

样条扇形单元*

袁 驹

(清华大学, 1983年9月13日收到)

摘 要

本文在样条分片插值及样条矩形单元^[4]的基础之上进而讨论极坐标中二次及三次样条分片插值及样条(圆环)扇形单元, 以用于求解圆(环)域与(圆环)扇形域上的各类问题. 圆环扇形单元($r \neq 0$)是样条分片插值在极坐标中简单的推广应用, 但扇形单元则不然. 本文根据扇形单元在 $r=0$ 处的特殊性对各位移插值函数作了合理的处理, 使得该单元即体现了 $r=0$ 处的几何特性又可以消除该处应变、应力的奇异性. 文中给出了用样条(圆环)扇形单元求解平面问题及薄板弯曲问题的数值算例用以说明该单元的效能.

一、引 言

样条函数与其它相同次数的分段多项式相比, 可以保留同阶的逼近精度而提高连续性、减少待定参数. 因此同基于最小势能原理的里兹法相结合求解问题时, 可以用较低次的样条函数, 少得多的自由度求得连续性较强、精度较高的解^{[1][2][3]}. 文献[4]提出了样条分片插值并建立了样条矩形单元. 这种样条单元在使用上比以往的 B 样条整体插值方法^{[1][2][3]}要更加方便灵活, 也更便于推广应用. 本文将直角坐标系中的样条分片插值进一步推广到极坐标中去, 建立了二次及三次样条圆环扇形单元($r_1 \neq 0$, 见图1)与扇形单元($r_1 = 0$), 以用于求解圆(环)域或(圆环)扇形域上的问题.

极坐标中 $r=0$ 处是一个特殊点, 可以引起两方面的问题: 一是插值函数在该点作如何处理以保证连续性; 二是如何避免该点应变、应力的奇异性. 这些问题在轴对称弹性体及旋转壳有限元分析中都已遇到, 并已有许多讨论及处理办法, 不过大都是针对环向为三角级数的情况而讨论的. 本文根据扇形单元在 $r=0$ 处的特殊性对各位移插值函数作了合理的处理, 体现了 $r=0$ 处的几何特性, 保证了该点函数及导数各方向的连续性, 消除了该点应变应力的奇异性.

为了说明文中所述单元解题效能, 文中给出了圆(环)域上平面问题与圆形薄板、扇形板的各种问题的数值算例, 其结果再次表明样条单元所具有的自由度少, 连续性强, 精度高的特点.

*龙驭球推荐.

二、圆环扇形单元

图 1 所示为一圆环扇形单元, 用文献[4]所述的双样条分片插值的方法可以得到单元上双一次、双二次、双三次样条插值函数如下

$$f(r, \theta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=0}^{d-1} \sum_{j=1}^2 \sum_{\beta=0}^{d-1} N_{ij}^{\alpha\beta}(r, \theta) f_{ij}^{\alpha\beta} \quad (2.1)$$

式中, $d=1, 2, 3$ 为样条函数的次数, $f_{ij}^{\alpha\beta}$ 为结点 ij 的函数值或导数值, 其含义如下

$$f_{ij}^{\alpha\beta} \equiv D_r^\alpha D_\theta^\beta f(r_i, \theta_j), \quad D_r^\alpha(\quad) \equiv \frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha}(\quad)$$

$$(i, j=1, 2; \alpha, \beta=0, 1, \dots, d-1) \quad (2.2)$$

$N_{ij}^{\alpha\beta}$ 为样条分片插值的基函数, 可用样条分段插值的基函数的乘积表示成

$$N_{ij}^{\alpha\beta}(r, \theta) = N_i^\alpha(r) N_j^\beta(\theta) \quad (i, j=1, 2) \quad (2.3)$$

而基函数 N_i^α 可以逐个写出显式, 也可以用相应次数 (d 次) 的 B 样条来表示^[4]:

a) 一次样条 ($d=1$)

$$N_1^0 = B_0, \quad N_2^0 = B_1 \quad x \in [x_1, x_2] \quad (2.4)$$

其中

$$B_i = \varphi_1\left(\frac{x-x_1}{h} - i\right) \quad (i=0, 1)$$

$$h = x_2 - x_1$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & 1 \leq |x| \end{cases}$$

b) 二次样条 ($d=2$)

$$\left. \begin{aligned} N_1^0 &= B_0 + B_1, & N_2^0 &= B_2 + B_3 \\ N_1^1 &= \frac{h}{2}(B_1 - B_0), & N_2^1 &= \frac{h}{2}(B_3 - B_2) \end{aligned} \right\} x \in [x_1, x_2] \quad (2.5)$$

