应用数学和力学，第5卷第5期（1984年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

奇异摄动问题的加权差分方法

吴 启 光

（南京大学，1983年12月29日收到）

摘 要

本文对一阶导数引进了新的差分逼近，给出了一族一致收敛的差分格式.

一、引 言

考虑两点边值问题

$$\left.\begin{array}{l} L_\varepsilon u\equiv-\varepsilon u''(x)+p(x)u'(x)=f(x) \qquad (0<x<1) \\ u(0)=A,\ u(1)=B \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

其中$0<\alpha<p(x)<\beta$，$\varepsilon>0$是小参数．当$\varepsilon=0$时方程(1.1)退化为：

$$L_0 v\equiv p(x)v'(x)=f(x) \tag{1.2}$$

相应的边界条件为

$$v(0)=A \tag{1.3}$$

退化问题在$x=1$处失去一个边界条件，因而解u对于小的ε在$x=1$处出现边界层．

本文对一阶导数u'引进新的差分逼近

$$u_{\bar{x}}=\frac{(1+\theta)(u_{i+1}-u_i)+(1-\theta)(u_i-u_{i-1})}{2h} \tag{1.4}$$

其中θ是非零参数．

若参数θ满足下列条件：

$$\frac{2\varepsilon}{p_i h}-\frac{2\varepsilon}{\alpha h}-1<\theta\leqslant\frac{2\varepsilon}{p_i h}-1 \qquad (1\leqslant i\leqslant N-1)$$

则可得关于ε一致成立的离散化误差的界．

二、一 些 引 理

考虑下列问题

$$\left.\begin{array}{l} Lu=g(x,\varepsilon) \\ u(0)=A,\ u(1)=B \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

其中g满足

$$|g^{(i)}(x,\varepsilon)|\leqslant k\{1+\varepsilon^{-i-1}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(1-x)]\} \tag{2.2}$$

如果对于 $0\leqslant i\leqslant j$(2.2)式总成立，则称g为(k,j)类函数.

引理1 若g是(k,j)类函数，则(2.1)的解u满足

$$|u_{(x)}^{(i)}|\leqslant c\{1+\varepsilon^{-i}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(1-x)]\} \qquad (0\leqslant i\leqslant j+1) \tag{2.3}$$

其中$c>0$是与ε无关的常数.

证明：见[1].

引理2 若u满足(1.1)，则

$$u(x)=r\exp[-p(1)\varepsilon^{-1}(1-x)]+z(x) \tag{2.4}$$

其中$|r|\leqslant c_1$，且

$$|z^{(i)}(x)|\leqslant c_2\{1+\varepsilon^{-i+1}\exp[-\alpha\varepsilon^{-1}(1-x)]\} \tag{2.5}$$

$c_1>0$和$c_2>0$与ε无关.

证明：见[1].

利用通常的差商记号

$$\left.\begin{aligned} &D_+u_i=\frac{u_{i+1}-u_i}{h}, \quad D_-u_i=\frac{u_i-u_{i-1}}{h} \\ &D_0u_i=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}, \quad D_+D_-u_i=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

用

$$L_hu_i\equiv-\varepsilon D_+D_-u_i+p_i\frac{(1+\theta)}{2}D_+u_i+p_i\frac{(1-\theta)}{2}D_-u_i \tag{2.7}$$

定义我们的差分算子.

引理3 若θ满足下列条件：

$$\theta\leqslant\frac{2\varepsilon}{p_ih}-1 \qquad (1\leqslant i\leqslant N-1) \tag{2.8}$$

则系数矩阵是一个不可约的M矩阵，且有正的逆.

证明：$L_hu_i=f_i$ $(1\leqslant i\leqslant N-1)$ 表示具有未知量 u_i $(1\leqslant i\leqslant N-1)$的方程组. 易知系数矩阵是三对角的，非对角线元素非正的优对角矩阵，因此矩阵是不可约的M矩阵，所以有正的逆.（参阅[2]）

不难验证

引理4 若 $u_0\leqslant v_0$，$u_N\leqslant v_N$，$L_hu_i\leqslant L_hv_i(1\leqslant i\leqslant N-1)$

则 $u_i\leqslant v_i \qquad (1\leqslant i\leqslant N-1)$

引理5 若 $z_i=(1+x_i) \qquad (0\leqslant i\leqslant N)$

则 $L_hz_i\geqslant\alpha$

证明：

$\because$

$$\begin{aligned} L_hz_i&=L_h(1+x_i) \\ &=-\varepsilon h^{-2}\ (x_{i+1}-2x_i+x_{i-1})+p_i\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{2h} \end{aligned}$$

$$+\frac{p_i}{2h}\theta(x_{i+1}-2x_i+x_{i-1})=p_i\geqslant\alpha$$

引理6　存在一个仅依赖于$p(x)$的常数$M>0$使得

$$|R_i|\leqslant M\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\{\varepsilon|u^{(3)}(s)|+|u^{(2)}(s)|\}ds \tag{2.9}$$

