应用数学和力学，第5卷第6期（1984年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

对称张量的分解和它的应用*

王　敏　中

（北京大学力学系，1983年10月1日收到）

摘　要

本文把任一对称张量分解成两个张量的和．其中之一是“应力型”张量，另一个是“应变型”张量．对称张量空间被分解成两个直交子空间的直和，并用几何语言证明了弹性力学的几个基本原理．

一、引　言

任一张量可分解成对称张量和反对称张量之和，这一点在许多领域里是很重要的．在弹性力学中，对位移梯度张量的转置进行了这一分解，其对称部分表示变形，而反对称部分表示旋转．

本文将继续上述的分解过程，把对称张量分解成“应力型”和“应变型”张量之和．这个分解虽然不复杂，但尚未见到明确提出．本文将给出这个分解的两个证明，一个是分析的，另一个是泛函的．

Synge[1]曾建立了对称张量的内积空间，在本文中将此空间进行了直交分解，并由此应用到弹性理论，叙述和证明了虚功原理、虚应变原理和虚应力原理．关于这些原理的几何叙述在[2][3]中已有，不过我们这儿是从应用对称张量分解这一角度出发的．

二、对称张量的分解

设 D 为三维欧氏空间的一个区域，它的边界为 ∂D，其外法向单位矢量为 $\mathbf{n}$，并设 $\partial D=\partial_T D\cup\partial_u D$，这里 $\partial_T D\cap\partial_u D=0$。

定理 1　设 $\mathbf{S}\in C^1(D)$ 是一个对称张量场，那末 $\mathbf{S}$ 可以唯一地分解成下述形式

$$\mathbf{S}=\mathbf{T}+\mathbf{E} \tag{2.1}$$

这里 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{E}$ 都是 D 上的对称张量场，它们分别满足

$$\nabla\cdot\mathbf{T}=0,\quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}|_{\partial_T D}=0 \tag{2.2}$$

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla),\quad \mathbf{u}|_{\partial_u D}=0 \tag{2.3}$$

---

* 钱伟长推荐．

其中 ∇ 是梯度向量算子，而 $\mathbf{u}$ 是 D 上的向量场。

证明 改写方程(2.1)为

$$\mathbf{T}=\mathbf{S}-\mathbf{E} \tag{2.4}$$

将(2.4)式代入(2.2)式的第一式，并利用(2.3)式的第一式，可得

$$\nabla^2\mathbf{u}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})=2\nabla\cdot\mathbf{S} \tag{2.5}$$

其中$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$。利用(2.1)式将(2.2)式的第二式写成

$$\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla)\cdot\mathbf{n}|_{\partial_T D}=-\mathbf{S}\cdot\mathbf{n} \tag{2.6}$$

可以看出，(2.5)式和(2.6)式，以及(2.3)式的第二式构成线性弹性力学的混合边值问题，其 Poisson 比 $\nu=0$。我们知道，当$-1<\nu<1/2$时，应变能是正定的，按照 Fishera的[4]，上述混合边值问题的解是存在的，也就是说，存在向量场 $\mathbf{u}$ 满足(2.5)、(2.6)和(2.3)的第二式。然后，由(2.3)式的第一式可得对称张量 $\mathbf{E}$，再由(2.4)式可得对称张量 $\mathbf{T}$，它们分别满足(2.2)、(2.3)。

存在性已证，现在来证唯一性。用反证法，设有两种分解

$$\mathbf{S}=\mathbf{T}_1+\mathbf{E}_1,\quad \mathbf{S}=\mathbf{T}_2+\mathbf{E}_2$$

令 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2$，$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2$，有

$$\mathbf{T}+\mathbf{E}=0 \tag{2.7}$$

利用[5]的记号，

$$\int_D \mathbf{T}:\mathbf{E}\,dV=\int_D\mathbf{T}:\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla)dV=\int_D\nabla\cdot(\mathbf{T}\cdot\mathbf{u})dV=\int_{\partial D}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{u}\,dB \tag{2.8}$$

将(2.7)代入(2.8)式，再利用 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{E}$ 满足的(2.2)、(2.3)，得：

$$\int_D\mathbf{T}:\mathbf{T}\,dV=0$$

于是 $\mathbf{T}\equiv 0$（在 D 上），此即 $\mathbf{T}_1\equiv\mathbf{T}_2$。由(2.7)得 $\mathbf{E}_1\equiv\mathbf{E}_2$。证完。

