关于高维Liouville方程的Bäcklund变换和解的非线性叠加公式*

黄　迅　成

（上海计算技术研究所，1983年4月20日收到）

摘　要

本文指出了由Leibbrandt等人导出的关于三维空间Liouville方程$\nabla^2\alpha=\exp\alpha$，$\nabla^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2$的Bäcklund变换可以分解成几个二维空间Liouville方程的Bäcklund变换的组合．同时，由该变换导出的解的非线性叠加公式实际上是无效的．从而一些基于这一公式的讨论也不正确．文中还考虑了有关N维空间Liouville方程的一些结果．

一、引　言

近二十年来，非线性波的研究受到了数学、力学和工程等各界的越来越大的重视（见文献[1]）．为寻求非线性波方程的解，科学家付出了艰巨的劳动，提出了诸如奇异摄动理论，逆散射变换等许多有力的手段．早在1875年由Bäcklund在研究伪球面时提出的一种变换也在这一研究中发挥了重要作用．事实上，Bäcklund变换如同逆散射变换一样，已经成为寻求非线性波方程解析解的极其有效的工具．

本文所讨论的三维空间Liouville方程

$$\nabla^2\alpha=\exp\alpha,\qquad \nabla^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2 \tag{1.1}$$

边界条件为

$$\alpha\to-\infty,\ d\alpha/dr\to 0,\ 当\ r\equiv(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\to+\infty \tag{1.2}$$

是由下面的二维空间的方程发展过来的，

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)\chi=k\exp(a\chi)\qquad（关于\chi有适当边界条件） \tag{1.3}$$

其中χ是一标量场，a,k为实常数．方程(1.3)最早由Liouville在1853年所导出，后来引起了许多著名学者如Picard，Poincare和Bierberbach等人的注意．Liouville方程在静电学、液体动力学、星云理论以及等温气球和单极子理论等等的研究中有很大的应用．

Leibbrandt等人在1982年(见文[2])曾研究过三维空间Liouville方程的Bäcklund变换并由此出发导出了解的非线性叠加公式．本文则指出他们导出的三维方程的Bäcklund变换可以分解为几个二维方程的Bäcklund变换的组合，而有关解的非线性叠加公式是不成立的，基于这个公式之上的其他有关讨论也是不合适的．本文还考虑了N维Liouville方程的

* 钱伟长推荐．

有关结果。

二、三维空间Liouville方程的Bäcklund变换的分解

据文[2]，方程(1.1)的一个Bäcklund变换为

$$\mathsf{K}(i\beta-\alpha)=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right)\exp i\theta\mathcal{S} \tag{2.1}$$

其中

$$\mathsf{K}\equiv \mathsf{I}\partial_x+i(\sigma_1\partial_y+\sigma_3\partial_z) \tag{2.2}$$

$$\mathcal{S}\equiv\sigma_1\exp(-i\lambda\sigma_2) \tag{2.3}$$

这里 σ_1，σ_2，σ_3 为通常的Pauli矩阵；I 是2×2阶单位矩阵；θ,λ ($0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，$0\leqslant\lambda\leqslant2\pi$) 为变换参数；$\alpha,\beta$皆为实值函数，$\alpha$ 是方程(1.1)的解，β 是Laplace方程

$$\nabla^2\beta=0,\qquad \nabla^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2 \tag{2.4}$$

的解。

我们指出，注意到下列指数矩阵的关系式：

$$\exp(i\lambda\sigma_2)=\mathsf{I}\cos\lambda+\sigma_1\sigma_2\sin\lambda \tag{2.5}$$

$$\exp\left\{\theta\begin{pmatrix} i\sin\lambda & i\cos\lambda \\ i\cos\lambda & -i\sin\lambda\end{pmatrix}\right\}=\mathsf{I}\cos\theta+\sin\theta\begin{pmatrix} i\sin\lambda & i\cos\lambda \\ i\cos\lambda & -i\sin\lambda\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