其中

$$B_i = \varphi_2\left(\frac{x-x_1}{h} + \frac{1}{2} - i\right) \quad (i=0, 1, 2, 3)$$

$$h = (x_2 - x_1)/2$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{3}{4} & |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}|x| + \frac{9}{8} & \frac{1}{2} \leq |x| < \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} \leq |x| \end{cases}$$

c) 三次样条 ($d=3$)

$$\left. \begin{aligned} N_1^0 &= B_{-1} + B_0 + B_1, & N_2^0 &= B_2 + B_3 + B_4 \\ N_1^1 &= h(B_1 - B_{-1}), & N_2^1 &= h(B_4 - B_2) \\ N_1^2 &= \frac{h^2}{6}(2B_{-1} - B_0 + 2B_1), & N_2^2 &= \frac{h^2}{6}(2B_4 - B_3 + 2B_2) \end{aligned} \right\} x \in [x_1, x_2] \quad (2.6)$$

$$\text{其中 } B_i = \varphi_3\left(\frac{x-x_i}{h} - i\right) \quad (i = -1, 0, 1, \dots, 4)$$

$$h = (x_2 - x_1)/3$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \frac{|x|^3}{2} - x^2 + \frac{2}{3} & |x| \leq 1 \\ -\frac{|x|^3}{6} + x^2 - 2|x| + \frac{4}{3} & 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & 2 < |x| \end{cases}$$

式(2.4)、(2.5)、(2.6)中定义的基函数 N_i^α 具有如下性质

$$D_x^{\alpha-1} N_i^{\beta-1}(x_j) = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \quad (i, j = 1, 2; \alpha, \beta = 1, 2, \dots, d) \quad (2.7)$$

其中 δ_{ij} 为Kronecker δ 。进而可知式(2.1)中的 $N_{ij}^{\alpha\beta}$ 具有如下性质

$$D_x^{\alpha-1} D_\theta^{\beta-1} N_i^{\delta-1} N_j^{\gamma-1}(r, \theta) = \delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \quad (2.8)$$

$$(k, l, i, j = 1, 2; \alpha, \beta, \delta, \gamma = 1, 2, \dots, d)$$

下面讨论几种弹性力学有限元分析中的样条圆环扇形单元的例子。

(1) 双二次样条圆环扇形平面单元

弹性力学平面问题在极坐标中的应变向量为

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

其中 u 为径向位移， v 为环向位移。现将单元的位移模式用双二次样条分片插值写成

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{j=1}^2 \sum_{\beta=0}^1 N_{ij}^{\alpha\beta}(r, \theta) u_{ij}^{\alpha\beta} \\ v(r, \theta) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{j=1}^2 \sum_{\beta=0}^1 N_{ij}^{\alpha\beta}(r, \theta) v_{ij}^{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

其中 N_i^α 由式(2.5)定义。本单元每个结点8个自由度，整个单元共32个自由度。因其一阶导数在单元间是连续的，所以应力场在单元间是连续的，可直接求得结点处的应力。

(2) 双二次样条圆环扇形薄板单元

薄板弯曲问题在极坐标中的应变(曲率)向量为

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_r \\ \kappa_\theta \\ 2\kappa_{r\theta} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ \frac{2}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

其中 w 为板的挠度。现将单元上的位移模式用双二次样条分片插值函数写成

$$w(r, \theta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{j=1}^2 \sum_{\beta=0}^1 N_{ij}^{\alpha\beta}(r, \theta) w_{ij}^{\alpha\beta} \quad (2.12)$$

其中 $N_{ij}^{\alpha\beta}$ 由式(2.5)定义。本单元每个结点4个自由度，整个单元为16个自由度，其弯曲内力在单元之间不是连续的。

(3) 双三次样条圆环扇形薄板单元

此单元的位移模式用双三次样条分片插值函数表示为

$$w(r, \theta) = \sum_{i=1}^2 \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{\beta=0}^2 N_{ij}^{\alpha\beta}(r, \theta) w_{ij}^{\alpha\beta} \quad (2.13)$$

其中， $N_{ij}^{\alpha\beta}$ 由式(2.6)定义，本单元每个结点9个自由度，整个单元共36个自由度。因其二阶导数在单元之间是连续的，所以弯曲内力在单元间也是连续的，可直接求得结点处的内力矩。