三、对称张量空间

设 L 是区域 D 上全体连续可微的对称张量 $\mathbf{S}\in C^1(D)$所形成的空间，即

$$L=\{\mathbf{S}\,|\,\mathbf{S}^T=\mathbf{S},\ \mathbf{S}\in C^1(D)\}$$

在 L 上定义内积

$$(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2)=\int_D\mathbf{S}_1:\mathbf{S}_2\,dV,\quad \forall\mathbf{S}_1,\ \mathbf{S}_2\in L \tag{3.1}$$

这样，我们说，在定义(3.1)下，L 是个内积空间。

设 $\mathbf{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_2\in L$，如果$(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2)=0$，则称它们互为直交，且记为 $\mathbf{S}_1\perp\mathbf{S}_2$。

设 L_1 和 L_2 的两个子空间，定义如下三个记号：

$$L_1\perp L_2,\ \text{如果}(\mathbf{S}_1,\mathbf{S}_2)=0,\ \forall\mathbf{S}_1\in L_1,\mathbf{S}_2\in L_2$$

$$L_1^\perp=\{\mathbf{S}\,|\,\mathbf{S}\in L,\ (\mathbf{S},\ \mathbf{T})=0,\ \forall\mathbf{T}\in L_1\}$$

$$L_1\oplus L_2=\{\mathbf{S}\,|\,\mathbf{S}=\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2,\ \mathbf{S}_1\in L_1,\ \mathbf{S}_2\in L_2,\ L_1\perp L_2\}$$

下述事实显然成立：

引理 若 $L=L_1\oplus L_2$，则 $L_1=L_2^\perp$，$L_2=L_1^\perp$

证明 设 $\mathbf{S}\in L$，有

$$(\mathbf{S},\ \mathbf{T})=0,\quad \forall \mathbf{T}\in L_2 \tag{3.2}$$

设 $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1+\mathbf{S}_2$，$\mathbf{S}_1\in L_1$，$\mathbf{S}_2\in L_2$，将此代入(3.2)式，并且 $\mathbf{T}=\mathbf{S}_2$，由于$\mathbf{S}_1\perp\mathbf{S}_2$，得

$$(\mathbf{S}_2,\ \mathbf{S}_2)=0$$

即 $\mathbf{S}_2=0$，因此 $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1\in L_1$，即 $L_1=L_2^{\perp}$，同理 $L_2=L_1^{\perp}$。

现在定义 L 上的两个子空间 L_T 和 L_E：

$$L_T=\{\mathbf{T}\,|\,\mathbf{T}\in L,\ \nabla\cdot\mathbf{T}=0,\ \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}|_{\partial_T D}=0\} \tag{3.3}$$

$$L_E=\{\mathbf{E}\,|\,\mathbf{E}\in L,\ \mathbf{E}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla),\ \mathbf{u}|_{\partial_u D}=0\} \tag{3.4}$$

利用 L_T 和 L_E 可将定理 1 表述成如下形式

定理 2 下述关系成立

$$L=L_T\oplus L_E \tag{3.5}$$

证明 首先指出 $L_T\perp L_E$，事实上，设 $\mathbf{T}\in L_T$，$\mathbf{E}\in L_E$，由(2.8)式以及内积的定义(3.1) L_T 和 L_E 的定义(3.3)、(3.4)式，立即可得$(\mathbf{T},\ \mathbf{E})=0$。

其次，设 $\mathbf{S}\in L$，按定理 1，存在张量 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{E}$，使

$$\mathbf{S}=\mathbf{T}+\mathbf{E},\quad \mathbf{T}\in L_T,\quad \mathbf{E}\in L_E \tag{3.6}$$

由(3.6)式和 $L_T\perp L_E$，知(3.5)式成立。

当然，不引用定理 1，如果设 L 是完备的，即 L 为 Hilbert 空间，也不难得到(3.6)式。今先证 L_T 是 L_E 的直交补。设 $\mathbf{T}\in L$，且

$$(\mathbf{T},\ \mathbf{E})=0,\quad \forall \mathbf{E}\in L_E \tag{3.7}$$

由(2.8)和(3.7)可得

$$\int_D(\nabla\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{u}\,dV+\int_{\partial_T D}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{u}\,dB=0 \tag{3.8}$$

