

文章编号: 1000-0887(2004)11-1135-08

双材料界面裂纹平面问题的半权函数法^{*}

马开平, 柳春图

(中国科学院 力学研究所, 北京 100080)

(我刊原编委段祝平推荐)

摘要: 应用半权函数法求解双材料界面裂纹的平面问题。由平衡方程、应力应变关系、界面的连续条件以及裂纹面零应力条件推导出裂尖的位移和应力场, 其特征值为 λ 及其共轭。设置特征值为 λ 的虚拟位移和应力场, 即界面裂纹的半权函数。由功的互等定理得到应力强度因子 K_I 和 K_{II} 以半权函数与绕裂纹围道上参考位移和应力积分关系的表达式。数值算例体现了半权函数法精度可靠、计算简便的特点。

关键词: 双材料; 界面裂纹; 应力强度因子; 半权函数法; 平面问题

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

在界面裂纹问题的研究中, Williams^[1] 首先通过特征函数展开的方法分析了裂纹尖端附近的应力场并发现了振荡奇异性的存在, Rice 和 Sih^[2] 采用应力强度因子的概念表述了界面裂纹的应力场, 至此, 求解具体结构载荷下的应力强度因子就成为了界面裂纹问题的关键。在求解界面裂纹应力强度因子的方法中, 常采用的有边界元法、边界积分方程解法、围线积分法、权函数法以及边界配置法等。

权函数法是由 Bueckner 在 1970 年提出的^[3], 权函数法给出了解耦裂纹几何和载荷配置两类影响的途径。只要对确定的裂纹体求解到了对应的权函数, 就可以对任何载荷使用简单的积分完成应力强度因子的计算。对于界面裂纹情况, Gao^[4] 将权函数法应用到了各向异性双材料界面问题, Banks-Sills^[5] 将该方法作了针对具体问题的计算分析, 申连喜, 余寿文^[6] 给出了界面裂纹尖端附近或无限大体半无限界面裂纹问题的权函数的显式表达式。然而, 由于权函数是与裂纹体的几何尺寸相关的, 在应用权函数法的过程中, 必须针对具体的几何构形, 求解相应的权函数, 其难度大致相当于求解一个裂纹问题。在几何构形相当复杂的情况下, 求解一个权函数, 其数学上的难度是很大的。同时对于有限大体, 由于满足边界条件的困难, 很难求得一个理想的权函数。

柳春图和张端中在 1991 年提出了半权函数^[7], 使用与权函数类似的形式, 用积分表达出应力强度因子, 而且半权函数与裂纹体的几何尺寸无关, 对边界条件没有要求。该方法在计算

* 收稿日期: 2002_12_28; 修订日期: 2004_06_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19872066)

作者简介: 马开平(1974—), 男, 四川宜宾人, 博士(联系人, Tel: + 86_757_28362624; Fax: + 86_757_28361070; E_mail: ma.kp@kelon.com)。

单材料 I 型的平面问题中得到了很好的应用。本文将对半权函数法加以推广, 并应用该方法计算界面裂纹的应力强度因子。首先由 Williams 展开得到裂尖的应力和位移场, 根据其奇异性的特征值 λ , 再由 Williams 展开得到特征值为 λ 的虚拟的裂纹尖端应力位移场, 即界面裂纹的半权函数; 从功的互等定理出发, 结合从裂纹下缘到上缘裂纹尖任意路径的位移与应力的近似值, 得到界面裂纹的应力强度因子 K_I 和 K_{II} 积分形式的表达式。由于在积分中可以采用远场的解以避免裂尖的奇异性, 因此即使采用较粗糙的模型或方法得到的近似值, 也可以得到精度较高的 K_I 、 K_{II} 。同时相对于权函数来说, 对于界面裂纹的任意情况都可以采用同样的半权函数, 因而可以扩大求解范围并减小计算难度。

1 裂尖位移应力场与半权函数的推导

1.1 由 Williams 展开求裂尖位移与应力场

对于含两种材料的裂纹问题, 两种材料区域的应力函数设为如下形式

$$U_i = r^{\lambda+1} F_i(\theta, \lambda) + c. c. \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

其中 $c. c.$ 为前项的共轭, F_i 为以下形式:

$$F_i = A_i \sin(\lambda+1)\theta + B_i \cos(\lambda+1)\theta + C_i \sin(\lambda-1)\theta + D_i \cos(\lambda-1)\theta, \quad (2)$$