我们可以证明

$$\mathsf{K}(i\beta-\alpha)=(\mathsf{A}+i\mathsf{B})\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{2.7}$$

其中

$$\mathsf{A}=\mathsf{I}\cos\theta \tag{2.8}$$

$$\mathsf{B}=\begin{pmatrix}\sin\theta\sin\lambda & \sin\theta\cos\lambda \\ \sin\theta\cos\lambda & -\sin\theta\sin\lambda\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

方程(2.7)的分量表示为

$$(\partial_x+i\partial_z)(i\beta-\alpha)=(\cos\theta+i\sin\theta\sin\lambda)\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{2.10a}$$

$$(\partial_x-i\partial_z)(i\beta-\alpha)=(\cos\theta-i\sin\theta\sin\lambda)\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{2.10b}$$

$$i\partial_y(i\beta-\alpha)=i\sin\theta\cos\lambda\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{2.10c}$$

$$i\partial_y(i\beta-\alpha)=i\sin\theta\cos\lambda\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{2.10d}$$

适当变形，可为

$$\partial_x(i\beta-\alpha)=\sqrt{2}\cos\theta\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{2.11a}$$

$$\partial_y(i\beta-\alpha)=\sqrt{2}\sin\theta\cos\lambda\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{2.11b}$$

$$\partial_z(i\beta-\alpha)=\sqrt{2}\sin\theta\sin\lambda\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{2.11c}$$

将上式的实虚部分开表示，利用可积性条件，我们不难证明方程(2.11a,b)为联系二维光锥坐标系中的 Liouville 方程

$$\alpha_{xy}=\sin\theta\cos\theta\cos\lambda\exp\alpha \tag{2.12}$$

和波方程

$$\beta_{xy}=0 \tag{2.13}$$

的 Bäcklund 变换。

同样地，可证方程(2.11a,c)为联系二维光锥坐标系的 Liouville 方程

$$\alpha_{xz}=\sin\theta\cos\theta\sin\lambda\exp\alpha \tag{2.14}$$

和波方程

$$\beta_{xz}=0 \tag{2.15}$$

的 Bäcklund 变换；而方程(2.11b,c)为联系二维光锥坐标系的 Liouville 方程

$$\alpha_{yz}=\sin^2\theta\sin\lambda\cos\lambda\exp\alpha \tag{2.16}$$

和波方程

$$\beta_{yz}=0 \tag{2.17}$$

的 Bäcklund 变换.

这里我们有几点注意：

一、通过适当的坐标变换，方程(2.12),(2.14)和(2.16)可以化成方程(1.3)那样标准形式的二维空间 Liouville 方程.

二、由(2.11)出发，不难推得

$$\alpha_{xx}=\cos^2\theta\exp\alpha \tag{2.18a}$$

$$\alpha_{yy}=\sin^2\theta\cos^2\lambda\exp\alpha \tag{2.18b}$$

$$\alpha_{zz}=\sin^2\theta\sin^2\lambda\exp\alpha \tag{2.18c}$$

从而有

$$\alpha_{xx}+\alpha_{yy}+\alpha_{zz}=\exp\alpha \tag{2.19}$$

此即本来的三维空间的 Liouville 方程. 同样也可由(2.11)推得

$$\beta_{xx}+\beta_{yy}+\beta_{zz}=0 \tag{2.20}$$

这就是 Laplace 方程(2.4). 可见三组二维 Liouville 方程的 Bäcklund 交换(2.11)确实也满足三维的相应方程.

三、根据变换(2.11)中参数的变化范围 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$, $0\leqslant\lambda\leqslant2\pi$, 可知上述各式中出现的有关 θ 和 λ 的三角函数皆为实数.

从以上讨论，我们可知三维空间的 Liouville 方程(1.1)的 Bäcklund 变换可以分解成三个二维空间的 Liouville 方程的组合. 这个结论我们可以推广到N维空间的 Liouville 方程.

