

文章编号: 1000-0887(2004)11-1124-11

Timoshenko 梁单元超收敛结点 应力的 EEP 法计算*

王 枚, 袁 驷

(清华大学 土木工程系, 北京 100084)

(龙驭球推荐)

摘要: 将新近提出的单元能量投影(Element Energy Projection, 简称 EEP)法应用于 Timoshenko 梁单元的超收敛结点应力计算。根据单元投影定理具体推导了一般单元的计算公式, 并对两个有代表性的单元给出了数值算例。分析和算例表明, EEP 法对于解答是向量函数(即常微分方程组)的问题具有同样优良的表现, 不仅能给出与结点位移精度同阶、同量级的超收敛结点应力, 而且在位移出现了剪切闭锁的情况下仍能有效地克服应力的剪切闭锁。该研究为 EEP 法广泛应用于一般的一维常微分方程组问题的有限元解答的超收敛计算打下了良好的基础。

关键词: Timoshenko 梁单元; 超收敛应力; 单元能量投影法; 剪切闭锁

中图分类号: O242.21 文献标识码: A

1 引言及问题提出

有限元法是一种非常有效且通用的数值分析计算方法。随着有限元法的迅速发展, 人们对常规有限元中的应力精度比位移精度呈数量级的下降这一点, 越来越不满意, 引发了众多的超收敛计算的研究, 成为近年来有限元领域研究中的热点与难点之一。对于现已提出的超收敛应力计算的方法, 虽然大都可以在不同程度上使应力的精度有所提高, 但也在不同程度上存在着一些问题和难点, 例如, 计算出来的应力在单元之间不连续、边界结点和角结点难以处理、应力精度提高的不够理想(仍比不上结点位移)、实施麻烦不便、计算代价太大等。

文[1]中以一维 C^0 有限元为例, 提出了一种全新的、自然合理的超收敛解答的计算方法, 称之为单元能量投影(Element Energy Projection, 简称 EEP)法。

该方法的基本思想来源于结构力学中的矩阵位移法和有限元数学理论中的投影定理^[2,3]; 实施时只要像矩阵位移法计算杆端力那样

$$F^e = K^e \Delta^e - F_p^e \quad (1)$$

在获得了常规有限元解答后, 简单地叠加上一项类似于上式中固端力项 $-F_p^e$ 的修正项, 便可获得与结点位移同阶的应力。

* 收稿日期: 2003_02_28; 修订日期: 2004_06_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50278046); 教育部博士点基金资助项目(97000315)

作者简介: 王枚(1975—), 女, 江苏人, 博士(E-mail: wangmei93@tsinghua.org.cn);

袁驷(1953—), 男, 北京人, 教授, 院长, 中国土木工程学会副理事长, 博士(联系人, Tel: + 86_10_62786185; + 86_10_62773547; Fax: + 86_10_62771132; E-mail: yuans@tsinghua.edu.cn)。

在文[1]的基础上,该方法还被推广到一维 C^1 有限元法中去(将在另文中给出),理论分析和大量数值算例表明,这一方法对于一维 C^1 有限元来讲是同样成功的。在现有的一维 C^0 和 C^1 问题有限元研究中,EEP 法显示出以下特点:计算量小、不依赖于超收敛点、对高次元有效、对端结点有效、单元间应力连续、自由端应力精确等。

本文将该方法应用于 Timoshenko 梁单元问题,意在将 EEP 法推广到解函数是向量函数而不仅仅是标量函数的问题,同时还希望检验对于剪切闭锁的单元,EEP 法是否可以克服所计算应力的剪切闭锁。结果表明,EEP 法在这些方面都取得了成功。

2 问题描述

考虑如下的 Timoshenko 梁问题:

$$\begin{cases} L_1 \mathbf{u} \equiv - (C(w' - \phi))' = q & (0 < x < 1), \\ L_2 \mathbf{u} \equiv - (D\phi')' - C(w' - \phi) = m & (0 < x < 1), \\ w(0) = 0, \phi(0) = 0, \\ w(1) = 0, -D\phi'(1) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中解是一个有两个分量的向量函数 $\mathbf{u} = (w, \phi)$, $w(x)$ 为梁的挠度, $\phi(x)$ 为梁剖面的转角, q 为横向分布荷载, m 为分布力矩, D 为梁的弯曲刚度, C 为剪切刚度, L_1 和 L_2 为线性微分算子。边界条件表示梁在 $x = 0$ 端固支,在 $x = 1$ 端简支,如图 1 所示。梁的内力由位移定义为

$$M = -D\phi', \quad Q = C(w' - \phi), \quad (3)$$

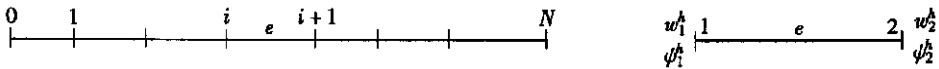
式中, M, Q 分别表示剖面上的弯矩和剪力。

记 $\mathbf{v} = (v, \theta)$, 与上述微分方程相应的能量内积为

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_0^1 (D\phi'\theta' + C(w' - \phi)(v' - \theta)) dx. \quad (4)$$