式中 A_i 、 B_i 、 C_i 、 D_i 为复待定系数, λ 将由特征方程确定, 相应的应力场和位移场由

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{i\theta} = \frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2}, \quad \sigma_{i\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial \theta} \right), \quad (3)$$

$$\begin{cases} u_{\dot{r}} = \frac{r^\lambda}{8G_i} \lambda (-4\lambda(\lambda+1)F_i + (k_i+1)(F_i' + (\lambda+1)^2 F_i)) + c. c., \\ u_{\dot{\theta}} = \frac{r^\lambda}{8G_i} (\lambda-1) (-4\lambda(\lambda-1)F_i' - (k_i+1)(F_i^\ominus + (\lambda+1)^2 F_i')) + c. c., \end{cases} \quad (4)$$

求得, 为

$$\begin{cases} \sigma_{ir} = -\lambda^{\lambda-1} (A_i(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + B_i(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta + \\ \quad C_i(\lambda-3)\sin(\lambda-1)\theta + D_i(\lambda-3)\cos(\lambda-1)\theta) + c. c., \\ \sigma_{i\theta} = \lambda(\lambda+1)r^{\lambda-1} (A_i\sin(\lambda+1)\theta + B_i\cos(\lambda+1)\theta + \\ \quad C_i\sin(\lambda-1)\theta + D_i\cos(\lambda-1)\theta) + c. c., \\ \sigma_{i\theta} = -\lambda^{\lambda-1} (-B_i(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + A_i(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta - \\ \quad D_i(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta + C_i(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta) + c. c., \\ u_{\dot{r}} = -r^\lambda (A_i(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + B_i(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta + \\ \quad C_i(\lambda-k_i)\sin(\lambda-1)\theta + D_i(\lambda-k_i)\cos(\lambda-1)\theta) / (2G_i) + c. c., \\ u_{\dot{\theta}} = -r^\lambda (-B_i(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + A_i(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta - \\ \quad D_i(\lambda+k_i)\sin(\lambda-1)\theta + C_i(\lambda+k_i)\cos(\lambda-1)\theta) / (2G_i) + c. c., \end{cases} \quad (5)$$

式中

$$k_i = \begin{cases} 3-4\nu_i & (\text{平面应变}), \\ (3-\nu_i)/(1+\nu_i) & (\text{平面应力}), \end{cases}$$

G_i 为剪切模量。

裂纹面条件

$$\sigma_{100} |_{\theta=-\pi} = \sigma_{1r0} |_{\theta=-\pi} = 0, \sigma_{200} |_{\theta=\pi} = \sigma_{2r0} |_{\theta=\pi} = 0 \quad (6)$$

两种材料交界线上的连续条件:

$$\begin{cases} u_{1r} |_{\theta=0} = u_{2r} |_{\theta=0}, u_{1\theta} |_{\theta=0} = u_{2\theta} |_{\theta=0}, \\ \sigma_{100} |_{\theta=0} = \sigma_{200} |_{\theta=0}, \sigma_{1r0} |_{\theta=0} = \sigma_{2r0} |_{\theta=0} \end{cases} \quad (7)$$

将式(5)代入条件式(6)、(7), 并定义复应力强度因子为

$$K = K_I - iK_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{\theta r}) |_{\theta=0} r^{1-\lambda} \quad (8)$$

得到各待定系数的表达式

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-iA(R+\lambda)}{2(1+\lambda)}, B_1 = \frac{A(R-\lambda)}{2(1+\lambda)}, \\ C_1 &= \frac{iA}{2}, D_1 = \frac{A}{2}; \\ A_2 &= \frac{-iA(1+R\lambda)}{2(1+\lambda)}, B_2 = \frac{A(1-R\lambda)}{2(1+\lambda)}, \\ C_2 &= \frac{iAR}{2}, D_2 = \frac{AR}{2}, \end{aligned}$$

式中 $R = (G_1 + G_2k_1)/(G_2 + G_1k_2)$ 为双材料界面裂纹的材料常数,

$$\lambda = \frac{1}{2} + i \frac{\ln R}{2\pi}$$

为特征值,

$$A = \frac{K}{(1+R)\lambda}$$

考察裂纹前沿附近的应力为

$$\sigma_{\theta\theta} + i\sigma_{\theta r} |_{\theta=0} = Kr^{-\lambda} \quad (9)$$