三、有关N维空间的Liouville方程的结果

为讨论方便起见，将变换(2.11)改写为

$$\partial_{x^{(1)}}(i\beta-\alpha)=a_1\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{3.1a}$$

$$\partial_{x^{(2)}}(i\beta-\alpha)=a_2\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{3.1b}$$

$$\partial_{x^{(3)}}(i\beta-\alpha)=a_3\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{3.1c}$$

其中 $a_j=a_j(\theta_j,\lambda_j)$ $(j=1,2,3)$ 为变换的参数，并且满足条件

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \tag{3.2}$$

并且由 θ_j，λ_j 的变化范围，a_j $(j=1,2,3)$为实。

考虑N维空间中的变换

$$\partial_{x^{(j)}}(i\beta-\alpha)=a_j\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right)\qquad(j=1,2,\cdots,N) \tag{3.3}$$

其中实参数 a_j $(j=1,2,\cdots,N)$满足

$$\sum_{j=1}^{N}a_j^2=1 \tag{3.4}$$

显然此时，由(3.3)联系的α和β满足N维空间的 Liouville 方程

$$\sum_{j=1}^{N}\partial^2_{x^{(j)}}\alpha=\exp\alpha \tag{3.5}$$

和N维 Laplace 方程

$$\sum_{j=1}^{N}\partial^2_{x^{(j)}}\beta=0 \tag{3.6}$$

令 $e_1=(a_1,a_2,\cdots,a_N)$，将它扩充成一组 N 维空间 R^N 的标准正交基 $e_1,e_2,\cdots,e_N$。

设由 e_j $(j=1,2,\cdots,N)$ 为行向量组成的矩阵为$\mathbf{A}$，考虑坐标变换

$$[y^{(1)}\ y^{(2)}\ \cdots\ y^{(N)}]^T=\mathbf{A}[x^{(1)}\ x^{(2)}\ \cdots\ x^{(N)}]^T \tag{3.7}$$

我们有

$$\partial_{y^{(1)}}(i\beta-\alpha)=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right) \tag{3.8}$$

$$\partial_{y^{(j)}}(i\beta-\alpha)=0\qquad(j=2,3,\cdots,N) \tag{3.9}$$

这就是说在新的坐标下，α和β仅仅与 $y^{(1)}$ 有关，并满足

$$\alpha_{y^{(1)}y^{(1)}}=\exp\alpha \tag{3.10}$$

和

$$\beta_{y^{(1)}y^{(1)}}=0 \tag{3.11}$$

这正是通常形式的二维 Liouville 方程和波方程，它的求解是方便的。

我们也可以讨论带时间的 Liouville 方程，例如

$$(\nabla^2-\partial_t^2)\alpha=\exp\alpha,\qquad \nabla^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2 \tag{3.12}$$

以及它的 Bäcklund 变换

$$\bar{\mathsf{K}}(i\beta-\alpha)=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha+i\beta}{2}\right)\exp i\theta\bar{\mathcal{G}} \tag{3.13}$$

其中

$$\bar{\mathsf{K}}\equiv\mathsf{I}\partial_x+i(\sigma_1\partial_y+\sigma_3\partial_z)+\sigma_2\partial_t \tag{3.14}$$

$$\mathcal{G}\equiv\sigma_1\exp[(-i\lambda\sigma_2)\exp(-\tau\sigma_1)]\qquad(-\infty<\tau<+\infty) \tag{3.15}$$

β 满足方程

$$(\nabla^2-\partial_t^2)\beta=0,\quad \nabla^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2 \tag{3.16}$$

可以证明联系这二个带时间的高维方程的 Bäcklund 变换(3.13)也与变换(2.1)具有相同的结构.