由于 $\mathbf{u}$ 的任意性，从(3.8)式，得

$$\nabla\cdot\mathbf{T}=0,\quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}|_{\partial_T D}=0$$

即 $\mathbf{T}\in L_T$，因此 $L_T=L_E^{\perp}$，按 Hilbert 空间的直交分解定理，(3.6)式成立。

定理 2 证毕。

由定理 2 和前面的引理，有如下推论。

推论：

$$L_T=L_E^{\perp},\quad L_E=L_T^{\perp}$$

四、应　　用

引入下面两个定义

一个对称张量场 $\mathbf{T}$ 称为可允许应力场，如果

$$\nabla\cdot\mathbf{T}+\mathbf{f}=0,\quad \mathbf{T}\cdot\mathbf{n}|_{\partial_T D}=\mathbf{p}$$

这里 $\mathbf{f}$(D中)和 $\mathbf{p}$ ($\partial_T D$上)是给定的向量。

一个对称张量场 $\mathbf{u}$ 称为可允许位移场，如果

$$\mathbf{u}|_{\partial_u D}=\mathbf{b}$$

这里 $\mathbf{b}$ ($\partial_u D$上)也是给定的向量。

设 $\mathbf{T}^\circ$ 是某个可允许应力场，而 $\mathbf{u}^\circ$ 是某个可允许位移场．我们有如下简单事实：假如 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{u}$ 是可允许场，那末 $\mathbf{T}-\mathbf{T}^\circ\in L_T$，$\mathbf{E}-\mathbf{E}^\circ\in L_E$，(这里 $\mathbf{E}=(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla)/2$, $\mathbf{E}^\circ=(\nabla\mathbf{u}^\circ+\mathbf{u}^\circ\nabla)/2$)；反之，假如 $\mathbf{T}-\mathbf{T}^\circ\in L_T$，$\mathbf{E}-\mathbf{E}^\circ\in L_E$，那末 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{u}$ 都是可允许场．

弹性力学的几个基本原理可如下叙述

虚功原理　若 $\mathbf{T}-\mathbf{T}^\circ\in L_T$，$\mathbf{E}-\mathbf{E}^\circ\in L_E$，则

$$(\mathbf{T}-\mathbf{T}^\circ,\ \mathbf{E}-\mathbf{E}^\circ)=0$$

虚位移原理　若 $\mathbf{T}-\mathbf{T}^\circ\in L$，且

$$(\mathbf{T}-\mathbf{T}^\circ,\ \mathbf{E}-\mathbf{E}^\circ)=0,\quad \forall\mathbf{E}-\mathbf{E}^\circ\in L_E$$

则 $\mathbf{T}-\mathbf{T}^\circ\in L_T$

虚应力原理　若 $\mathbf{E}-\mathbf{E}^\circ\in L_E$，且

$$(\mathbf{T}-\mathbf{T}^\circ,\ \mathbf{E}-\mathbf{E}^\circ)=0,\quad \forall\mathbf{T}-\mathbf{T}^\circ\in L_T$$

则 $\mathbf{E}-\mathbf{E}^\circ\in L_E$

很明显，上述三个原理就是 L_T 和 L_E 的下述三个关系的表述：$L_T\perp L_E$，$L_T=L_E^\perp$，$L_E=L_T^\perp$．

参　考　文　献

[1] Synge, J. L., *The Hypercircle in Mathematical Physics*, Cambridge University Press (1975).

[2] Oden, J. T. and J. N. Reddy, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag (1976).

[3] 胡海昌，广义变分原理在近似解中的合理应用，力学学报，1 (1982)，1—17.

[4] Fichera, G., Existence Theorem in Elasticity, Vol. Ⅵ a/2, *Handbuch der Physik*, edited by C. Truesdell, Berlin-Heideberg-New York, Spring (1972).

[5] Nadeau, G., *Introduction to Elasticity*, Holt, Rinehart and Winston, INC(1964).

Decomposition of Symmetric Tensor and Its Application

Wang Min-zhong

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

In this paper any symmetric tensor is decomposed into the sum of two tensors. One of them is a "type of stress", and another is a "type of strain" tensor. The inner product space of symmetric tensor is decomposed into the sum of two orthogonal subspaces. The geometric meaning of several principles in the theory of elasticity is given.