裂纹面间相对位移

$$\delta_r + i\delta_\theta = (u_r + iu_\theta) |_{\theta=\pi} \sim r^\lambda \quad (10)$$

由于 λ 为复数, 因此当 $r \rightarrow 0$ 时式子(9)、(10)体现了裂尖的应力场的振荡奇异性与裂纹面的相互嵌入现象。当 $G_1 = G_2, \nu_1 = \nu_2$ 时, 应力与位移场可以退化为单材料的表达式。

再看界面的连续问题。在文献[2]中针对无限大板界面裂纹的情况提出在界面上引入应变分量 ϵ_x 连续的条件, 由于该条件在文献[2]中并不是自然满足的, 因此针对平面应力和平面应变的情况, 由应力应变关系对两种材料分别添加了 x 方向的应力分量以使 ϵ_x 连续, 在文献[8]、[10]和[11]中对有限尺寸板的计算也沿用了这些规定, 这无疑限制了求解的范围, 并且精确程度也受到影响。本文所推导的裂尖位移与应力场, 其界面上 ϵ_x 的连续性是自然严格满足的, 而在远离裂尖的界面上的连续问题可以在近似计算中考虑, 例如有限元法在界面处的连接可以满足连续条件, 这样就避免了不必要的规定, 可以使计算的范围扩大且精确度提高。此外, 当双材料常数 R 等于 1 时, α_x 在裂尖的界面两侧是连续的。

1.2 由 Williams 展开求虚拟位移与应力场形式的半权函数

同样采用 Williams 展开, 将应力与位移场(5)中的 λ 替换为 $-\lambda$ 代入裂纹面条件与连续条件(6)、(7)得到半权函数的表达式:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{ir}^{(s)} &= \mathcal{X}^{-\lambda-1} (A_i^{(s)} (\lambda-1) \sin(\lambda-1)\theta - B_i^{(s)} (\lambda-1) \cos(\lambda-1)\theta + \\ &\quad C_i^{(s)} (\lambda+3) \sin(\lambda+1)\theta - D_i^{(s)} (\lambda+3) \cos(\lambda+1)\theta) + \text{c. c.}, \\ \alpha_{i00}^{(s)} &= \mathcal{X}^{\lambda-1} r^{-\lambda-1} (-A_i^{(s)} \sin(\lambda-1)\theta + B_i^{(s)} \cos(\lambda-1)\theta - \\ &\quad C_i^{(s)} \sin(\lambda+1)\theta + D_i^{(s)} \cos(\lambda+1)\theta) + \text{c. c.}, \\ \alpha_{i0}^{(s)} &= \mathcal{X}^{-\lambda-1} (-B_i^{(s)} (\lambda-1) \sin(\lambda-1)\theta - A_i^{(s)} (\lambda-1) \cos(\lambda-1)\theta - \\ &\quad D_i^{(s)} (\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta - C_i^{(s)} (\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta) + \text{c. c.}, \\ u_{ir}^{(s)} &= -r^{-\lambda} (A_i^{(s)} (\lambda-1) \sin(\lambda-1)\theta - B_i^{(s)} (\lambda-1) \cos(\lambda-1)\theta + \\ &\quad C_i^{(s)} (\lambda+k_i) \sin(\lambda+1)\theta - D_i^{(s)} (\lambda+k_i) \cos(\lambda+1)\theta) / (2G_i) + \text{c. c.}, \\ u_{i0}^{(s)} &= -r^{-\lambda} (-B_i^{(s)} (\lambda-1) \sin(\lambda-1)\theta - A_i^{(s)} (\lambda-1) \cos(\lambda-1)\theta - \\ &\quad D_i^{(s)} (\lambda-k_i) \sin(\lambda+1)\theta - C_i^{(s)} (\lambda-k_i) \cos(\lambda+1)\theta) / (2G_i) + \text{c. c.} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

半权函数的系数可以不是唯一的, 适当选取半权函数的系数以直接得到应力强度因子的积分形式。以下系数的表达式中, 上标(s)表示半权函数, 下标第一个数字表示材料号, 第二个数字表示半权函数组号。