三、扇形单元

对于图1中所示的圆环扇形单元，若 $r_1=0$ ，则该单元的结点11与结点12便聚集为一个结点（记为结点0），成为扇形单元。如果对于扇形单元其位移模式仍取为(2.10)、(2.12)、(2.13)的话，则在 $r=0$ 处将是不连续的，多值的，并且因应变表达式(2.9)、(2.11)中含有奇异项而无法得到 $r=0$ 处的应变与应力，所以必须分别对式(2.10)、(2.12)、(2.13)进行处理修正。下面先将各类问题扇形单元的修正位移模式写出，然后再举例说明作这样处理的合理性。

(1) 二次样条扇形平面单元

以下用 u 及 v 分别表示直角坐标系中 x 方向与 y 方向的水平位移，且记

$$u_0^{\alpha\beta} \equiv D_x^\alpha D_y^\beta u \Big|_{r=0}, \quad v_0^{\alpha\beta} \equiv D_x^\alpha D_y^\beta v \Big|_{r=0} \quad (\alpha, \beta=0, 1) \quad (3.1)$$

则代之以式(2.10)，位移模式为

$$\left. \begin{aligned} u(r, \theta) &= N_1^0(r) \cos \theta u_0^0 + N_1^1(r) \cos^2 \theta u_0^0 + N_1^1(r) \sin \theta \cos \theta u_0^1 \\ &\quad + N_1^0(r) \sin \theta v_0^0 + N_1^1(r) \sin \theta \cos \theta v_0^1 + N_1^1(r) \sin^2 \theta v_0^1 \\ &\quad + \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{j=1}^2 \sum_{\beta=0}^1 N_{2j}^{\alpha\beta}(r, \theta) u_{2j}^{\alpha\beta} \\ v(r, \theta) &= -N_1^0(r) \sin \theta u_0^0 - N_1^1(r) \sin \theta \cos \theta u_0^1 - N_1^1(r) \sin^2 \theta u_0^1 \\ &\quad + N_1^0(r) \cos \theta v_0^0 + N_1^1(r) \cos^2 \theta v_0^1 + N_1^1(r) \sin \theta \cos \theta v_0^1 \\ &\quad + \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{j=1}^2 \sum_{\beta=0}^1 N_{2j}^{\alpha\beta}(r, \theta) v_{2j}^{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

此扇形单元每个结点8个自由度，整个单元共 8×3 个自由度。应力场在单元之间，尤其是在 $r=0$ 处，仍然是连续的。

(2) 二次样条扇形薄板单元

以下记

$$\bar{w}_0^{\alpha\beta} \equiv D_x^\alpha D_y^\beta w \Big|_{r=0} \quad (\alpha, \beta=0, 1, 2) \quad (3.3)$$

则代之以式(2.12), 位移模式为

$$\begin{aligned} w(r, \theta) = & N_1^0(r) \bar{w}_0^0 + N_1^1(r) \cos \theta \bar{w}_0^1 + N_1^2(r) \sin \theta \bar{w}_0^2 \\ & + \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{j=1}^2 \sum_{\beta=0}^1 N_{2j}^{\alpha\beta}(r, \theta) w_{2j}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.4)$$

此扇形单元每个结点 4 个自由度, 整个单元共 4×3 个自由度.

(3) 三次样条扇形薄板单元

代之以式(2.13), 位移模式为

$$\begin{aligned} w(r, \theta) = & N_1^0(r) \bar{w}_0^0 + N_1^1(r) \cos \theta \bar{w}_0^1 + N_1^2(r) \sin \theta \bar{w}_0^2 \\ & + N_1^3(r) \sin 2\theta \bar{w}_0^3 + N_1^4(r) \cos^2 \theta \bar{w}_0^4 + N_1^5(r) \sin^2 \theta \bar{w}_0^5 \\ & + \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{j=1}^3 \sum_{\beta=0}^2 N_{3j}^{\alpha\beta}(r, \theta) w_{3j}^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.5)$$

此扇形单元每个结点 9 个自由度, 整个单元共 9×3 个自由度. 弯曲内力在单元之间, 尤其是在 $r=0$ 处, 仍然是连续的.

下面以板单元挠度 w 为例讨论(3.4)和(3.5)的合理性.