本文假定边值问题(2)是适定的,且 $a(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ 是正定的。

以下考虑有限元解。如图 2 所示,将区间 $[0, 1]$ 划分为 N 个单元,结点坐标记为 $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, N)$ 。考虑任意一个单元 e , 记其两端结点坐标为 x_1 和 x_2 , 长度记为 h 。



(a) 有限元网格划分

(b) 单元

图 2 一维有限元模型

单元上的位移借助于形函数对端点位移 $w_i^h, \phi_i^h (i = 1, 2)$ 插值得到

$$\begin{Bmatrix} w^h \\ \phi^h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1^0 \\ N_1^1 \\ N_1^2 \end{Bmatrix} w_1^h + \begin{Bmatrix} N_1^0 \\ N_1^1 \\ N_1^2 \end{Bmatrix} \phi_1^h + \begin{Bmatrix} N_2^0 \\ N_2^1 \\ N_2^2 \end{Bmatrix} w_2^h + \begin{Bmatrix} N_2^0 \\ N_2^1 \\ N_2^2 \end{Bmatrix} \phi_2^h \quad (\text{在单元 } e \text{ 上}), \quad (5)$$

其中, $N_i^\alpha, N_i^\alpha (i = 1, 2; \alpha = 0, 1)$ 为插值形函数。为区别起见,任一试探解用 v^h, θ^h 表示,单元上的插值形式同上(分别将 w, ϕ 换为 v, θ 即可)。

记 H_E^1 为所有满足本质(位移)边界条件、一阶导数平方可积的向量函数 \mathbf{v} 所构成的函数空间。在满足本质边界条件和单元间 C^0 连续条件的前提下,将所有单元试函数集成,得到有

限元试探解空间 $S^h \subset H_E^1$ 。以下分别记 $u \in H_E^1$ 、 $u^h \in S^h$ 和 $v^h \in S^h$ 为精确解、有限元解和任一试探函数, 它们满足如下的投影定理^[4]。

投影定理 从能量内积的角度看, u^h 是 u 在 S^h 的投影, 换句话说, 误差 $e^h = u - u^h$ 与 S^h 正交:

$$a(e^h, v^h) = 0 \quad (\forall v^h \in S^h). \quad (6)$$

投影定理是本文进行超收敛计算的理论依据。

3 精确单元

一维有限元中有一类单元可以给出精确的结点位移, 本文将其称之为精确单元。譬如, 若 $Lu = -u'' = f$, 则线性单元便为精确单元。再有, 对 Timoshenko 梁单元, 若位移采用三次插值形函数, 转角采用二次插值形函数, 也是精确单元, 即可获得精确的结点位移。

精确单元的关键是采用了精确形函数。

定义 1(精确形函数) 若形函数满足:

$$L_i N_j^\alpha = 0, \quad L_i N_j^\alpha = 0 \quad (i, j = 1, 2; \alpha = 0, 1), \quad (7a)$$

$$\begin{cases} N_i^0(x_j) = \delta_{ij}, & N_i^1(x_j) = 0 \\ N_i^0(x_j) = 0, & N_i^1(x_j) = \delta_{ij} \end{cases} \quad (i, j = 1, 2), \quad (7b)$$

则称为精确形函数。采用精确形函数的单元在本文中称为精确单元。本节以下的讨论中形函数均为精确形函数, 为简便, 不做特殊标记。

Tong^[5]证明了采用精确单元可以自动得到精确的结点位移, 文[1]中给出了另一种证明, 本文直接利用这一性质。采用精确单元得到精确结点位移后, 如何进一步求得精确的端点内力呢? 有限元中常用的直接对位移求导的办法是不行的, 必须对其修正。为了导出精确的端点内力, 首先引入如下定理。

定理 1(单元投影定理) 对于精确单元及其得到的解答, 投影定理在任一单个单元上成立, 即

$$a^e(e^h, v^h) \equiv \int_{x_1}^{x_2} (De_\phi^h \theta^h + C(e_w^h - e_\phi^h)(v^h - \theta^h)) dx = 0 \quad (\forall v^h \in S_e^h), \quad (8)$$

其中 S_e^h 是采用精确形函数的单个单元位移试探函数 v^h 形成的空间, 而 $e_w^h = w - w^h$, $e_\phi^h = \phi - \phi^h$ 。

证 利用分部积分有

$$\begin{aligned} a^e(e^h, v^h) &= \int_{x_1}^{x_2} (L_1 v^h) e_w^h dx + \int_{x_1}^{x_2} (L_2 v^h) e_\phi^h dx + \\ &\quad D\theta^h e_\phi^h |_{x_1}^{x_2} + C(v^h - \theta^h) e_w^h |_{x_1}^{x_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