第一组半权函数的系数为

$$\left\{ \begin{aligned} A_{11}^{(s)} &= \frac{-iQ(\lambda-R)}{2(\lambda-1)}, \quad B_{11}^{(s)} = \frac{Q(\lambda+R)}{2(\lambda-1)}, \quad C_{11}^{(s)} = \frac{iQ}{2}, \quad D_{11}^{(s)} = -\frac{Q}{2}, \\ A_{21}^{(s)} &= \frac{-iQ(R\lambda-1)}{2(\lambda-1)}, \quad B_{21}^{(s)} = \frac{Q(R\lambda+1)}{2(\lambda-1)}, \quad C_{21}^{(s)} = \frac{iQR}{2}, \quad D_{21}^{(s)} = -\frac{QR}{2}. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

第二组半权函数的系数为

$$\left\{ \begin{aligned} A_{12}^{(s)} &= \frac{Q(\lambda-R)}{2(\lambda-1)}, \quad B_{12}^{(s)} = \frac{iQ(\lambda+R)}{2(\lambda-1)}, \quad C_{12}^{(s)} = -\frac{Q}{2}, \quad D_{12}^{(s)} = -\frac{iQ}{2}, \\ A_{22}^{(s)} &= \frac{Q(R\lambda-1)}{2(\lambda-1)}, \quad B_{22}^{(s)} = \frac{iQ(R\lambda+1)}{2(\lambda-1)}, \quad C_{22}^{(s)} = -\frac{QR}{2}, \quad D_{22}^{(s)} = -\frac{iQR}{2}, \end{aligned} \right. \quad (13)$$

式中

$$Q = \frac{G_1 G_2}{\pi(G_1 + G_2 k_1)}.$$

2 用半权函数表示应力强度因子 K_I 、 K_{II}

考虑一个受任意载荷的含界面裂纹的平面结构, 取出该结构中的任意一个包含部分裂纹面的域 Ω (图 1), 在区域的边界中, 除去两个裂纹面 C_S 以外的边界为 Γ , 即该区域的边界为 $\partial V = C_S + \Gamma$, 沿裂纹尖端为中心挖取一个半径为 R 的小圆, 其边界以 C_R 表示, 设被挖掉裂纹尖端以后的区域为 Ω , 裂纹面为 C_S , 则有

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \Omega &= \Omega, \\ \lim_{R \rightarrow 0} C_S &= C_S. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

对于分别为两组位移、面力和体力的表达式 (u_i, p_i, f_i) 和 $(u_i^{(s)}, p_i^{(s)}, f_i^{(s)})$, 利用功的互等定理, 我们可以得到

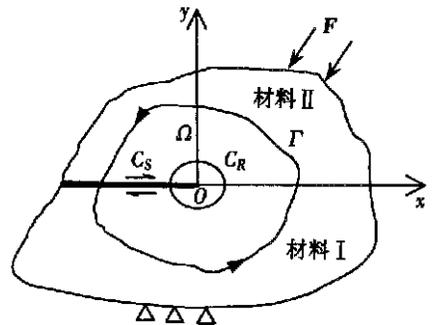


图 1 双材料界面裂纹与积分路径

$$\int_{\Omega} f_i^{(s)} u_i d\Omega + \int_{\Gamma^+} c_s^+ c_b p_i^{(s)} u_i ds = \int_{\Omega} f i u_i^{(s)} d\Omega + \int_{\Gamma^+} c_s^+ c_r p i u_i^{(s)} ds \tag{15}$$

变换上式并略去体积力我们得到

$$\int_{C_R} (p_i^{(s)} u_i - p i u_i^{(s)}) ds + \int_{C_S} (p_i^{(s)} u_i - p i u_i^{(s)}) ds = \int_{\Gamma} (p i u_i^{(s)} - p_i^{(s)} u_i) ds \tag{16}$$

假设 (u_i, p_i) 为前面所述的真实位移和面力的近似值, 在裂纹面上必然有 $p_i = 0$; $(u_i^{(s)}, p_i^{(s)})$ 为半权函数, 在裂纹面同样有 $p_i^{(s)} = 0$. 略去 C_s 上的积分, (16) 式变为

$$\int_{C_R} (p_i^{(s)} u_i - p i u_i^{(s)}) ds = \int_{\Gamma} (p i u_i^{(s)} - p_i^{(s)} u_i) ds \tag{17}$$