将式(2.12)及(2.13)先暂时看作是扇形单元上的位移模式 ($r_1=0$), 利用基函数的性质(2.7)、(2.8)可有

$$D_r^\alpha w \Big|_{r=0} = \sum_{j=1}^2 \sum_{\beta=0}^{d-1} N_j^\beta(\theta) w_{1j}^{\alpha\beta} \quad (\alpha=0, 1, 2) \quad (3.6)$$

其中 $d(=2$ 或 $3)$ 为样条插值函数的次数. 但真实挠度 w 在 $r=0$ 处应满足下列几何性质

$$w \Big|_{r=0} = D_r^0 w \Big|_{r=0} = \bar{w}_0^0 \quad (3.7a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=0} &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} \\ &= \bar{w}_0^1 \cos \theta + \bar{w}_0^2 \sin \theta \end{aligned} \quad (3.7b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \Big|_{r=0} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} \\ &= \bar{w}_0^3 \cos^2 \theta + \bar{w}_0^4 \sin 2\theta + \bar{w}_0^5 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (3.7c)$$

所以为了得到合理的位移模式, 式(3.6)等号右边相应于 α 为 0, 1, 2 的三个和式应该分别由式(3.7a, b, c)等号右边的表达式所代替. 经过这样的替换, 式(2.12)及(2.13)便分别变为式(3.4)及(3.5)了. 不难验证, 式(3.4)、(3.5)所描述的位移 w 在 $r=0$ 处直到一阶导数都是连续的, 即沿径向有

$$w(0, \theta) = \bar{w}_0^0, \quad \frac{\partial w(0, \theta)}{\partial r} = -\frac{\partial w(0, \theta + \pi)}{\partial r}$$

而沿 θ 方向的阶连续性是显而易见的, 式(3.5)在 $r=0$ 处的二阶导数也是连续的, 即沿径向有

$$\frac{\partial^2 w(0, \theta)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 w(0, \theta + \pi)}{\partial r^2}$$

而沿 θ 方向二阶连续性以及混合导数的连续性也是显而易见的. 式(3.4)及(3.5)的合理性还在于将它们代入应变表达式(2.11)中不会产生奇异项. 实际上, 最有可能产生奇异性的似乎是 κ_θ 中的 \bar{w}_i^0 所对应的一项, 即

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) N_i^1(r) \cos \theta \bar{w}_i^0 &= \left(\frac{1}{r} \frac{dN_i^1}{dr} - \frac{N_i^1}{r^2} \right) \cos \theta \bar{w}_i^0 \\ &= -\frac{d}{dr} \left(\frac{N_i^1}{r} \right) \cos \theta \bar{w}_i^0 \end{aligned}$$

但 (N_i^1/r) 在 $r=0$ 附近是一个多项式, 并不含有 $1/r$ 项. 所以, 用位移模式(3.4)或(3.5)可直接求出 $r=0$ 处的应变及应力, 因而也可以推导出单元刚度矩阵的显式来.

对于式(3.2)可作类似的讨论. 由式(2.10)出发, 并利用 $r=0$ 处如下的几何性质

$$u \Big|_{r=0} = u_0^0 \cos \theta + v_0^0 \sin \theta$$

$$v \Big|_{r=0} = -u_0^0 \sin \theta + v_0^0 \cos \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = u_0^1 \cos^2 \theta + (u_0^1 + v_0^1) \sin \theta \cos \theta + v_0^1 \sin^2 \theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=0} = v_0^1 \cos^2 \theta + (v_0^1 - u_0^1) \sin \theta \cos \theta - u_0^1 \sin^2 \theta$$

便可得到式(3.2).

四、数值算例

例1 对心受压的圆筒(图2)

本例采用双二次样条圆环扇形单元按平面应变问题计算, 对1/4的圆环采用 2×3 的单元网格. 表1中给出了部分应力结果并与六结点二次三角形单元的结果^[5]作了比较.