由于 $L_1 v^h = 0$, $L_2 v^h = 0$ 以及 $e_w^h(x_i) = e_\phi^h(x_i) = 0$, 因此对任意的 v_i^h , θ_i^h ($i = 1, 2$) 上式恒为零。■

注 注意 S_e^h 空间的函数并不要求满足本质边界条件, 因此也适用于带有本质边界条件的单元, 如图 2(a) 中网格的第一个单元。

下面给出精确的端点导数的计算公式。

定理 2(精确单元端点导数) 采用精确单元求出精确的结点位移后, 下式可给出精确的

单元端点导数

$$\begin{cases} C_i(w_i' - \phi_i) = C_i(w_i^h' - \phi_i^h) + (-1)^{i-1} \int_{x_1}^{x_2} (mN_i^0 + qN_i^0) dx \\ -D_i\phi_i' = -D_i\phi_i^h + (-1)^i \int_{x_1}^{x_2} (mN_i^1 + qN_i^1) dx \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

其中 $D_i = D(x_i)$, $C_i = C(x_i)$, $\phi_i' = \phi_i'(x_i)$, $w_i' = w_i'(x_i)$ ($i = 1, 2$)。

证 利用分部积分有

$$\begin{aligned} a^e(e^h, v^h) &= De_{\phi}^h \theta^h \Big|_{x_1}^{x_2} + C(e_w^h - e_{\phi}^h) v^h \Big|_{x_1}^{x_2} + \\ &\int_{x_1}^{x_2} (L_1 e^h) v^h dx + \int_{x_1}^{x_2} (L_2 e^h) \theta^h dx. \end{aligned} \quad (11)$$

由 $L_1 e^h = L_1 u - L_1 u^h = L_1 u = q$, $L_2 e^h = L_2 u - L_2 u^h = L_2 u = m$, 有

$$\begin{aligned} a^e(e^h, v^h) &= v_1^h \left[-C(e_w^h - e_{\phi}^h) \Big|_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} (mN_1^0 + qN_1^0) dx \right] + \\ &\theta_1^h \left[-De_{\phi}^h \Big|_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} (mN_1^1 + qN_1^1) dx \right] + \\ &v_2^h \left[C(e_w^h - e_{\phi}^h) \Big|_{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} (mN_2^0 + qN_2^0) dx \right] + \\ &\theta_2^h \left[De_{\phi}^h \Big|_{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} (mN_2^1 + qN_2^1) dx \right] \quad (\forall v_i^h, \theta_i^h \in \mathbf{R}). \end{aligned} \quad (12)$$

由单元投影定理和 v_i^h 和 θ_i^h 的任意性, 即得式(10)。 \blacksquare

注 式(10)适用于任一单元的两个端点, 包括给定本质边界条件的端结点。

本节的讨论表明, 不管单元网格如何划分, 精确单元总可以得到精确的结点位移和单元端点内力。本节讨论还表明, 有限元中的常规算法(如: 对位移求导得内力), 即使是精确单元, 也无法获得精确值, 所以不是最合理的方法。

4 近似单元

一般的有限元的形函数通常不具备式(7a)的性质, 本文称之为近似形函数, 相应的单元称为近似单元。近似单元虽然得不到精确的结点位移, 但结点位移的精度通常具有超收敛性质: 如对于一维 C^0 问题, 若解充分光滑则 m 次单元的结点位移通常是 h^{2m} 阶收敛的^[4]。

文[1]的研究表明, 对于近似单元, 虽然单元投影定理不能精确成立, 但可以假定: 投影定理对单个单元几乎成立。这一假定实际上意味着近似单元的 $a^e(e^h, N_i^a)$ 和 $a^e(e^h, N_i^a)$ 为高阶微量, 因此仍然可以利用单元投影定理导出超收敛的端点内力。为了检验 EEP 法对 Timoshenko 梁弯曲单元的适用性, 本文选择了两个有代表性的近似单元:

1) 采用二次样条函数为形函数的厚薄梁通用单元^[6] 这是一个无剪切闭锁的单元, 其单元形函数为:

$$\begin{cases} N_i^0 = N_i^0 + (-1)^i 16\lambda(N_1^1 + N_2^1)/h, \\ N_i^1 = N_i^1 - 8\lambda(N_1^1 + N_2^1), \end{cases} \quad (13a)$$

$$\begin{cases} N_i^0 = D_x N_i^0 + (-1)^i 16 \mathcal{M} D_x N_i^0, \\ N_i^1 = D_x N_i^1 - 8 \mathcal{M} D_x N_i^0, \end{cases} \quad (13b)$$