其中　$R_i=L_hu(x_i)-Lu(x_i)$，M是不依赖于ε的常数。

证明：因为

$$u(x+h)=u(x)+hu'(x)+\int_x^{x+h}u''(s)(x+h-s)\,ds \tag{2.10}$$

$$u(x-h)=u(x)-hu'(x)+\int_x^{x-h}u''(s)(x-h-s)ds \tag{2.11}$$

则

$$\left|\frac{(1+\theta)}{2}D_+u(x_i)+\frac{(1-\theta)}{2}D_-u(x_i)-\frac{(1+\theta)}{2}u'(x_i)-\frac{(1-\theta)}{2}u'(x_i)\right|$$

$$\leqslant\frac{(1+\theta)}{2h}(x_i+h-x_i)\int_{x_i}^{x_i+h}|u''(s)|ds+\frac{(1-\theta)}{2h}(x_i+h-x_i)\int_{x_i-h}^{x_i}|u''(s)|ds$$

$$\leqslant\int_{x_i-h}^{x_i+h}|u''(s)|ds \tag{2.12}$$

$$|D_+D_-u(x_i)-u''(x_i)|\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}|u^{(3)}(s)|ds \tag{2.13}$$

因此

$$|R_i|\leqslant M\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\{\varepsilon|u^{(3)}(s)|+|u^{(2)}(s)|\}ds$$

引理7　若参数θ满足

$$\theta>\frac{2\varepsilon}{p_ih}-\frac{2\varepsilon}{\alpha h}-1\qquad(1\leqslant i\leqslant N-1) \tag{2.14}$$

则存在一个常数$M>0$使得

$$L_h\left(1+\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)^{-(N-i)}\geqslant\frac{M}{\max(h,\varepsilon)}\left(1+\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)^{-(N-i)} \tag{2.15}$$

证明：

令

$$t=1+\frac{\alpha h}{\varepsilon} \tag{2.16}$$

则

$$L_h\left(1+\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)^i=L_ht^i=-\frac{\varepsilon}{h^2}t^{i-1}(t-1)^2+p_i\frac{(1+\theta)}{2h}t^i(t-1)$$

$$+p_i\frac{(1-\theta)}{2h}t^{i-1}(t-1)$$

$$=h^{-1}t^{i-1}(t-1)\left\{p_i\frac{(1+\theta)}{2}t+p_i\frac{(1-\theta)}{2}-\frac{\varepsilon}{h}(t-1)\right\}$$

$$=h^{-1}t^{i-1}(t-1)\left\{p_i\frac{(t+1)}{2}+\frac{p_i}{2}\theta(t-1)-\alpha\right\} \tag{2.17}$$

若$h\geqslant\varepsilon$则存在一个常数c_1使得

$$t-1\geqslant c_1 t \tag{2.18}$$

所以

$$L_h t^i\geqslant Mh^{-1}t^i \tag{2.19}$$

若 $h\leqslant\varepsilon$，因为$t-1=\frac{\alpha h}{\varepsilon}$我们有

$$\begin{aligned}L_h t^i&=h^{-1}t^{i-1}(t-1)\left\{p_i\frac{(1+t)}{2}+\frac{p_i}{2}\theta(t-1)-\alpha\right\}\\&=t^{i-1}\frac{\alpha}{\varepsilon}\left\{p_i\frac{(1+t)}{2}+\frac{p_i}{2}\theta(t-1)-\alpha\right\}\\&=t^i\frac{\alpha}{\alpha h+\varepsilon}\left\{p_i\frac{(1+t)}{2}+p_i\frac{\theta}{2}(t-1)-\alpha\right\}\\&\geqslant M\varepsilon^{-1}t^i\end{aligned} \tag{2.20}$$

所以对于一切$\varepsilon>0$我们有

$$L_h\left(1+\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)^{-(N-i)}\geqslant\frac{M}{\max(h,\varepsilon)}\left(1+\frac{\alpha h}{\varepsilon}\right)^{-(N-i)}$$

三、误 差 估 计

利用引理1，2，6，7和引理4.1（见[1]）我们可证下列定理。

定理 若参数θ满足下列条件：

$$\frac{2\varepsilon}{p_i h}-\frac{2\varepsilon}{\alpha h}-1<\theta\leqslant\frac{2\varepsilon}{p_i h}-1 \qquad (1\leqslant i\leqslant N-1) \tag{3.1}$$

