应用数学和力学，第5卷第6期（1984年11月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

# 对弹性理论中临界变分状态的一个注记*

刘 成 群

（重庆大学，1983年8月27日收到）

## 摘 要

最近钱伟长教授指出[1]，在某些情况下，用普通的拉氏乘子法，其待定的拉氏乘子在变分中恒等于零．这称为临界变分状态．在这种临界状态中，我们无法用待定拉氏乘子法把变分的约束条件吸收入泛函，从而解除这个约束条件．例如用拉氏乘子法，从最小余能原理只能导出Hellinger-Reissner 变分原理[2,3]，这个原理中只有应力和位移两类独立变量，而应力应变关系仍然是变分的约束条件．为了消除这个约束条件，钱伟长教授提出了高次拉氏乘子法，即在泛函中引入二次项

$$A_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})$$

来消除应力应变这个约束条件．

本文目的是要证明，如果在泛函中引入如下二次项

$$A_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)$$

我们也可以用高次拉氏乘子法解除应力应变这个变分约束条件．用这种方法，我们不仅可以从Hellinger-Reissner 原理的基础上，找到更一般的广义变分原理．在特殊情况下，这个更一般的广义变分原理，可以还原为各种已知的弹性理论变分原理．同样，我们也可以从Hu-Washizu（胡海昌-鹫津久一郎）变分原理[4,5]，用高次拉氏乘子法，求得比该原理更一般的广义变分原理．

## 一、基 本 关 系 式

考虑弹性理论的小位移问题并引进下列符号：

$\sigma_{ij}$——应力； $a_{ijkl}$——弹性系数；

$e_{ij}$——应变； $b_{ijkl}$——柔性系数；

$u_i$——位移； $F_i$——体积力；

$\bar{p}_i$——在边界 $S_\sigma$ 上的已知面力；

$\bar{u}_i$——在边界 $S_u$ 上的已知位移；

$S=S_\sigma+S_u$

弹性理论小位移静力学问题的基本关系式可以写成

（1） 平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{1.1}$$

其中 $\sigma_{ij,j}\equiv\partial\sigma_{ij}/\partial x_j$，$j$ 为哑标。

---

* 张汝清推荐。

（2） 应力应变关系

$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}\,e_{kl} \qquad (在V内) \tag{1.2a}$$

或

$$e_{ij}=b_{ijkl}\,\sigma_{kl} \qquad (在V内) \tag{1.2b}$$

（3） 应变位移关系

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (在V内) \tag{1.3}$$

（4） 位移已知边界条件

$$u_i=\bar{u}_i \qquad (在 S_u 上) \tag{1.4}$$

（5） 面力已知边界条件

$$\sigma_{ij}\,n_j=\bar{p}_i \qquad (在 S_\sigma 上) \tag{1.5}$$

其中 $n_j$ 为边界外法线的方向余弦。

## 二、从 Hellinger-Reissner 原理导出更一般的广义变分原理

Hellinger-Reissner 变分原理[2,3]为

$$\delta\Pi_{HR}=0 \tag{2.1}$$

$$\Pi_{HR}=\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+F_i)\right\}dV+\iint_{S_u}\bar{u}_i n_j\sigma_{ij}dS+\iint_{S_\sigma}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS \tag{2.2}$$

这是有两类独立变量（$\sigma_{ij}$，$u_i$）的驻值变分原理。应变应力关系

$$e_{ij}=b_{ijkl}\,\sigma_{kl} \tag{2.3}$$

仍然是变分约束条件。钱伟长教授指出[1]，用普通的拉氏乘子法是不可能解除这个约束条件的。因此 Hellinger-Reissner 原理是不完全的广义变分原理。

让我们建立新的泛函

$$\Pi^*_{HR}=\Pi_{HR}+\iiint_V A_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)dV \tag{2.4}$$

其中 $A_{ijkl}$ 为待定拉氏乘子，它有下列对称性

$$A_{ijkl}=A_{klij}=A_{jikl}=A_{ijlk}$$

$\Pi^*_{HR}$ 的驻值条件为

$$\begin{aligned}0=\delta\Pi^*_{HR}=&\iiint_V\left\{-\left[A_{mnkl}b_{mnij}\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)+b_{ijkl}\sigma_{kl}\right]\delta\sigma_{ij}\right.\\&+A_{ijkl}\left(2e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}-b_{klmn}\sigma_{mn}\right)\delta e_{ij}-(\sigma_{ij,j}+F_i)\delta u_i\\&-u_i\delta\sigma_{ij,j}+(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)\delta A_{ijkl}\\&\left.+A_{ijkl}(b_{klmn}\sigma_{mn}-e_{kl})\,\delta u_{i,j}\right\}dV\\&+\iint_{S_u}\bar{u}_i n_j\delta\sigma_{ij}dS+\iint_{S_\sigma}[(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_i+u_i n_j\delta\sigma_{ij}]dS\end{aligned} \tag{2.5}$$