其中

$$\begin{cases} D_x = d(\)/dx, \quad \lambda = D/(Ch^2), \quad \nu = 1/(1+16\lambda) \cdot \\ N_1^0 = \begin{cases} 1 - 2x^2/h^2 & (x \in [0, h/2]), \\ 2(x-h)^2/h^2 & (x \in [h/2, h]) \cdot \end{cases} \\ N_1^1 = \begin{cases} x - 3x^2/2h & (x \in [0, h/2]), \\ (x-h)^2/2h & (x \in [h/2, h]) \cdot \end{cases} \\ N_2^0 = \begin{cases} 2x^2/h^2 & (x \in [0, h/2]), \\ 1 - 2(x-h)^2/h^2 & (x \in [h/2, h]) \cdot \end{cases} \\ N_2^1 = \begin{cases} -x^2/2h & (x \in [0, h/2]), \\ x-h + 3(x-h)^2/2h & (x \in [h/2, h]) \cdot \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

2) 采用线性插值为形函数的 Timoshenko 梁单元 这是一个有剪切闭锁的单元, 其形函数为

$$\begin{cases} N_1^0 = (h-x)/h, & \begin{cases} N_1^1 = (h-x)/h, \\ N_2^1 = x/h, \\ N_1^0 = N_2^0 = 0 \end{cases} \\ N_2^0 = x/h, & \\ N_1^1 = N_2^1 = 0, & \end{cases} \quad (15)$$

下文将显示, 尽管线性元的位移有剪切闭锁, 但用本文 EEP 法能有效地克服应力的“剪切闭锁”现象。

尽管本文主要考虑以上两种梁单元, 但以下推导的公式对其它 Timoshenko 梁单元也是适用的。以下将具体推导单元端点的超收敛应力计算公式。

由以上假定, 仍然设 $a^e(e^h, v^h) = 0$, 利用分部积分, 有

$$De_{\psi}^h \theta^h \Big|_{x_1}^{x_2} + C(e_w^h - e_{\psi}^h) v^h \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} L_1 e^h v^h dx + \int_{x_1}^{x_2} L_2 e^h \theta^h dx = 0 \quad (\forall v^h \in S_e^h) \cdot \quad (16)$$

由 $L_1 e^h = L_1 u - L_1 u^h = q - L_1 u^h$, $L_2 e^h = L_2 u - L_2 u^h = m - L_2 u^h$, 并利用形函数的性质 (7b), 有

$$\begin{aligned} & v_1^h \left[-C(e_w^h - e_{\psi}^h) \Big|_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} ((m - L_2 u^h) N_1^0 + (q - L_1 u^h) N_1^0) dx \right] + \\ & \theta_1^h \left[-De_{\psi}^h \Big|_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} ((m - L_2 u^h) N_1^1 + (q - L_1 u^h) N_1^0) dx \right] + \\ & v_2^h \left[C(e_w^h - e_{\psi}^h) \Big|_{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} ((m - L_2 u^h) N_1^0 + (q - L_1 u^h) N_1^0) dx \right] + \\ & \theta_2^h \left[De_{\psi}^h \Big|_{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} ((m - L_2 u^h) N_1^0 + (q - L_1 u^h) N_1^0) dx \right] = 0 \quad (\forall v_i^h, \theta_i^h \in \mathbf{R}) \cdot \end{aligned} \quad (17)$$

由 v_i^h 和 θ_i^h 的任意性, 有近似单元两端点的导数计算公式为

$$C_i(w_i^{*'} - \phi_i^*) = C_i(w_i^h - \phi_i^h) +$$

$$\begin{aligned}
& (-1)^{i-1} \int_{x_1}^{x_2} ((m - L_2 \mathbf{u}^h) N_{1+}^0 + (q - L_1 \mathbf{u}^h) N_{1-}^0) dx - D_i \phi_i^{*'} = \\
& - D_i \phi_i^h + (-1)^i \int_{x_1}^{x_2} ((m - L_2 \mathbf{u}^h) N_{1+}^1 + (q - L_1 \mathbf{u}^h) N_{1-}^1) dx, \quad (18)
\end{aligned}$$

这里,为区别精确值 w_i 、 ϕ_i ,用了 w_i^* 、 ϕ_i^* 表示超收敛值;当单元为精确单元时, $L_1 \mathbf{u}^h = 0$, $L_2 \mathbf{u}^h = 0$, 则与精确单元的计算公式(10)统一。

本文后面给出的以及其他大量数值算例表明,用上式计算的端点导数的误差确实与结点位移的误差同阶。此外,这一方法还有如下几个优良性质。

定理 3(结点平衡) 对于近似单元及其得到的解答,用式(18)计算的结点两边的内力是平衡的,即若无结点荷载且截面刚度无突变,两边的导数是连续的。

证 记 V_j 、 Θ_j 为试探函数 v^h 在整体结点 $j = 0, 1, \dots, N$ 处相应于 v_i^h 和 θ_i^h 的值。对整个结构应用投影定理,并由 V_j 、 Θ_j 的任意性,在内结点 x_j 处有

