

复合型脆断的周向应力应变乘积判据*

林 拜 松

(中南矿冶学院, 1983年9月9日收到)

摘 要

本文提出一个新的复合型脆断判据, 即周向应力应变乘积判据, 该判据与实验数据非常一致。

一、前 言

最近, 一些研究者^[1~3]得到了几个用应力强度因子 K_I 和 K_{II} 表示的复合型脆断判据, 而且, 这些判据全都包含在作者提出的经验判据:

$$(K_I/K_{Ic})^m + (K_{II}/K_{IIc})^n = 1 \quad (1 \leq \frac{m}{n} \leq 2)^{[4]}$$

之中。

在综合研究应变能密度判据^[7]、最大周向应力判据^[8]和最大周向应变判据^[9]的基础上, 我们提出一个新的判据, 即周向应力应变乘积判据。以中心斜裂纹板单向拉伸为例, 对于 $\mu = 1/3$ 平面应力情形或 $\mu = 0.25$ 平面应变情形, 最大周向应力应变乘积判据取形式: $K_I/K_{Ic} + (K_{II}/K_{IIc})^2 = 1$ 。这表明, 本判据与实验数据非常一致。

二、周向应力应变乘积判据

图1所示 I-II 复合型裂纹尖端附近的应力分量 σ_r , σ_θ 和 $\tau_{r\theta}$ 为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[K_I(3 - \cos\theta) \cos\frac{\theta}{2} + K_{II}(3\cos\theta - 1) \sin\frac{\theta}{2} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[K_I(1 + \cos\theta) \cos\frac{\theta}{2} - K_{II}(3\sin\theta) \cos\frac{\theta}{2} \right] \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \sin\theta \cos\frac{\theta}{2} + K_{II}(3\cos\theta - 1) \cos\frac{\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

而周向应力应变乘积为:

$$P = \sigma_\theta \cdot \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta^2 - \mu \sigma_r \sigma_\theta) \quad (2.2)$$

* 钱伟长推荐。

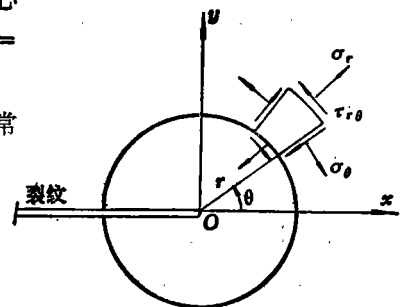


图1 平面极坐标中的应力分量

其中 E 是弹性模量, μ 是泊松比. 将式(2.1)的 σ_r 和 σ_θ 代入式(2.2)得:

$$P = \frac{1}{r} (A_{11}K_I^2 + 2A_{12}K_I K_{II} + A_{22}K_{II}^2) \quad (2.3)$$

其中诸系数 A_{ij} ($i, j=1, 2$)给出为:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{16\pi G} \left[\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)(\kappa - 2 + \cos\theta) \right] \\ A_{12} &= \frac{1}{16\pi G} \left[\frac{1}{2} \sin\theta \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (3 - 2\kappa - 3\cos\theta) \right] \\ A_{22} &= \frac{1}{16\pi G} \left[\frac{3}{4} \sin^2\theta (\kappa + 3\cos\theta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

这里, $\kappa = 3 - 4\mu$ (平面应变), $\kappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ (平面应力); G 是剪切弹性模量.

由式(2.3)知道, 周向应力应变乘积有 r^{-1} 阶奇异性. 我们用 L_θ 代表周向应力应变乘积的奇异性强度, 并称它为“周向应力应变乘积因子”, 即

$$L_\theta = A_{11}K_I^2 + 2A_{12}K_I K_{II} + A_{22}K_{II}^2 \quad (2.5)$$

这个因子通过系数 A_{ij} 而与 θ 有关.

周向应力应变乘积判据叙述如下:

1) 裂纹在 L_θ 达到最大值的方向开始扩展. 于是, 确定开裂角 θ_0 的公式是:

$$\frac{\partial L_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 L_\theta}{\partial \theta^2} < 0, \quad \theta = \theta_0 \text{ 时} \quad (2.6)$$

2) 当周向应力应变乘积因子的最大值达到临界值 $L_{\theta cr}$ 时, 裂纹就开始扩展. 于是, 裂纹开始扩展条件为:

$$L_{\theta max} = L_{\theta cr} \quad (2.7)$$

显然, $\mu = 0$ 时, 周向应力应变乘积判据就是最大周向应力判据或最大周向应变判据.