转换到极坐标下, 有

$$\int_{C_R} (\sigma_r^{(s)} u_r + \sigma_{\theta}^{(s)} u_{\theta} - \sigma_r u_r^{(s)} - \sigma_{\theta} u_{\theta}^{(s)}) ds = \int_{\Gamma} (\sigma_r^{(s)} u_r + \sigma_{\theta}^{(s)} u_{\theta} - \sigma_r u_r^{(s)} - \sigma_{\theta} u_{\theta}^{(s)}) ds \tag{18}$$

将(5)、(11)式代入(18)式中, 注意到不同材料的分段积分, 当 R 趋近于 0 分别对于第 1、2 组半权函数有

$$\begin{cases} K_I = \int_{\Gamma} (\sigma_{r1}^{(s)} u_r + \sigma_{\theta1}^{(s)} u_{\theta} - \sigma_r u_{r1}^{(s)} - \sigma_{\theta} u_{\theta1}^{(s)}) ds, \\ K_{II} = \int_{\Gamma} (\sigma_{r2}^{(s)} u_r + \sigma_{\theta2}^{(s)} u_{\theta} - \sigma_r u_{r2}^{(s)} - \sigma_{\theta} u_{\theta2}^{(s)}) ds. \end{cases} \tag{19}$$

注意半权函数的第 2 个下标为半权函数组号。

至此, 我们得到了用积分形式表示的双材料界面裂纹的应力强度因子。与权函数相比, 由于放松了限制条件, 使得半权函数可以得到精确解析的表达式。用一个半权函数可以求取不同几何构形的裂纹体的应力强度因子, 本文设置的两组半权函数可以求解一般情况下的任意载荷与结构形式的界面裂纹应力强度因子。由于半权函数的存在, 应力强度因子的加权积分表达式中避开了裂尖附近的奇异性, 在远场加权积分中即使给出较粗的参考解也能得到较精确的应力强度因子。还应当指出的是, 裂纹尖端的奇异性与界面的特殊性质仅仅是结构的一个局部现象, 同时随着 r 的增大以及偏离界面位置, 这些特性的作用迅速减小, 因此采用绕裂尖回路积分的方式所得到的应力强度因子是可以满足计算精度的。

3 算 例

在以下的算例中, 本文采用有限元软件 ANSYS 计算积分路径上的近似值, 有限单元采用二维平面应变的 8 节点单元, 积分路径选取为从裂纹下缘绕裂尖至裂纹上缘的一段弧形, 该段弧形半径大于裂尖最大单元的尺寸。此处选取弧形路径是为了计算方便, 针对不同情况例如不同的结构载荷或不同的近似值计算方法, 可以选取任意的积分路径。用该路径上点的位移和应力计算值经坐标转换后代入(19)式计算出 K_I 和 K_{II} 。

在有限元网格的划分和积分路径选取方面, 一般说来, 有限元网格越密计算精确程度越高, 但是在积分路径较为合理的情况下, 这种精度增高的趋势并不明显, 也就是说通过较为稀疏的网格划分与合理的路径选取相结合可以减少有限元计算的工作量。根据裂尖的应力应变场的特性以及计算经验, 在保证结构其他部分计算精度的前提下, 只要积分路径至裂尖的最小尺寸(此处都为圆弧半径)大于在该处的一个网格尺寸, 并且积分路径不过于靠近结构的边界,

