应用数学和力学，第5卷第6期（1984年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

(Ⅱ)型三角剖分下带边界条件的二元二次样条插值*

李 稚 娴

（中山大学力学系，1983年11月23日收到）

摘 要

本文研究（Ⅱ）型三角剖分下带边界条件的二元二次样条插值问题的存在唯一性与插值节点分布的关系．并且在证明了中心插值、角点插值和偏心插值问题解的存在唯一性的基础上，给出了这三种插值函数的构造方法．

一、引　　言

给定矩形区域G，分别以L，T表示G的长和宽．对G如图1所示建立直角坐标系，并做（Ⅱ）型三角剖分$\triangle_{mn}^{(2)}$，其中$x_i=ih$，$y_j=j\tau$，$h=L/m$，$\tau=T/n$．

记

$$S_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})=\{S(x,y)\text{：在}\triangle_{mn}^{(2)}\text{剖分下每个小三角形域上，}S(x,y)\text{是二次完全多项式，}S(x,y)\in C^1(G)\}\tag{1.1}$$

那么

$$\dim S_2^1(\triangle_{mn}^{(2)})=(m+2)(n+2)-1\tag{1.2}$$

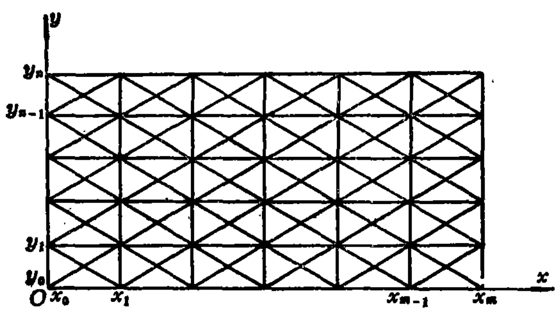

图 1

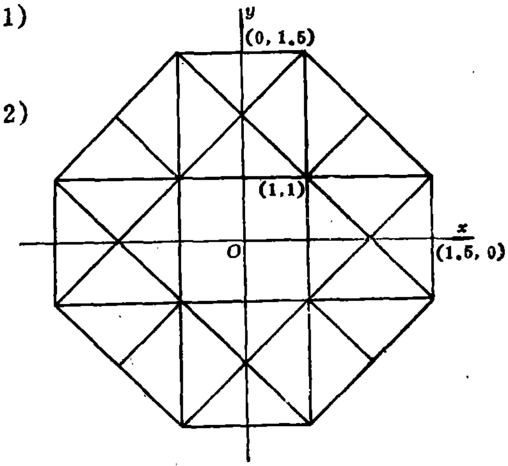

图 2

* 李灏推荐．

记

$$S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})=\left\{S(x,y)\in S_2^1(\triangle_{mn}^{(2)}),\quad \frac{\partial S(x,y)}{\partial x}\bigg|_{\partial G}=\frac{\partial S(x,y)}{\partial y}\bigg|_{\partial G}=S(x,y)\bigg|_{\partial G}=0\right\} \tag{1.3}$$

$$\dim S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})=(m-2)(n-2) \quad (\text{参见[2]}) \tag{1.4}$$

$$S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})=\operatorname{span}\{B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)\}_{i=1,j=1}^{m-2,n-2} \tag{1.5}$$

其中

$$B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)=B\left(\frac{x}{h}-\left(i+\frac{1}{2}\right),\ \frac{y}{\tau}-\left(j+\frac{1}{2}\right)\right) \tag{1.6}$$

$B(x,y)$是具有支集如图2的分片二次多项式，其分片表达式在[1]中已给出．

本文研究 $S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$中的插值问题的提法，插值问题的存在唯一性及插值函数的构造．

二、任意节点插值问题解存在唯一的必要性和充分性

我们先来考虑下面的问题，给定一点组$(x_i,y_j)\in G$ $(i=1,2,\cdots,m-2;j=1,2,\cdots,n-2)$，如果关于$\{(x_i,y_j)\}$的插值问题：

寻求$S(x,y)\in S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$使得

$$S(x_i,y_j)=f(x_i,y_j) \qquad (i=1,2,\cdots,m-2;\ j=1,2,\cdots,n-2) \tag{2.1}$$

的解存在且唯一，点组$\{(x_i,y_j)\}$应该如何分布．

定理1 对于一点组 $\{(x_i,y_j)\}_{i=1,j=1}^{m-2,n-2}$插值问题(2.1)的解存在唯一，那么

$$(x_i,y_j)\in G_{ij} \qquad (i=1,2,\cdots,m-2;\ j=1,2,\cdots,n-2)$$

其中 G_{ij} 为 $B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)$的支集．

证明 用反证法．设有(i_0,j_0)使得$\forall(x_i,y_j)\overline{\in}G_{i_0,j_0}$ 那么

$$B_{i_0+\frac{1}{2},j_0+\frac{1}{2}}(x_p,y_q)=0 \qquad (p=1,2,\cdots,m-2;\ q=1,2,\cdots,n-2)$$