$$\begin{aligned}
& \left[C(e_w^h - e_\phi^h) - \int_{x_{j-1}}^{x_j} ((m - L_2 \mathbf{u}^h) N_{2+}^0 + (q - L_1 \mathbf{u}^h) N_{2-}^0) dx \right] \Big|_{x_{j-0}} = \\
& \left[C(e_w^h - e_\phi^h) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} ((m - L_2 \mathbf{u}^h) N_{1+}^0 + (q - L_1 \mathbf{u}^h) N_{1-}^0) dx \right] \Big|_{x_{j+0}} \\
& \left[- D e_\phi^h - \int_{x_{j-1}}^{x_j} ((m - L_2 \mathbf{u}^h) N_{1+}^1 + (q - L_1 \mathbf{u}^h) N_{1-}^1) dx \right] \Big|_{x_{j-0}} = \\
& \left[- D e_\phi^h + \int_{x_j}^{x_{j+1}} ((m - L_2 \mathbf{u}^h) N_{2+}^1 + (q - L_1 \mathbf{u}^h) N_{2-}^1) dx \right] \Big|_{x_{j+0}} \\
& (j = 1, 2, \dots, N-1), \quad (19)
\end{aligned}$$

其中 x_{j-0} 和 x_{j+0} 分别为结点左边单元和右边单元的结果。展开以上二式

$$\left[C(w' - \phi) - C(w^{*'} - \phi^*) \right] \Big|_{x_{j-0}} = \left[C(w' - \phi) - C(w^{*'} - \phi^*) \right] \Big|_{x_{j+0}}, \quad (20a)$$

$$\left[- D \phi' + D \phi^* \right] \Big|_{x_{j-0}} = \left[- D \phi' + D \phi^* \right] \Big|_{x_{j+0}} \quad (j = 1, 2, \dots, N-1), \quad (20b)$$

两边减去精确值 $C(w' - \phi)$ 和 $- D \phi'$, 得到

$$C(w^{*'} - \phi^*) \Big|_{x_{j-0}} = C(w^{*'} - \phi^*) \Big|_{x_{j+0}} - D \phi^{*'} \Big|_{x_{j-0}} = - D \phi^{*'} \Big|_{x_{j+0}}. \quad (21)$$

定理得证。■

注 若在结点 x_j 处截面刚度 D 、 C 有突变,或作用有集中荷载,则导数不再连续,但计算出的内力仍然是平衡的,具体证明与上面类似,不一一给出。

定理 4(自由端点精确) 对于近似单元及其得到的解答,用式(18)计算的自由端点的内力得精确的零值。

证 同定理 3,对整个结构应用投影定理,在自由端点处(设为 x_N 处)有

$$\left[C(e_w^h - e_\phi^h) - \int_{x_{N-1}}^{x_N} ((m - L_2 \mathbf{u}^h) N_{2+}^0 + (q - L_1 \mathbf{u}^h) N_{2-}^0) dx \right] \Big|_{x_{N-0}} = 0, \quad (22a)$$

$$\left[- D e_\phi^h - \int_{x_{N-1}}^{x_N} ((m - L_2 \mathbf{u}^h) N_{1+}^1 + (q - L_1 \mathbf{u}^h) N_{1-}^1) dx \right] \Big|_{x_{N-0}} = 0. \quad (22b)$$

展开后有 $C(w^{*'} - \phi^*) \Big|_{x_{N-0}} = C(w' - \phi) \Big|_{x_{N-0}} = 0$ 和 $- D \phi^{*'} \Big|_{x_{N-0}} = - D \phi' \Big|_{x_{N-0}}$ 。 ■

注 从证明中易见,若端点作用有集中荷载或集中力矩,式(18)计算的值也将是精确的。

定理 3 保证了内力在结点处自动平衡(导数自动连续),因此只从一边单元计算即可,无须人为磨光。定理 4 保证了自由端点内力取精确值,亦即可以精确满足自然边界条件,这是一般有限元应力计算方法难以实现的。

利用弯矩和剪力的定义,式(18)又可以表示为

$$\begin{cases} Q_i^* = Q_i^h + (-1)^{i-1} \int_{x_1}^{x_2} ((m - L_2 \mathbf{u}^h) N_1^0 + (q - L_1 \mathbf{u}^h) N_1^0) dx, \\ M_i^* = M_i^h + (-1)^i \int_{x_1}^{x_2} ((m - L_2 \mathbf{u}^h) N_1^1 + (q - L_1 \mathbf{u}^h) N_1^1) dx. \end{cases} \quad (23)$$

利用分部积分,上式中的积分项还可以用单元刚度系数表示出来,即可写成式(1)的矩阵形式。对此,这里不再赘述。

5 数值算例

本节中将给出具体的数值算例,用以验证本文所述方法的有效性。由于精确单元总能给出精确解,因此不再给出数值算例。对于各种近似单元,大量的数值计算表明,本文的 EEP 法都可给出与结点位移同阶的结点内力(弯矩、剪力),而本节仅给出上一节所述的两个代表性的近似单元(二次样条单元和线性单元)的数值算例结果。

