies the equation.

The tree series is automorphic, which agrees completely with Poincaré's conjecture.