利用高斯-奥斯特洛格拉德斯基公式，我们有

$$\iiint_V u_i\delta\sigma_{ij,j}dV=\iint_{S_u+S_\sigma}u_in_j\delta\sigma_{ij}dS-\iiint_V\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\delta\sigma_{ij}dV \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}\iiint_V A_{ijkl}\left(b_{klmn}\sigma_{mn}-e_{kl}\right)\delta u_{i,j}dV=&\iint_{S_u+S_\sigma}A_{ijkl}(b_{klmn}\sigma_{mn}-e_{kl})n_j\delta u_i dS\\&-\iiint_V[A_{ijkl}(b_{klmn}\sigma_{mn}-e_{kl})]_{,j}\delta u_i dV\end{aligned} \tag{2.7}$$

将(2.6)、(2.7)代入(2.5)，得

$$\begin{aligned}\delta\Pi^*_{HR}=&\iiint_V\Big\{-\Big[A_{mnkl}b_{mnij}\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)\\&+b_{ijkl}\sigma_{kl}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big]\delta\sigma_{ij}\\&+A_{ijkl}\Big[\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)+\left(e_{kl}-b_{klmn}\sigma_{mn}\right)\Big]\delta e_{ij}\\&+(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)\delta A_{ijkl}\\&+[(A_{ijkl}(e_{kl}-b_{klmn}\sigma_{mn}))_{,j}-(\sigma_{ij,j}+F_i)]\delta u_i\Big\}dV\\&-\iint_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS-\iint_{S_u}A_{ijkl}(e_{kl}-b_{klmn}\sigma_{mn})n_j\delta u_i dS\\&+\iint_{S_\sigma}[(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)-A_{ijkl}(e_{kl}-b_{klmn}\sigma_{mn})n_j]\delta u_i dS=0\end{aligned} \tag{2.8}$$

由于 $V$ 中的 $\delta\sigma_{ij}$，$\delta e_{ij}$，$\delta u_i$，$\delta A_{ijkl}$，$S_u$ 中的 $n_j\delta\sigma_{ij}$，$\delta u_i$，$n_j\delta u_i$ 以及 $S_\sigma$ 中的 $\delta u_i$ 都是独立变分，所以其系数都应等于零．于是从（2.8）我们得下列 7 个方程：

在 $V$ 中，有

（1） $A_{mnkl}b_{mnij}\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)+b_{ijkl}\sigma_{kl}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0$ (2.9a)

（2） $A_{ijkl}\left[\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)+(e_{kl}-b_{klmn}\sigma_{mn})\right]=0$ (2.9b)

（3） $(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)=0$ (2.9c)

（4） $[A_{ijkl}(e_{kl}-b_{klmn}\sigma_{mn})]_{,j}-(\sigma_{ij,j}+F_i)=0$ (2.9d)

在 $S_u$ 上，有

（5） $u_i-\bar{u}_i=0$ (2.10a)

（6） $A_{ijkl}(e_{kl}-b_{klmn}\sigma_{mn})=0$ (2.10b)

在 $S_\sigma$ 上，有

（7） $A_{ijkl}(e_{kl}-b_{klmn}\sigma_{mn})n_j-(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)=0$ (2.11)

由（2.9c）可知，在 $V$ 中

$$e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn}=0 \qquad (\text{在}V\text{中}) \tag{2.12a}$$

或

$$e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}=0 \qquad (\text{在}V\text{中}) \tag{2.12b}$$

如果（2.12a）为真，则代入（2.9d）得

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0 \qquad (\text{在}V\text{中}) \tag{2.13}$$

再将（2.12a）代入(2.11)，得

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0 \qquad (\text{在}\ S_\sigma\ \text{上}) \tag{2.14}$$

此外由（2.10）得

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (\text{在}\ S_u\ \text{上}) \tag{2.15}$$

式(2.13)～(2.15)是原弹性理论中的平衡方程和边界条件．将（2.12a）代入（2.9b）即得应变位移关系

$$e_{kl}-\frac{1}{2}(u_{k,l}-u_{l,k})=0 \tag{2.16}$$

同样，如果（2.12b）为真，我们亦可推出关系式（2.12a）及(2.13)～(2.15)．总之，由 $\delta\Pi^*_{HR}=0$（驻值）可以得到原弹性理论中静力学问题的所有关系式（1.1）～（1.5），而 $A_{ijkl}$ 未定（可以是 $x_i$ 的任意函数）$\neq 0$．