也就是说，确定线性组合：

$$S(x,y)=\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{m-2}C_{ij}B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)$$

的系数C_{ij}的线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{m-2}C_{ij}B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x_p,y_q)=f(x_p,y_q) \qquad (p=1,2,\cdots,m-2;\ q=1,2,\cdots,n-2) \tag{*}$$

的系数矩阵第$(j_0-1)(m-2)+i_0$列的元素全为零．因此线性方程组的解不唯一存在，这与假设矛盾．

定理2 任取 $X_{ij}=(x_i,y_j)\in G_{ij}-G_{ij}\cap(G_{i-1,j}\cup G_{i,j-1}\cup G_{i+1,j-1})$．则插值问题(2.1)关于 $\{(x_i,y_j)\}_{i=1,j=1}^{m-2,n-2}$ 的解存在且唯一，其中G_{ij}为 $B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)$的支集．

证明 设 $S(x,y)=\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{m-2}C_{ij}B_{i+\frac{1}{2},\ j+\frac{1}{2}}\quad(x,y)$

由插值条件(2.1)可得关于C_{ij}的线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & B_2 & C_3 & & & 0 \\ & A_2 & B_3 & C_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & C_{n-2} \\ & & & \ddots & \ddots & B_{n-2} \\ & 0 & & & & A_{n-2} \end{bmatrix}$$

其中

$$A_j=\begin{bmatrix} B_{1,j}(X_{1j}) & B_{2,j}(X_{1j}) & B_{3,j}(X_{1j}) & & & 0 \\ & B_{2,j}(X_{2j}) & B_{3,j}(X_{2j}) & B_{4,j}(X_{2j}) & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & B_{m-2,j}(X_{(m-4)j}) \\ & & & \ddots & \ddots & B_{m-2,j}(X_{(m-3)j}) \\ & 0 & & & & B_{m-2,j}(X_{(m-2)j}) \end{bmatrix}$$

$(j=1,2,\cdots,n-2)$

A是上三角矩阵，且对角线上的元素为

$$B_{11}(X_{1,1}),\cdots,B_{m-2,1}(X_{m-2,1});\cdots;B_{1,n-2}(X_{1,n-2}),\cdots,B_{m-2,n-2}(X_{m-2,n-2})$$

由假定知对角线上的全部元素均大于零，$B_{ij}(X_{ij})>0$ $(i=1,\cdots,m-2;\ j=1,\cdots,n-2)$ 因此 $\det A>0$. 即关于 $\{X_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m-2,n-2}$ 的插值问题(2.1)的解存在且唯一。证毕。

定理1和定理2的结果可以推广到由B样条张成的样条函数空间的插值问题上。

三、三种插值问题解的存在唯一性

设$f(x,y)$满足边界条件

$$f(x,y)\Big|_{\partial G}=0,\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{\partial G}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Big|_{\partial G}=0 \tag{3.1}$$

我们提出如下三种插值问题：

(Ⅰ) 中心插值

寻找 $S(x,y)\in S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$，使得

$$S(x_{i+\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}})=f(x_{i+\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}})\qquad(i=1,2,\cdots,m-2;\ j=1,2,\cdots,n-2) \tag{3.2}$$

(Ⅱ) 角点插值

寻找 $S(x,y)\in S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$使得

$$S(x_{i+1},y_{j+1})=f(x_{i+1},y_{j+1}) \qquad (i=1,2,\cdots,m-2;j=1,2,\cdots,n-2) \tag{3.3}$$

(Ⅲ) 偏心插值

寻找 $S(x,y)\in S_2^{1,1}(\triangle_{mn}^{(2)})$，使得

$$S(x_{i+\frac{3}{2}},y_{j+\frac{1}{2}})=f(x_{i+\frac{3}{2}},y_{j+\frac{1}{2}}) \qquad (i=1,2,\cdots,m-2;\ j=1,2,\cdots,n-2) \tag{3.4}$$

定理3 中心插值问题(Ⅰ)、角点插值问题(Ⅱ)和偏心插值问题(Ⅲ)的解均存在唯一。

证明 令 $S(x,y)=\sum_{j=1}^{m-2}\sum_{i=1}^{n-2}C_{ij}B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)$ (∗)

由于插值空间的维数等于插值条件的个数，所以仅需证明齐问题仅有零解，也就是仅需证明由插值条件和式(∗)导得的方程组的系数矩阵的非奇异性。以下称这种矩阵为插值矩阵。

插值问题(Ⅰ)的插值矩阵为

$$A_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & & & & \\ A_2 & A_1 & A_2 & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \\ & 0 & & A_2 & A_1 & A_2 \\ & & & & A_2 & A_1 \end{bmatrix}$$