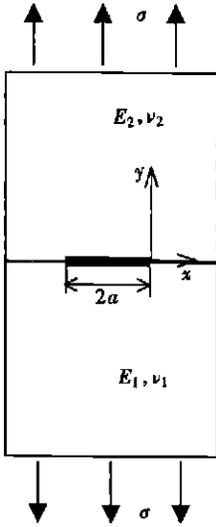


图 2 无限大双材料板中心界面裂纹

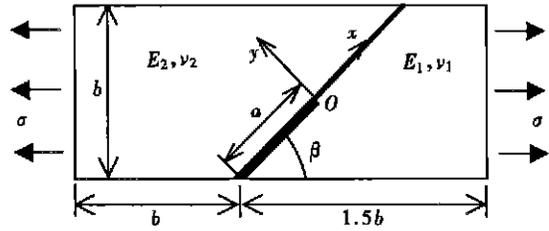


图 3 双材料矩形板单边斜界面裂纹

计算结果都是可以接受的。在本文的计算中,出于构模和计算简便的考虑,一般都选取 ANSYS 中的自动划分网格,并选取圆弧积分路径都能在径向上至少包含一个网格。

3.1 无限大板中心界面裂纹

对于无限大板的情况,本文在有限元构模中,令板的尺寸为裂纹尺寸的 20 倍,近似为无限大板,如图 2 所示, $a = 1 \text{ m}$, $\sigma = 1 \text{ kN/m}^2$, $E_1 = 1 \text{ kN/m}^2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, 计算平面应力状态的情况并且由问题的对称性作了简化。对应于文献[2, 9], 考虑不同的弹性模量比, 列出结果于表 1, 括号外为 $K_I \sqrt{2\pi}/\sigma \sqrt{\pi a}$, 括号内为 $K_{II} \sqrt{2\pi}/\sigma \sqrt{\pi a}$ 。

表 1 无限大双材料板中心界面裂纹应力强度因子

E_2/E_1	本文	文献[9]	解析解 ^[2]
1	1.000	1.009	1.000
3	0.995(-0.074 6)	0.999(-0.082 2)	0.988(-0.072 4)
10	0.973(-0.117 8)	0.981(-0.128 9)	0.968(-0.117 1)
100	0.949(-0.136 2)	0.968(-0.140 1)	0.953(-0.139 1)
100 0	0.945(-0.138 0)	0.957(-0.153 5)	0.952(-0.141 5)

在模型的建立中直接采用较为粗略的常规单元划分,没有采用奇异元与过渡单元等,模型简便,其结果与文献符合得很好。

3.2 双材料矩形板单边斜界面裂纹

本节中对尚未在文献中看到的斜界面裂纹进行分析计算,受均匀拉伸的具有斜的单界面裂纹的矩形板如图 3 所示,按平面应变情况计算。选取不同的双材料界面裂纹的材料常数 R 和裂纹夹角 β 进行计算。其中 $b = 2 \text{ m}$, $\sigma = 1 \text{ N/m}^2$, $E_1 = 2.0 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 。

将常数 R 变形为 $R = (1 + k_1 G_2 / G_1) / (G_2 / G_1 + k_2)$, 当泊松比选取为一定值时, R 的大小取决于弹性模量的比值,其极限区间为 $(\min(k_1, 1/k_2), \max(k_1, 1/k_2))$, 对于本例,选取弹性模量比从 1 到 100, 则 R 取值范围为 $(1, 1.778)$, 选取裂纹夹角分别为 45° 、 60° 和 75° , 令 $F = |K_I| \sqrt{2\pi}/\sigma \sqrt{\pi a}$, 绘制结果如图 4 所示。由曲线可以看出,对于各夹角,随着 R 的增大,复应力强度因子的模随之减小,而 K_{II}/K_I 的值从绝对值上来说则是增大的;对于不同的裂纹夹

角, 这些值随 R 的变化程度有所不同, 总的说来, 裂纹夹角小的情况复应力强度因子的模变化较大, 而 K_{II}/K_I 变化较缓。当 R 等于 1 时, 应力强度因子与单材料的情况一致。受单向拉伸的斜裂纹板本身就产生 I、II 复合型的应力强度因子, 由于材料界面的存在使得剪切效应 K_{II} 增强, 这种增强在裂纹夹角较大, 即趋近于非倾斜裂纹尤为明显, 此时裂纹倾斜所产生的剪切效应不占主导地位; 而当裂纹夹角较小时, 裂纹倾斜本身所致的剪切效应就占据主导地位, 由材料界面引起的剪切所起的作用减小。这说明尽管有裂尖应力振荡奇异性出现, 此 K_I 和 K_{II} 仍然反映拉伸与剪切的现象, 只不过界面的存在加强了 K_{II} 的显示度。