三、开裂角

现在, 我们来确定 I 型裂纹、II 型裂纹和 I-II 复合型裂纹的开裂角.

1) I 型裂纹

对于 I 型裂纹, 我们有

$$L_\theta = A_{11}K_I^2 \quad (3.1)$$

代入式(2.6), 得到开裂角为:

$$\theta_0 = 0 \quad (3.2)$$

于是, L_θ 的最大值为:

$$L_{\theta max} = \frac{K_I^2}{8\pi G} (\kappa - 1) \quad (3.3)$$

2) II 型裂纹

对于 II 型裂纹, 我们有

$$L_\theta = A_{22}K_{II}^2 \quad (3.4)$$

将式(3.4)代入式(2.6), 得到确定开裂角 θ_0 的公式为:

$$-\theta_0 = \cos^{-1} \left[-\frac{\kappa}{9} + \sqrt{\left(\frac{\kappa}{9}\right)^2 + \frac{1}{3}} \right] \quad (3.5)$$

而 L_o 的最大值为:

$$L_{o\max} = A_{22}(\theta_o) K_I^2 \quad (3.6)$$

$-\theta_o$ 的计算值列在表 1 中。对于 $\mu=0.07$ 的石墨钎(上)和 $\mu=0.2$ 的石墨 7477, II 型裂纹的实验开裂角的平均值约为 67° ^[3], 这表明本判据与实验结果非常一致。

表 1 $-\theta_o$ 之值

泊松比 μ		0	0.1	0.2	0.25	0.3	$\frac{1}{3}$	0.4
$-\theta_o$	平面应力	70.5°	69.25°	68.05°	67.5°	67°	66.65°	66°
	平面应变	70.5°	69.1°	67.5°	66.65°	65.7°	65.1°	63.75°

3) 中心斜裂纹

对于中心斜裂纹单向拉伸情形, 应力强度因子为:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta, \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta \quad (3.7)$$

式中 σ ——拉应力; a ——裂纹半长; β ——裂纹角。

将式(3.7)代入式(2.6), 就得到确定开裂角 θ_o 的公式为:

$$\left(\frac{\partial A_{11}}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_o} + 2\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_o} \cdot \text{ctg} \beta + \left(\frac{\partial A_{22}}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_o} \cdot \text{ctg}^2 \beta = 0 \quad (3.8)$$

$\mu=1/3$ 时不同裂纹角 β 所对应的开裂角 θ_o 的计算值列在表 2 中。同时表 2 亦列出实验开裂角。从表 2 可以看出, 开裂角的理论值与实验值之间的差是小的。

表 2 $-\theta_o$ 与 β 之间的关系, $\mu=\frac{1}{3}$

β		30°	40°	50°	60°	70°	80°
平面应力($-\theta_o$)	实验值	62.4°	55.6°	51.6°	43.1°	30.7°	17.3°
	理论值	57.3°	52.9°	50.2°	43.5°	32.7°	18.8°

显然, L_o 的最大值为:

$$L_{o\max} = A_{11}(\theta_o) K_I^2 + 2A_{12}(\theta_o) K_I K_{II} + A_{22}(\theta_o) K_{II}^2 \quad (3.9)$$

四、复合型脆断判据

下面确定 K_{Ic} 和复合型脆断判据。

1) I 型裂纹

根据式(2.7)和(3.3), 我们得到 L_o 的临界值为:

$$L_{ocr} = \frac{1}{8\pi G} (\kappa - 1) K_{Ic}^2 \quad (4.1)$$

式中, $\kappa=3-4\mu$; K_{Ic} 是平面应变断裂韧性。

2) II 型裂纹

II 型裂纹的开裂条件是:

$$\frac{K_{IIc}^2}{16\pi G} \left[\frac{3}{4} \sin^2 \theta_o (\kappa + 3 \cos \theta_o) \right] = \frac{\kappa - 1}{8\pi G} \cdot K_{Ic}^2 \quad (4.2)$$

将表 1 的 μ 值和对应的开裂角 θ_o 值代入式(4.2), 就可以得到比值 K_{IIc}/K_{Ic} 。表 3 列出

比值 K_{Ic}/K_{I0} 的计算结果。

表 3

 $K_{Ic}/K_{I0}-\mu$ 关系

泊松比 μ		0	0.1	0.2	0.25	0.3	$\frac{1}{3}$	0.4
$\frac{K_{Ic}}{K_{I0}}$	平面应力	0.866	0.821	0.774	0.748	0.722	0.705	0.687
	平面应变	0.866	0.816	0.748	0.705	0.650	0.607	0.494