所以，(2.4)式亦为一种新的三类变量的更一般的广义变分原理的泛函，其中 $A_{ijkl}$ 为拉氏乘子．当然，当 $A_{ijkl}=0$时，它就还原为二类变量的 Hellinger-Reissner 原理的泛函．

如果我们按下列特殊关系来确定 $A_{ijkl}$，即

$$A_{ijkl}\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)=\frac{\lambda}{2}a_{ijkl}(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq}) \tag{2.17}$$

其中 $\lambda$ 为任意标量函数，$a_{ijkl}$ 为弹性常数，则

$$\begin{aligned}
&A_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)\\
&=\frac{1}{2}\lambda a_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})\\
&=\frac{1}{2}\lambda(a_{ijkl}e_{ij}-\sigma_{kl})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})\\
&=\lambda\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-e_{ij}\sigma_{ij}\right)
\end{aligned} \tag{2.18}$$

将(2.18)代入(2.4)，于是 $\delta\Pi^*_{HR}=0$ 可以化为

$$\delta\Pi^*_{HR}\Big|_\lambda=0 \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\Pi^*_{HR}\Big|_\lambda=&\iiint_V\Big\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+F_i)\\
&+\lambda\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-e_{ij}\sigma_{ij}\right)\Big\}dV\\
&+\iint_{S_u}\bar{u}_i n_j\sigma_{ij}dS+\iint_{S_\sigma}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS
\end{aligned} \tag{2.20}$$

我们可以看到，当 $\lambda$ 取下列各值时，上述变分原理还原为已知的广义变分原理：

（1） 当 $\lambda=1$时，还原为“广义余能原理”

$$\delta\Pi_{GC}=0 \tag{2.21}$$

$$\Pi_{GG}=\iiint_V\left\{-e_{ij}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+F_i)\right\}dV$$

$$+\iint_{S_u}\bar{u}_i n_j\sigma_{ij}dS+\iint_{S_\sigma}u_i(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)dS \tag{2.22}$$

（2） 当 $\lambda=\frac{1}{2}$时，还原为梁国平-傅子智的广义变分原理[6]

$$\delta\Pi_{LF}=0 \tag{2.23}$$

$$\Pi_{LF}=\iiint_V\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\left(e_{ij}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}\right)\right.$$

$$\left.-u_i(\sigma_{ij,j}+F_i)\right\}dV$$

$$+\iint_{S_u}\bar{u}_i n_j\sigma_{ij}dS+\iint_{S_\sigma}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS \tag{2.24}$$

（3） 当$\lambda=0$时，还原为 Hellinger-Reissner 不完全广义变分原理(2.1)、(2.2)。

## 三、从 Hu-Washizu 原理导出更一般的广义变分原理

Hu-Washizu 广义变分原理为[4,8]

$$\delta\Pi_{HW}=0 \tag{3.1}$$

$$\Pi_{HW}=\iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-u_iF_i\right\}dV$$

$$-\iint_{S_\sigma}\bar{p}_i u_i dS-\iint_{S_u}n_j\sigma_{ij}(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{3.2}$$

让我们建立如下新泛函：

$$\Pi^*_{HW}=\Pi_{HW}+\iiint_V B_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)dV \tag{3.3}$$

其中 $B_{ijkl}$ 为待定拉氏乘子，是任意的，它有如下对称性

$$B_{ijkl}=B_{klij}=B_{jikl}=B_{ijlk} \tag{3.4}$$

对(3.3)式求变分并利用高斯积分公式，可将$\Pi^*_{HW}$ 的驻值条件写成

$$0=\delta\Pi^*_{HW}$$

$$=\iiint_V\left\{\left[a_{ijkl}e_{kl}-\sigma_{ij}+B_{ijkl}\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)+B_{ijkl}(e_{kl}-b_{klmn}\sigma_{mn})\right]\delta e_{ij}\right.$$

$$-\left[\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)+B_{mnkl}b_{mnij}\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)\right]\delta\sigma_{ij}$$

$$-[(\sigma_{ij,j}+F_i)-(B_{ijkl}e_{kl})_{,j}+(B_{ijkl}b_{klmn}\sigma_{mn})_{,j}]\delta u_i$$

$$\left.+(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)\delta B_{ijkl}\right\}dV$$

$$+\iint_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_i dS+\iint_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS$$

$$+\iint_{S_u+S_\sigma}B_{ijkl}(b_{klmn}\sigma_{mn}-e_{kl})n_j\delta u_i dS \tag{3.5}$$

由各变分的独立性，我们得到下列7个方程：

在$V$中，有

(1) $a_{ijkl}e_{kl}-\sigma_{ij}+B_{ijkl}\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)+B_{ijkl}(e_{kl}-b_{klmn}\sigma_{mn})=0$ (3.6a)