为明确起见,在以下算例中, η 为相对误差, h 为单元长度;“*”表示本文提出的 EEP 修正算法的结果,未带“*”者表示常规有限元的结果,下标“-”和“+”分别表明结点左右两边的计算值。因为各结点性态相似,所以本节算例只给出跨中结点的计算结果。

一般情况下,误差可表示为 $|\eta| = Ch^r$ 。以下也将收敛阶 r 称为收敛速率,该值越大收敛速度越快。

例 1 一端固定、一端简支的中厚梁

表 1(a) 二次样条单元跨中结点 ($x = 1/2$) 的结果

单元数 N_e	w^h	$\eta / (\%)$	ϕ^h	$\eta / (\%)$	FEM*			
					Q^*	$\eta / (\%)$	M^*	$\eta / (\%)$
2	0.135 409	0.484	0.029 902	0.153	0.031 372	0.392	0.109 314	-0.056
4	0.135 903	0.121	0.029 936	0.038	0.031 280	0.098	0.109 360	-0.014
8	0.136 027	0.030	0.029 945	0.010	0.031 257	0.024	0.109 371	-0.003
16	0.136 057	0.008	0.029 947	0.002	0.031 251	0.006	0.109 374	-0.001
精确解	0.136 068		0.029 948		0.031 250		0.109 375	
收敛速率		2.00		2.00		2.00		2.00

具体数据为 $D = 1, C = 1$, 均布荷载 $m = 0, q = 1$, 采用均匀单元网格划分。分别采用二次样条单元和线性单元计算。表 1 为跨中结点 $x = 1/2$ 处二次样条单元的计算结果。常规有限元方法计算所得的结点弯矩呈现为超线性收敛,剪力则呈现较为规则的一阶收敛,误差都比具有二阶收敛的结点位移大,而且从两边的单元算得的弯矩和剪力是不平衡的。采用超收敛计算之后,弯矩和剪力与挠度和转角一样,都是二阶收敛,误差数量级也和结点位移相当,且结点两侧内力平衡。

表 1(b) 二次样条单元跨中结点 ($x = 1/2$) 的结果

单元数 N_e	FEM							
	Q_-^h	$\eta/(%)$	Q_+^h	$\eta/(%)$	M_-^h	$\eta/(%)$	M_+^h	$\eta/(%)$
2	0.281 373	800.4	- 0.218 627	799.6	0.094 975	13.16	0.102 819	5.99
4	0.156 281	400.1	- 0.093 719	399.9	0.104 801	4.18	0.108 711	0.61
8	0.093 758	200.0	- 0.031 242	200.0	0.107 743	1.49	0.109 697	0.29
16	0.062 502	100.0	0.000 002	100.0	0.108 723	0.60	0.109 700	0.30
精确解	0.031 250		0.031 250		0.109 375		0.109 375	
收敛速率		1.00		1.00		1.49		1.45

表 2 为跨中结点线性单元计算结果, 可以看出, 常规 FEM 计算所得的位移和转角为二阶收敛, 弯矩收敛速率不很规则, 剪力约一阶收敛, 误差都很大。采用超收敛计算之后, 弯矩和剪力同时按二阶收敛, 且弯矩的误差数量级和位移相当, 剪力的误差数量级和转角相当, 结点两侧弯矩和剪力仍保持平衡。

表 2(a) 线性单元跨中结点 ($x = 1/2$) 的结果

单元数 N_e	w^h	$\eta/(%)$	ψ^h	$\eta/(%)$	FEM*			
					Q^*	$\eta/(%)$	M^*	$\eta/(%)$
2	0.131 22	- 3.56	- 0.022 00	26.53	0.023 44	- 25.00	0.113 28	3.57
4	0.134 84	- 0.90	- 0.027 93	6.74	0.029 30	- 6.25	0.110 35	0.89
8	0.135 76	- 0.23	- 0.029 44	1.69	0.030 76	- 1.56	0.109 62	0.22
16	0.135 99	- 0.06	- 0.029 82	0.42	0.031 13	- 0.39	0.109 44	0.06
精确解	0.136 07		- 0.029 95		0.031 25		0.109 38	
收敛速率		1.99		1.99		2.00		2.00

表 2(b) 线性单元跨中结点 ($x = 1/2$) 的结果

单元数 N_e	FEM							
	Q_-^h	$\eta/(%)$	Q_+^h	$\eta/(%)$	M_-^h	$\eta/(%)$	M_+^h	$\eta/(%)$
2	0.284 44	810.2	- 0.240 43	- 869.4	0.044 01	- 59.8	0.055 48	- 49.3
4	0.165 62	430.0	- 0.107 94	- 445.4	0.090 59	- 17.2	0.097 88	- 10.5
8	0.099 74	219.2	- 0.038 46	- 223.1	0.103 66	- 5.2	0.107 50	1.7
16	0.065 74	110.4	- 0.003 54	- 111.3	0.107 45	- 1.8	0.109 40	0.02
精确解	0.031 25		0.031 25		0.109 38		0.109 38	
收敛速率		0.96		0.99		1.70		-