四、解的非线性叠加公式

文[2]以及作者之一的文[3]在讨论高维 Liouville 方程的求解时用到有关的解的非线性叠加公式:

$$\tan\left(\frac{\beta_2-\beta_0}{4}\right)=R_{12}\tanh\left(\frac{\alpha_1^{(1)}-\alpha_1^{(2)}}{4}\right) \tag{4.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&R_{12}=\pm[(1+\mathscr{L}_{12})/(1-\mathscr{L}_{12})]^{\frac{1}{2}},\quad |\mathscr{L}_{12}|<1\\&\mathscr{L}_{12}\equiv\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\lambda_1-\lambda_2)\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

其中 $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_1^{(2)}$以及β_0, β_2 分别是由 Bäcklund 变换(2.1)相联系的方程(1.1)和(2.4)的实解,我们可表示为:

$$i\beta_0\xrightarrow{\theta_1,\lambda_1}\alpha_1^{(1)}\xrightarrow{\theta_2,\lambda_2}i\beta_2,\quad i\beta_0\xrightarrow{\theta_2,\lambda_2}\alpha_1^{(2)}\xrightarrow{\theta_1,\lambda_1}i\beta_2 \tag{4.3}$$

这里已经假设了 Bäcklund 变换(2.1)是满足可换性的.

利用前面的结果,我们可以证明上述解的非线性叠加公式实际上是无效的.

为表述方便起见,我们用 Bäcklund(2.11)的另一种书写形式(3.1)来进行讨论.此时,相应的(4.3)变为

$$i\beta_0\xrightarrow{a_j}\alpha_1^{(1)}\xrightarrow{a'_j}i\beta_2,\quad i\beta_0\xrightarrow{a'_j}\alpha_1^{(2)}\xrightarrow{a_j}i\beta_2 \tag{4.4}$$

其中 a_j 和 a'_j 与 θ_j,λ_j 有关,由 θ_j,λ_j 的变化范围可知 a_j, a'_j $(j=1,2,3)$ 皆为实数.我们有

$$\partial_{x^{(j)}}(i\beta_0-\alpha_1^{(1)})=a_j\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha_1^{(1)}+i\beta_0}{2}\right) \tag{4.5a}$$

$$\partial_{x^{(j)}}(i\beta_0-\alpha_1^{(2)})=a'_j\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha_1^{(2)}+i\beta_0}{2}\right) \tag{4.5b}$$

$$\partial_{x^{(j)}}(\alpha_1^{(1)}-i\beta_2)=a'_j\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\beta_2+\alpha_1^{(1)}}{2}\right) \tag{4.5c}$$

$$\partial_{x^{(j)}}(\alpha_1^{(2)}-i\beta_2)=a_j\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\beta_2+\alpha_1^{(2)}}{2}\right)\qquad (j=1,2,3) \tag{4.5d}$$

由上式可得

$$\partial_{x^{(j)}}(i\beta_0-i\beta_2)=a_j\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha_1^{(1)}+i\beta_0}{2}\right)+a'_j\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\beta_2+\alpha_1^{(1)}}{2}\right) \tag{4.6}$$

和

$$\partial_{x^{(j)}}(i\beta_0-i\beta_2)=a'_j\sqrt{2}\exp\left(\frac{\alpha_1^{(2)}+i\beta_0}{2}\right)+a_j\sqrt{2}\exp\left(\frac{i\beta_2+\alpha_1^{(2)}}{2}\right) \tag{4.7}$$

以上两式相减,有

$$a_j\sinh\left(\frac{\alpha_1^{(1)}-\alpha_1^{(2)}+i\beta_0-i\beta_2}{4}\right)\left[\cosh\left(\frac{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+i\beta_0+i\beta_2}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\sinh\left(\frac{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+i\beta_0+i\beta_2}{4}\right)\right]=a'_j\sinh\left(\frac{\alpha_1^{(2)}-\alpha_1^{(1)}+i\beta_0-i\beta_2}{4}\right)$$

$$\cdot\left[\cosh\left(\frac{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+i\beta_0+i\beta_2}{4}\right)+\sinh\left(\frac{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+i\beta_0+i\beta_2}{4}\right)\right] \tag{4.8}$$