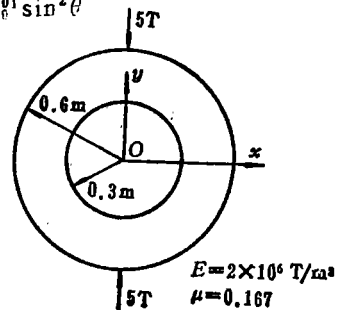


图2

表1

$\sigma_y|_{y=0}$

(T/m²)

x (m)	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	总自由度
本例	-49.4	-28.5	-15.7	-6.1	1.7	8.5	15.4	96
文献 [5]	-43.8	-27.0	-14.0	-5.0	2.8	9.5	16.0	182
函数解	-47.5	-27.8	-14.2	-5.2	2.4	9.3	13.9	

例2 均布荷载作用下周边筒支扇形板(图3)

本例用二次样条单元(扇形与圆环扇形)计算. 对于给定点的挠度与弯矩可表示为^[8]

$$w = \alpha \frac{qa^4}{D}, \quad M_r = \beta qa^2, \quad M_\theta = \beta_1 qa^2$$

表 2 中给出了对称轴 ($\theta=0$) 上 $r=a/2$ 处的几种不同网格划分的结果。

表 2 对称轴上 $r=a/2$ 处因子 α, β, β_1 的值

1/2 板单元数	总自由度	α	β	β_1
2×2	28	0.00790	0.0819	0.0508
4×4	84	0.00806	0.0854	0.0512
6×6	172	0.00809	0.0862	0.0513
解析解[6]		0.00811	0.0868	0.0515

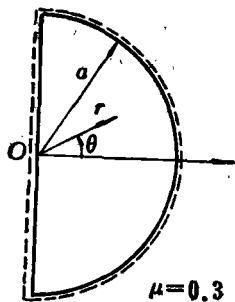


图 3

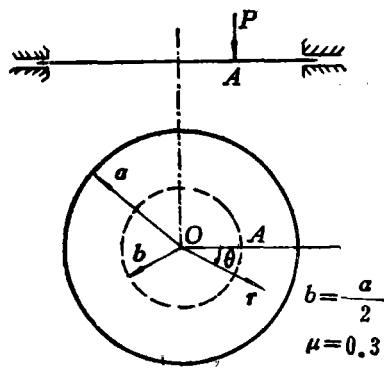


图 4

例 3 偏心集中力作用下的固支圆板 (图 4)

本例用二次样条单元计算。文献[6]中给出了 A 点的挠度

$$w_A = \frac{P}{16\pi D} \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2} = 0.0112 \frac{Pa^2}{D}$$

表 3 中给出了几种不同网格化分的解。

1/4 板单元数	w_A	Pa^2/D
2×2	0.0095	0.0112
4×4	0.0107	0.0112
6×6	0.0112	0.0112
本例解		解析解 [6]
		0.0112

例 4 用三次样条单元计算例 2, 结果见表 4。

表 4 对称轴上 $r=a/2$ 处因子 α, β, β_1 的值

1/2 板单元数	总自由度	α	β	β_1
2×2	63	0.00812	0.0875	0.0516

例 5 用三次样条单元计算例 3, 结果见表 5。

1/4 板单元数	w_A	Pa^2/D
2×2	0.0111	0.0112
本例解		解析解 [6]
		0.0112

五、结 语

本文构造了二次及三次样条(圆环)扇形单元,用来求解极坐标中圆(环)域及(圆环)扇形域上的各类问题.本文中对扇形单元的位移插值函数作了合理的处理.实际数值算例表明,样条扇形单元同样条矩形单元一样,可以用较少的自由度得到连续性较强、精度较高的解,尤其是非轴对称问题及各种边界条件均可方便地使用求解.

参 考 文 献

- [1] 石钟慈, 样条有限元法, 计算数学, 1, 1 (1979), 50—72.
- [2] 何广乾、周润珍、林春哲, 样条函数法在解板壳问题中的应用, 建筑结构学报, 2, 2 (1981), 1—9.
- [3] 袁 驷, 用三次 B 样条进行旋转壳有限元分析, 建筑结构学报, 3, 4 (1982), 25—30.
- [4] 袁 驷, 样条矩形单元, 计算结构力学及其应用, 1, 2 (1984), 41—48.
- [5] 华东水利学院, <弹性力学问题的有限单元法>, 水利电力出版社 (1978).
- [6] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, second edition, McGraw Hill Book Company, Inc. (1959).

Spline Sectorial Elements

Yuan Si

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

In this paper, the quadratic and cubic spline local interpolations on a sectorial element in polar coordinates is discussed and a class of spline sectorial elements for analyses of plane and thin plate problems are presented. A reasonable treatment of the assumed displacement fields for elements with nodes at the origin ($r=0$) is made so that the elements can not only characterize the geometrical properties at the origin but also remove the singularity of strains and stresses there. Some numerical examples are given to show the efficiency of the proposed elements.