从表 3 可以看出: (1) K_{Ic}/K_{I0} 值随 μ 的增大而减小; (2) 文献[10]预言的 $K_{Ic}/K_{I0}=0.63$, 接近本判据 $\mu=0.3$ 时平面应变的 $K_{Ic}/K_{I0}=0.65$; (3) 文献[11]预言的 $K_{Ic}/K_{I0}=0.724$, 与本判据 $\mu=0.3$ 时平面应力的 $K_{Ic}/K_{I0}=0.722$ 几乎相等; (4) 文献[9]指出, 有机玻璃平板的比值 K_{Ic}/K_{I0} 的实验平均值向 0.737 或 0.652 靠近, 这表明本判据与实验数据非常一致。

3) 中心斜裂纹

对于中心斜裂纹单向拉伸情形, 将式(3.9)和(4.1)代入式(2.7), 就得到开裂条件:

$$A_{11}(\theta_0)K_I^2 + 2A_{12}(\theta_0)K_I K_{I0} + A_{22}(\theta_0)K_{I0}^2 = \frac{\kappa-1}{8\pi G} K_{I0} \quad (4.3)$$

由该式可以算出开裂时 K_I/K_{I0} 和 K_{I0}/K_{I0} 之值。对于 $\mu = \frac{1}{3}$ 的平面应力和 $\mu=0.25$ 的平面应变, K_I/K_{I0} 和 K_{I0}/K_{I0} 的计算值列在表 4 中。

表 4

 K_I/K_{Ic} 和 K_{I0}/K_{Ic} 之值

β	0°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$-\theta_0$		57.3°	52.9°	50.2°	43.5°	32.7°	18.8°	0°
K_I/K_{Ic}	0	0.333	0.441	0.559	0.686	0.814	0.943	1
K_{I0}/K_{Ic}	1	0.820	0.748	0.664	0.561	0.423	0.243	0

计算后得到

$$\frac{K_I}{K_{I0}} + \left(\frac{K_{I0}}{K_{I0}}\right)^2 = 1 \quad (4.4)$$

这就是 Wu 的经验判据^[2]和 Lee 等的理论判据^[4]。所以, 本判据与实验数据非常一致。

参 考 文 献

- [1] Shah, R. C., Fracture under combined mode in 4340 steel, *Fracture analysis, ASTM STP*, 560 (1974), 29.
- [2] Wu, E.M., Application of fracture mechanics to anisotropic plates, *J. Appl. Meth.*, 34, 4 (1967), 967.
- [3] Awaji, H. and S. Sato, Combined mode fracture toughness measurement by the disk test, *J. Engng. Materials and Technol.*, 100, 2 (1978), 175.
- [4] Lee, K. Y. and H. S. Advani, Fracture criteria and stress intensity factors including the effect of crack closure, *Engng. Fracture Mech.*, 16, 2 (1982), 257.
- [5] 汪懋骅, 复合型断裂应变准则, 固体力学学报, 4 (1982), 571.
- [6] 林拜松, 复合型脆断的应变能判据, 应用数学和力学, 5, 4 (1984).
- [7] Sih, G. C., Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems, *Int. Journ. of Fracture*, 10, 3 (1974), 305.
- [8] Erdogan, F. and G. C. Sih, On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. of Basic Engng.*, 85D (1963), 519.
- [9] 樊蔚勋, 复合型脆断的周向应力应变因子判据, 应用数学和力学, 3, 2 (1982), 211—224.
- [10] Hussain, M. A., S. L. Pu and J. Underwood, Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II, *ASTM STP*, 560 (1974), 2.
- [11] Wang Tzu-chiang, Fracture criteria for combined mode cracks, *Fracture*, 1977 ICF4, Waterloo, Canada, 4, 135.

The Circumferential Stress-Strain Product Criterion of Mixed Mode Brittle Fracture

Lin Bai-song

(Central-South Institute of Mining and Metallurgy, Changsha)

Abstract

This paper presents a new criterion of mixed mode brittle fracture, i. e. the circumferential stress-strain product criterion. This criterion is shown to be in good agreement with known experimental data.