其中

$$A_1=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & & & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ & 0 & & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{(m-2)\times(m-2)}, \qquad A_2=\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{8} \end{bmatrix}_{(m-2)\times(m-2)}$$

插值问题(Ⅱ)的插值矩阵为

$$A_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} D_1 & D_1 & & & \\ & D_1 & D_1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & D_1 & D_1 \\ & & & & D_1 \end{bmatrix}$$

其中

$$D_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & 0\\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

插值问题(Ⅲ)的插值矩阵为

$$A_{Ⅲ}=\begin{bmatrix}B_1 & B_2 & & & & \\ B_2 & B_1 & B_2 & & & 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & B_2 & B_1 & B_2\\ & & & & B_2 & B_1\end{bmatrix}$$

其中

$$B_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & & 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8}\\ & & & \frac{1}{8} & \frac{1}{2}\\ 0 & & & & \frac{1}{8}\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{8} & & & 0\\ & 0 & \frac{1}{8} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & \frac{1}{8}\\ & & & & 0\end{bmatrix}$$

矩阵$A_Ⅰ$严格对角占优，$A_Ⅱ$是上三角阵且对角元均为1/4，故$A_Ⅰ$，$A_Ⅱ$非异．由归纳法和拉普拉斯定理，可以证明$A_Ⅲ$也为非异．证毕．

四、插值函数的构造

我们来构造中心插值、角点插值和偏心插值的Lagrange基函数．

定义　如果$S|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)\in\mathrm{span}\{B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)\}_{i=-1,j=-1}^{m-2,n-2}$且满足

$$S|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x_{\mu+\frac{1}{2}},y_{\nu+\frac{1}{2}})=\delta_{i,\mu;j,\nu}=\begin{cases}1 & i=\mu\text{且}j=\nu\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\tag{4.1}$$

则我们称 $\{S^{\mathrm{I}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)\}_{i=1,j=1}^{m-2;n-2}$为中心插值的Lagrange基函数。

同样，如果 $S^{\mathrm{II}}_{i+1,j+1}(x,y)\in\mathrm{span}\{B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)\}_{i=1,j=1}^{m-2;n-2}$且满足

$$S^{\mathrm{II}}_{i+1,j+1}(x_{\mu+1},y_{\nu+1})=\delta_{i,\mu;j,\nu} \tag{4.2}$$

则称 $\{S^{\mathrm{II}}_{i+1,j+1}(x,y)\}_{i=1,j=1}^{m-2;n-2}$ 为角点插值的 Lagrange 基函数。 如果$S^{\mathrm{III}}_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)\in$ $\mathrm{span}\{B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)\}_{i=1,j=1}^{m-2;n-2}$且满足

$$S^{\mathrm{III}}_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}(x_{\mu+\frac{3}{2}},y_{\nu+\frac{1}{2}})=\delta_{i,\mu;j,\nu} \tag{4.3}$$

则称 $\{S^{\mathrm{III}}_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)\}_{i=1,j=1}^{m-2;n-2}$为偏心插值的Lagrange基函数。

记

$$\begin{aligned}[B]=(&B_{1+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}}(x,y),\cdots,B_{m-2+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}}(x,y);\cdots;\\ &B_{1+\frac{1}{2},n-2+\frac{1}{2}}(x,y),\cdots,B_{m-2+\frac{1}{2},n-2+\frac{1}{2}}(x,y))^T\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$E_{ij}=(\underbrace{0,\cdots,0}_{(j-1)(m-2)\text{个}};\underbrace{0,\cdots,0}_{(i-1)\text{个}},1,\underbrace{0,\cdots,0}_{(m-2-i)\text{个}};\underbrace{0,\cdots,0}_{(n-2-j)(m-2)\text{个}})^T \tag{4.5}$$

定理4 中心插值问题(Ⅰ)的解可表成

$$S(x,y)=\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{m-2}f(x_{i+\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}})\,S^{\mathrm{I}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y) \tag{4.6}$$

其中

$$S^{\mathrm{I}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)=E^T_{ij}(A_{\mathrm{I}}^{-1})^T[B] \tag{4.7}$$

证明 由于

$$S^{\mathrm{I}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)=E^T_{ij}(A_{\mathrm{I}}^{-1})^T[B]\in\mathrm{span}\{B_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)\}_{i=1,j=1}^{m-2;n-2}$$