或

$$a_j\sinh\left(\frac{\alpha_1^{(1)}-\alpha_1^{(2)}+i\beta_0-i\beta_2}{4}\right)\exp\left(\frac{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+i\beta_0+i\beta_2}{4}\right)$$

$$=a_j'\sinh\left(\frac{\alpha_1^{(2)}-\alpha_1^{(1)}+i\beta_0-i\beta_2}{4}\right)\exp\left(\frac{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+i\beta_0+i\beta_2}{4}\right) \tag{4.9}$$

消去非零因子 $\exp\left(\frac{\alpha_1^{(1)}+\alpha_1^{(2)}+i\beta_0+i\beta_2}{4}\right)$，并对双曲正弦函数进行展开，有

$$(a_j+a_j')\sinh\left(\frac{\alpha_1^{(2)}-\alpha_1^{(1)}}{4}\right)\cosh\left(\frac{i\beta_0-i\beta_2}{4}\right)$$

$$=(a_j-a_j')\cosh\left(\frac{\alpha_1^{(2)}-\alpha_1^{(1)}}{4}\right)\sinh\left(\frac{i\beta_0-i\beta_2}{4}\right) \tag{4.10}$$

此即

$$\frac{a_j+a_j'}{a_j-a_j'}\tanh\left(\frac{\alpha_1^{(2)}-\alpha_1^{(1)}}{4}\right)=\tanh\left[i\left(\frac{\beta_0-\beta_2}{4}\right)\right] \tag{4.11}$$

注意到 $\tanh(i\chi)=i\tan\chi$，我们有

$$\frac{a_j+a_j'}{a_j-a_j'}\tanh\left(\frac{\alpha_1^{(2)}-\alpha_1^{(1)}}{4}\right)=i\tan\left(\frac{\beta_0-\beta_2}{4}\right) \tag{4.12}$$

我们考察公式(4.12)。由于 $\alpha_1^{(1)}$，$\alpha_1^{(2)}$，β_0,β_2 以及 a_j,a_j' 皆为实，等式(4.12)右端为纯虚值函数，左端为实值函数，因此要使上式成立，只可能0=0，于是有$\beta_2=\beta_0$。这就是说，由解 $i\beta_0$，$\alpha_1^{(1)}$，$\alpha_1^{(2)}$按公式(4.12)进行非线性叠加，并不能产生新的解。

文[2,3]导出的非线性叠加公式(即本文(4.1))与上述公式(4.12)是一致的，只是他们在推导过程中遗漏了等式(4.1)左端所应该有的因子 i，从而使下面的讨论实际上是基于一个错误的出发点。因此，文[2,3]以及同一作者在文[1]中的一些结论的正确性是令人怀疑的。这方面的结果我们将作进一步报导。

鉴于文[2]的作者多次在重要的国际学术会议和学术刊物上报导过这方面的工作，因而本文的指正不仅是有意义的而且是十分必要的。

参 考 文 献

[1] Solitons'82, *Abstracts of Conference and Workshop Talks and Posters*, Edinburgh, England, Aug. (1982).

[2] Leibbrandt, G., S. S. Wang and N. Zamani, Bäcklund generated solutions of Liouville's equation and their graphical representations in three spatial dimensions, *J. Math. Phys.*, 23, 9 (1982), 1566—1572.

[3] Leibbrandt, G., Nonlinear superposition for Liouville's equation in three spatial dimensions, *Lett. Math. Phys.*, 4 (1980), 317—321.

The Bäcklund Transformation and Nonlinear Superposition Formula of Solutions for the Liouville′s Equation in Higher Dimensions

Huang Xun-cheng

(*Shanghai Institute of Computing Technique, Shanghai*)

Abstract

In this paper, we show that Bäcklund transformation derived by Leibbrandt et al. for the Liouville s equation in three spatial dimensions, $\nabla^2\alpha=\exp\alpha$, $\nabla^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2$ can be decomposed into several Bäcklund transformations for the same equation in two spatial dimensions, moreover, the superposition formula which is derived from this transformation is actually invalid, thus the discussions based on that formula is incorrect as well. We also considered some results about the Liouville's equation in N spatial dimensions.