则存在与h，ε无关的常数$M>0$使得

$$|u(x_i)-u_i^h|\leqslant Mh\{1+\varepsilon^{-1}\exp[-\bar{\alpha}\varepsilon^{-1}(1-x_i)]\} \qquad (h\leqslant\varepsilon) \tag{3.2}$$

$$|u(x_i)-u_i^h|\leqslant M\{h+\exp[-\alpha(1-x_i)/(\alpha h+\varepsilon)]\} \qquad (h\geqslant\varepsilon) \tag{3.3}$$

其中$\bar{\alpha}\in(0,\alpha)$是仅依赖于$\alpha$的常数。

证明：

首先假设$h\leqslant\varepsilon$。利用引理6和引理1得到

$$\begin{aligned}|R_i|&\leqslant M\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\{\varepsilon|u^{(3)}(s)|+|u^{(2)}(s)|\}ds\\&\leqslant M\{\varepsilon^{-2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\exp[-\varepsilon^{-1}\alpha(1-t)]dt+h\}\\&\leqslant M\varepsilon^{-1}\sinh(\alpha h\varepsilon^{-1})\exp[-\varepsilon^{-1}\alpha(1-x_i)]+Mh\end{aligned} \tag{3.4}$$

因为当y有界时$\sinh y\leqslant cy$，利用[1]中的引理4.1(a)得到

$$|R_i|\leqslant Mh\{\varepsilon^{-2}r_3^{-(N-i)}+1\}\leqslant Mh\{\varepsilon^{-2}t^{-(N-i)}+1\} \tag{3.5}$$

利用引理5，7和引理4得到

$$|u(x_i)-u_i^h|\leqslant Mh\{\varepsilon^{-1}t^{-(N-i)}+1\} \tag{3.6}$$

由[1]中的引理4.1(c)可得要证的不等式.

其次，处理$h\geqslant\varepsilon$的情形，利用分解式

$$u=rv+z,\quad u_i^h=rv_i^h+z_i^h \tag{3.7}$$

我们有

$$|u(x_i)-u_i^h|\leqslant M\{|v(x_i)-v_i^h|+|z(x_i)-z_i^h|\} \tag{3.8}$$

利用引理6和引理2得到

$$|L_h(z(x_i)-z_i^h)|=|L_hz(x_i)-Lz(x_i)|$$

$$\leqslant M\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\{\varepsilon|z^{(3)}(s)|+|z^{(2)}(s)|\}ds$$

$$\leqslant M\sinh(\alpha h\varepsilon^{-1})\exp[-\varepsilon^{-1}\alpha(1-x_i)]+Mh \tag{3.9}$$

因为当$y\geqslant c_1$时$\sinh y\leqslant ce^y$利用[1]中的引理4.1(a)有

$$|L_h(z(x_i)-z_i^h)|\leqslant Mr_3^{-(N-(i+1))}+Mh\leqslant Mtt^{-(N-i)}+Mh \tag{3.10}$$

因此，由引理5,7和引理4得到

$$|z(x_i)-z_i^h|\leqslant Mht^{-(N-(i+1))}+Mh\leqslant Mh \tag{3.11}$$

由$v(x)$的定义易知

$$|Lv(x)|\leqslant M\varepsilon^{-1}v(x) \tag{3.12}$$

因为

$$v(x_i)\leqslant r_3^{-(N-i)} \tag{3.13}$$

故有

$$|L_hv_i^h|=|Lv(x_i)|\leqslant M\varepsilon^{-1}r_3^{-(N-i)}\leqslant Mh^{-1}t^{-(N-i)} \tag{3.14}$$

这里我们利用了[1]中引理4.1(a)当$k=1$时的结论. 因此，由引理7和引理4

$$|v_i^h|\leqslant Mt^{-(N-i)} \tag{3.15}$$

所以

$$|v(x_i)-v_i^h|\leqslant|v(x_i)|+|v_i^h|\leqslant Mt^{-(N-i)}\qquad(1\leqslant i\leqslant N-1) \tag{3.16}$$

利用[1]中的引理4.1(b)立即得到要证明的不等式.

参 考 文 献

[1] Kellogg, R. Bruce and Alice Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problem without turning points, *Math. Comp.*, 32, 144 (1978), 1025—1039.

[2] Varga. R. S., *Matrix Iterative Analysis* (1962).

[3] Hemker, P. W., *A Numerical Study of stiff Two-Point Boundary Problems* (1977).

The Method of Weighted Difference for Singular Perturbation Problem

Wu Chi-kuang

(Nanjing University, Nanjing)

Abstract

In this paper, we introduce a new difference approximation to the first order derivative u and give a class of uniformly convergent difference schemes.