并满足(4.1)。所以，$S(x,y)$满足插值条件(3.2)。由定理3知 $S(x,y)$ 就是中心插值问题(Ⅰ)的解。

类似定理4的证明，我们有

定理5 角点插值问题(Ⅱ)的解可表成

$$S(x,y)=\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{m-2}f(x_{i+1},y_{j+1})\,S^{\mathrm{II}}_{i+1,j+1}(x,y) \tag{4.8}$$

其中

$$S^{\mathrm{II}}_{i+1,j+1}(x,y)=E^T_{ij}(A_{\mathrm{II}}^{-1})^T[B] \tag{4.9}$$

定理6 偏心插值问题(Ⅲ)的解可表成

$$S(x,y)=\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{m-2}f(x_{i+\frac{3}{2}},y_{j+\frac{1}{2}})\,S^{\mathrm{III}}_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y) \tag{4.10}$$

其中

$$S^{\mathrm{III}}_{i+\frac{3}{2},j+\frac{1}{2}}(x,y)=E^T_{ij}(A_{\mathrm{III}}^{-1})^T[B] \tag{4.11}$$

现在，我们把定理5中的(4.8)表为更具体的形式，有

定理7 角点插值问题(Ⅱ)的解可表为

$$S(x,y)=\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{m-2}f(x_{i+1},\ y_{j+1})\sum_{q=1}^{j}\sum_{p=1}^{i}(-1)^{i+j+p+q-4}\cdot 4\cdot B_{p+\frac{1}{2},\ q+\frac{1}{2}}(x,y) \tag{4.12}$$

证明 仅需证明

$$S^{\mathrm{I}}_{i+1,j+1}(x,y)=\sum_{q=1}^{j}\sum_{p=1}^{i}(-1)^{i+j+p+q-4}\cdot 4\cdot B_{p+\frac{1}{2},\ q+\frac{1}{2}}(x,y)$$

由于

$$(A_{\mathrm{I}}^{-1})^{T}=\begin{bmatrix} (D_1^{-1})^T & & & \\ -(D_1^{-1})^T & (D_1^{-1})^T & & 0 \\ (D_1^{-1})^T & -(D_1^{-1})^T & (D_1^{-1})^T & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ (-1)^{m-3}(D_1^{-1})^T & (-1)^{m-4}(D_1^{-1})^T & \cdots\cdots & (D_1^{-1})^T \end{bmatrix}$$

其中

$$(D_1^{-1})^T=\begin{bmatrix} 4 & & & \\ -4 & 4 & & 0 \\ 4 & -4 & 4 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ (-1)^{m-3}\cdot 4 & (-1)^{m-4}\cdot 4 & (-1)^{m-5}\cdot 4\cdots & 4 \end{bmatrix}$$

$$E^T_{ij}(A_{\mathrm{I}}^{-1})^T=((-1)^{i+j-2}\cdot 4,(-1)^{i+j-1}\cdot 4,\cdots,(-1)^{2i+j-3}\cdot 4,\underbrace{0,\cdots,0}_{(m-2-i)};$$
$$\cdots,(-1)^{i-1}\cdot 4,\cdots,(-1)^{2i-2}\cdot 4,\underbrace{0,\cdots,0}_{(m-2-i)};\underbrace{0,\cdots,0}_{(n-2-j)(m-2)})$$

由(4.9)

$$S^{\mathrm{I}}_{i+1,j+1}(x,y)=E^T_{ij}(A_{\mathrm{I}}^{-1})^T[B]=\sum_{q=1}^{j}\sum_{p=1}^{i}(-1)^{i+j+p+q-4}\cdot 4\cdot B_{p+\frac{1}{2},\ q+\frac{1}{2}}(x,y)$$

证毕.

对于中心插值问题，要构造类似于(4.10)的插值函数，需要求解形如$Ax=b$的线性方程组. 注意到A是对称正定矩阵，我们可以用平方根法把A分解成

$$A=S^TS$$

其中

$S=(S_{ij})$为上三角阵，把求解方程组

$$Ax=b$$

的问题转化为求解二个方程:

$$S^Ty=b$$

和

$$Sx=y.$$

参 考 文 献

[1] Chui, Charles K and Ren-hong Wang, On A Birarate B-Spline Basis, CAT#7, October (1981).

[2] Chui, Charles K. and Ren-hong Wang, On Spaces of Piecewise Polynomials with Boundary Conditions Ⅱ, Type-2 Triangulations, CAT#19, June (1982).

Interpolation with Boundary Condition Using Bivariate Quadric Splines Connected with Triangular Partition

Lee Zhi-xian

(Department of Mathematics and Mechanics, Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

In this paper, we study the relations between the existance uniqueness of interpolation with boundary condition using bivariate quadric splines connected with triangular partition and positions of interpolating points. After proving the existence uniqueness of interpolation. Problems at center, vertex and partial center, we give the construction methods for these three interpolating functions.