(2) $\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)+B_{mnkl}b_{mnij}\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)=0$ (3.6b)

(3) $\sigma_{ij,j}+F_i+[B_{ijkl}(b_{klmn}\sigma_{mn}-e_{kl})]_{,j}=0$ (3.6c)

(4) $(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)=0$ (3.6d)

在$S_\sigma$上，有

(5) $\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0$ (3.7)

在$S_u$上，有

(6) $u_i-\bar{u}_i=0$ (3.8)

在$S=S_u+S_\sigma$上，有

(7) $B_{ijkl}(b_{klmn}\sigma_{mn}-e_{kl})n_j=0$ (3.9)

由此我们也可以得到原弹性理论小位移静力学问题的各种关系(1.1)～(1.5)，而$B_{ijkl}$未定(可以是$x_i$的任意函数)$\neq0$。所以，$\delta\Pi^*_{HW}=0$是更一般的广义变分原理。

如果我们按下列特殊关系来确定$B_{ijkl}$，即

$$B_{ijkl}\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)=\frac{\lambda'}{2}a_{ijkl}(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq}) \tag{3.10}$$

其中$\lambda'$为又一任意标量函数，$a_{ijkl}$为弹性常数．于是变分原理$\delta\Pi^*_{HW}=0$可以化为

$$\delta\Pi^*_{HW}\Big|_{\lambda'}=0 \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\Pi^*_{HW}\Big|_{\lambda'}=&\iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\lambda'\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-e_{ij}\sigma_{ij}\right)\right.\\&\left.-\sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)-F_iu_i\right\}dV\\&-\iint_{S_\sigma}\bar{p}_iu_i\,dS-\iint_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)n_j\sigma_{ij}\,dS\end{aligned} \tag{3.12}$$

我们很容易证明

(1) 当$\lambda'=0$时，上述变分原理还原为已知的Hu-Washizu广义变分原理；

(2) 当$\lambda'=-1$时，上述变分原理还原为已知的Hellinger-Reissner不完全广义变分原理；

(3) 当$\lambda'=-\frac{1}{2}$时，上述变分原理还原为已知的梁国平-傅子智原理。

## 参 考 文 献


[1] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，4，2(1983)，137—150.

[2] Hellinger, E., Der Allgemeine Ansatz der Meshanik der Kontinua, *Encyclopadia der Mathematishen Wissenshaften*, 4, 4 (1914), 602—694.

[3] Reissner, E., On a variational theorem in elasticity, *Journal of Mathematics and Physics*, 29, 2 (1950), 90—95.

[4] 胡海昌，弹塑性理论中的一些变分原理，中国科学，4，1 (1955)，33—54.

[5] Washizu, K., On the variational principles of elasticity and plasticity, Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Massachusettes Institute of Technology, Technical Report 25—18, (1955).

[6] 梁国平、傅子智，混合杂交罚函数有限元法及其应用，在大连举行的国际混合杂交元研究讨论班上的报告 (1982, 8), 11—28.


# Note on the Critical Variational State in Elasticity Theory


Liu Cheng-qun

(*Chongqing University, Chongqing*)



**Abstract**

Recently Prof. Chien Wei-zang[1] pointed out that in certain cases, by means of ordinary Lagrange multiplier method, some of undetermined Lagrange multipliers may turn out to be zero during variation. This is a critical state of variation. In this critical state, the corresponding variational constraint can not be eliminated by means of simple Lagrange multiplier method. This is indeed the case when one tries to eliminate the constraint condition of stress-strain relation in variational principle of minimum complementary energy by the method of Lagrange multiplier. By means of Lagrange multiplier method, one can only derive, from minimum complementary energy principle, the Hellinger-Reissner principle[2,3], in which only two types of independent variables, stresses and displacements, exist in the new functional. Hence Prof. Chien Wei-zang introduced the high-order Lagrange multiplier method by adding the quadratic terms

$$A_{ijkl}\,(e_{ij}-b_{ijmn}\,\sigma_{mn})\,(e_{kl}-b_{klpq}\,\sigma_{pq})$$

to the original functionals.

The purpose of this paper is to show that by adding the quadratic terms

$$A_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\,\sigma_{mn})\left(e_{kl}-\frac{1}{2}u_{k,l}-\frac{1}{2}u_{l,k}\right)$$

to original functionals one can also eliminate the constraint condition of strain-stress by the high-order Lagrange multiplier method. With this method, we find more general form of generalized variational principle ever known to us from Hellinger-Reissner principle. In particular, this more general form of functional can be reduced into all known functionals of existing generalized variational principles in elasticity. Similarly, we can also find more general form of functional by Hu-Washizu principle[4,5].