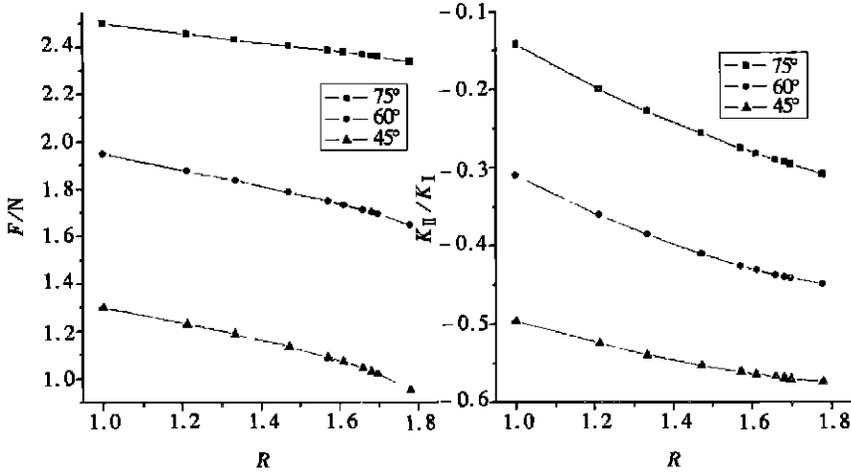


图 4 双材料矩形板单边斜界面裂纹应力强度因子

4 结 论

- 1) 本文对一般界面裂纹平面问题进行了分析, 得到裂尖应力位移场的表达式, 该表达式在应变分量 ϵ 上的连续性是自然满足的, 减少了限制条件;
- 2) 得到对应于不同材料满足半权函数基本条件的两组函数, 对积分路径上的应力位移近似值作加权积分, 推导出应力强度因子 K_I 、 K_{II} 相互独立的表达式;
- 3) 由于裂尖的应力振荡奇异性在方法中被避开, 因此在用诸如有限元等数值方法计算远场解时可以侧重于结构整体的构模, 用粗糙的模型也可获得较精确的结果;
- 4) 由算例具体分析了随着材料常数的变化, K_I 和 K_{II} 的变化情况, 看出尽管有裂尖应力的振荡奇异性存在, K_I 和 K_{II} 仍然可以反映拉伸和剪切的现象;
- 5) 本文采用的方法简单可靠、精度高、实用性强。

[参 考 文 献]

- [1] Williams M L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media[J]. Bull Seismol Soc Amer, 1959, 49(2): 199—204.
- [2] Rice J R, Sih G C. Plane problems of cracks in dissimilar media[J]. J Appl Mech, Trans ASME, Ser E, 1965, 32: 418—423.
- [3] Bueckner H F. Mechanics of Fracture 1[M]. Chapter S, Sih G C Ed. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers, 1973.

- [4] Gao H. Weight function method for interface crack in anisotropic bimetals[J]. *Internat J Fracture*, 1992, **55**(2): 139—158.
- [5] Banks_Sills L. Weight functions for interface cracks[J]. *Int J Fracture*, 1993, **60**(1): 89—95.
- [6] 申连喜, 余寿文. 界面裂纹问题中的权函数方法[J]. *固体力学学报*, 1995, **16**(2): 171—174.
- [7] LIU Chun_tu, ZHANG Duan_zhong. Semi_weight function method in fracture mechanics[J]. *Internat J Fracture*, 1991, **48**: R3—R8.
- [8] HONG Chen_chin, Morris Stern. The computation of stress intensity factors in dissimilar materials [J]. *J Elasticity*, 1978, **8**(1): 21—34.
- [9] 龙驭球. 新型有限元引论[M]. 北京: 清华大学出版社, 1992.
- [10] 杨晓翔, 匡震邦. 求解界面裂纹应力强度因子的围线积分法[J]. *上海力学*, 1996, **17**(1): 10—21.
- [11] 黎在良, 王元汉, 李廷芥. 断裂力学中的边界数值方法[M]. 北京: 地震出版社, 1996.

Semi_Weight Function Method on Computation of Stress Intensity Factors in Dissimilar Materials

MA Kai_ping, LIU Chun_tu

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China)

Abstract: Semi_weight function method is developed to solve the plane problem of two bonded dissimilar materials containing a crack along the bond. From equilibrium equation, stress and strain relationship, conditions of continuity across interface and free crack surface, the stress and displacement fields were obtained. The eigenvalue of these fields is λ . Semi_weight functions were obtained as virtual displacement and stress fields with eigenvalue λ . Integral expression of fracture parameters, K_I and K_{II} , were obtained from reciprocal work theorem with semi_weight functions and approximate displacement and stress values on any integral path around crack tip. The calculation results of applications show that the semi_weight function method is a simple, convenient and high precision calculation method.

Key words: dissimilar material; interface crack; stress intensity factor; semi_weight function method; plane fracture problem