例 2 一端固定、一端简支的薄梁。

具体数据取为 $D = 1, C = 10^{10}$, 均布荷载 $m = 0, q = 1$, 仍然采用均匀网格。由于剪切刚度很大, 因此对于本例, Timoshenko 梁理论的解答同薄梁理论解极为接近。对于本例, 线性单元求得的位移出现了严重的剪切闭锁现象。

表 3 为二次样条单元计算结果, 其收敛规律与例 1 中二次样条单元的结果相似。

表 3(a) 二次样条单元跨中结点 ($x = 1/2$) 的结果

单元数 N_e	w^h	$\eta / (\%)$	ϕ^h	$\eta / (\%)$	FEM*			
					Q^*	$\eta / (\%)$	M^*	$\eta / (\%)$
2	0.004 433	14.88	0.005 952	14.29	0.126 984	1.59	0.061 508	1.59
4	0.005 015	3.71	0.005 015	3.71	0.125 490	0.39	0.062 255	0.39
8	0.005 160	0.93	0.005 254	0.88	0.125 122	0.10	0.062 439	0.10
16	0.005 196	0.23	0.005 220	0.22	0.125 031	0.02	0.062 485	0.02
精确解	0.005 208		0.005 208		0.125 000		0.062 500	
收敛速率		2.00		2.01		2.01		2.01

表 3(b) 二次样条单元跨中结点 ($x = 1/2$) 的结果

单元数 N_e	FEM							
	Q_-^h	$\eta / (\%)$	Q_+^h	$\eta / (\%)$	M_-^h	$\eta / (\%)$	M_+^h	$\eta / (\%)$
2	0.376 98	210.5	- 0.123 016	198.4	0.035 218	43.65	0.066 964	7.14
4	0.250 49	100.3	0.000 490	99.6	0.051 808	17.11	0.067 494	7.99
8	0.187 62	50.1	0.062 622	49.9	0.057 878	7.40	0.065 698	5.12
16	0.156 28	25.0	0.093 781	25.0	0.060 368	3.41	0.064 276	2.84
精确解	0.125 00		0.125 000		0.062 500		0.062 500	
收敛速率		1.00		1.00		1.23		1.44

表 4(a) 线性单元跨中结点 ($x = 1/2$) 的结果

单元数 N_e	w^h	$\eta / (\%)$	ϕ^h	$\eta / (\%)$	FEM*			
					Q^*	$\eta / (\%)$	M^*	$\eta / (\%)$
2	2.19E- 11	- 100.0	1.88E- 11	- 100.0	0.093 75	- 25.00	0.078 13	25.00
4	9.69E- 11	- 100.0	9.34E- 10	- 100.0	0.117 19	- 6.25	0.066 41	6.25
8	3.97E- 10	- 100.0	3.94E- 10	- 100.0	0.123 05	- 1.56	0.063 48	1.56
16	1.60E- 09	- 100.0	1.59E- 09	- 100.0	0.124 51	- 0.39	0.062 74	0.39
精确解	5.21E- 03		5.21E- 03		0.125 00		0.062 50	
收敛速率		不收敛		不收敛		2.00		2.00

表 4(b) 线性单元跨中结点 ($x = 1/2$) 的结果

单元数 N_e	FEM							
	Q_-^h	$\eta / (\%)$	Q_+^h	$\eta / (\%)$	M_-^h	$\eta / (\%)$	M_+^h	$\eta / (\%)$
2	0.250 00	100.0	- 0.625 00	- 600.00	- 3.75E- 11	- 100.0	1.88E- 10	- 100.0
4	1.109 37	787.5	- 1.578 12	- 1 362.50	6.94E- 10	- 100.0	1.26E- 09	- 100.0
8	2.675 78	2 040.6	- 3.167 97	- 2 634.37	3.98E- 09	- 100.0	5.17E- 09	- 100.0
16	5.711 91	4 469.5	- 6.209 96	- 5 067.97	1.78E- 08	- 100.0	2.02E- 08	- 100.0
精确解	0.125 00		0.125 00		0.062 50		0.062 50	
收敛速率		不收敛		不收敛		不收敛		不收敛

表 4 为线性单元的计算结果,可以看出,常规 FEM 方法出现了严重的“剪切闭锁”现象,位移、转角、弯矩和剪力都严重失真,不再收敛。采用超收敛计算之后的弯矩和剪力仍然按二阶

收敛, 误差数量级都和例 1 中线性单元的转角相当, 结点两侧弯矩和剪力仍保持平衡。

表 5 所示仍然是线性单元的结果, 只是采用了缩减积分来克服剪切闭锁。从表中可以看出, 挠度、转角克服了闭锁现象, 在结点处约二阶收敛, 弯矩在结点两侧不平衡, 收敛较慢, 剪力仍然严重失真, 不收敛。而采用超收敛计算之后的弯矩和剪力仍然同时按二阶收敛, 误差数量级都和转角相当。由本例可见, EEP 法在克服剪切闭锁方面表现出色。

表 5(a) 用缩减积分的线性单元跨中结点 ($x = 1/2$) 的结果

单元数 N_e	w^h	$\eta/(\%)$	ϕ^h	$\eta/(\%)$	FEM*			
					Q^*	$\eta/(\%)$	M^*	$\eta/(\%)$
2	0.00156	-70.00	0.00625	20.00	0.10000	-20.00	0.07500	20.00
4	0.00428	-17.86	0.00558	7.14	0.11905	-4.76	0.06548	4.76
8	0.00497	-4.49	0.00531	1.91	0.12353	-1.18	0.06324	1.18
16	0.00515	-1.12	0.00523	0.49	0.12463	-0.29	0.06268	0.29
精确解	0.00521		0.00521		0.12500		0.06250	
收敛速率		1.99		1.92		2.03		2.03

表 5(b) 用缩减积分的线性单元跨中结点 ($x = 1/2$) 的结果

单元数 N_e	FEM							
	Q_-^h	$\eta/(\%)$	Q_+^h	$\eta/(\%)$	M_-^h	$\eta/(\%)$	M_+^h	$\eta/(\%)$
2	-31249999.6	-	-93750000.2	-	-0.01250	-120.0	0.03750	-40.0
4	43712797.7	-	-80915178.6	-	0.03497	-44.1	0.06473	3.57
8	32255285.1	-	-41906020.2	-	0.05161	-17.4	0.06705	7.28
16	18066227.4	-	-20500473.9	-	0.05781	-7.5	0.06560	4.96
精确解	0.12500		0.12500		0.06250		0.06250	
收敛速率		-		-		1.33		-

6 结 语

本文成功地将 EEP 法应用于解答是向量函数的 Timoshenko 梁单元的超收敛结点应力的计算, 在继承了 EEP 法诸如简单、方便、高效等优点之外, 本文结果还显示了以下几个特点:

1) 在无剪切闭锁情况下, 超收敛计算之后的弯矩和剪力误差大幅度地降低, 与结点位移误差同阶, 且量级也大致相当。

2) 在常规有限元剪切闭锁的情况下, 位移和转角都严重失真, 而超收敛计算之后的弯矩和剪力都没有任何剪切闭锁现象, 仍然保持良好的收敛性态。

3) 本文研究表明, EEP 法对于解答是向量函数的问题同样适用, 且表现出色, 这为 EEP 法在更为一般的一维常微分方程组问题的有限元分析中的超收敛计算奠定了良好的基础^[7]。

[参 考 文 献]

- [1] 袁骝, 王枚. 一维有限元后处理超收敛解答计算的 EEP 法[J]. 工程力学, 2004, 21(2): 1—9.
- [2] 袁骝. 从矩阵位移法看有限元应力精度的损失与恢复[J]. 力学与实践, 1998, 20(4): 1—6.
- [3] YUAN Si. From matrix displacement method to FEM: Loss and recovery of stress accuracy[A]. invit-

- ed papers. In LONG Yu_qiu Ed. Proceedings of 1st International Conference on Structural Engineering[C]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999, 134—141.
- [4] Strang G, Fix G. An Analysis of the Finite Element Method [M]. Englewood, Cliffs, N J: Prentice_Hall, 1973.
- [5] Tong P. Exact solution of certain problems by finite_element method[J]. AIAA, 1969, 7: 178—180.
- [6] 袁昶. 样条厚薄板通用矩形单元[J]. 力学学报, 1984, 16(4): 401—407.
- [7] 袁昶, 王枚. 有限元(线)法超收敛应力计算的新方案及其若干数值结果[A]. 见: 袁明武, 孙树立主编. 中国计算力学大会论文集[C]. 北京: 科学出版社, 2001, 43—52.

Computation of Super_Convergent Nodal Stresses of Timoshenko Beam Elements by EEP Method

WANG Mei, YUAN Si

(Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: The newly proposed element energy projection(EEP) method has been applied to the computation of super_convergent nodal stresses of Timoshenko beam elements. General formulas based on element projection theorem were derived and illustrative numerical examples using two typical elements were given. Both the analysis and examples show that EEP method also works very well for the problems with vector function solutions. The EEP method gives super_convergent nodal stresses, which are well comparable to the nodal displacements in terms of both convergence rate and error magnitude. And in addition, it can overcome the “shear locking” difficulty for stresses even when the displacements are badly affected. This research paves the way for application of the EEP method to general one_dimensional systems of ordinary differential equations.

Key words: Timoshenko beam element; super_convergent stress; element energy projection method; shear locking