

# Jacobi因子在稳定性理论中的应用

李 骊

(天津大学, 1982年3月19日收到)

## 摘 要

本文利用 Jacobi 因子的性质, 得出一些有关定常系统、非定常系统以及极限环的不稳定定理。

## 一、若干基本定义

给定方程

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

假定  $X_i$  在某一闭域  $R$  内连续并有连续的偏导数。显然, 在此情况下, (1.1) 的解存在、唯一。而与 (1.1) 相应的 Jacobi 因子  $\mu$ , 则由下式所定义<sup>[1]</sup>:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1.2)$$

并且, 在上述假定下, 函数  $\mu$  是存在的<sup>[2]</sup>。

现说明函数  $\mu$  的意义。在初瞬时  $t_0$ , 任给域  $G_0 \subset R$ , 则此域将沿 (1.1) 之轨线在瞬时  $t$  到达域  $G_t$ :  $G_t = f(G_0, t_0, t)$ 。定义积分:

$$M(t) = \iiint_{(G_t)} \mu(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1.3)$$

正如[1]中所证, 如将满足(1.2)之 $\mu$ 代入上式, 则上述积分将保持为常数。因而, 依照 Poincaré, 我们称(1.3)为(1.1)的 $n$ 阶积分不变量。由于, 从流体力学观点来看, (1.3)相当于占据域  $G_t$  的流体的质量而  $\mu$  相当于该域内流体的密度, 所以, Jacobi 因子也称为积分不变量的密度。此外, 我们在下面将进一步证明, 函数  $\mu$  实质上也是(1.1)之轨线密度的一种测度, 因而, 为了更清楚起见, 我们以下称函数  $\mu$  为轨线密度函数。

方程(1.2)也可改写为

$$\left. \frac{d\mu}{dt} \right|_{(1.1)} + \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot \mu = 0 \quad (1.4)$$

其中  $\left. \frac{d\mu}{dt} \right|_{(1.1)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mu}{\partial x_i} X_i$ , 乃  $\mu$  沿方程(1.1)之轨线的导数,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$ , 乃方程(1.1)

右端速度矢量  $\mathbf{v} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  的散度。

设(1.1)的通积分为 $\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ , 在 $\operatorname{div} v \neq 0$ 情况下, 它与 $\mu$ 是不同的. 但是, 如果 $\operatorname{div} v$ 在某一域内为有界, 那么, 用[3]中同样的方法可以证明, 满足 $\phi=0$  ( $\phi=\infty$ )的流形将与满足 $\mu=0$  ( $\mu=\infty$ )的流形相互重合. 如果, 我们称由 $\mu=0$  ( $\mu=\infty$ )所定义的曲面为 $\mu$ 的零值(极值)密度曲面, 称由 $\phi=0$  ( $\phi=\infty$ )所定义的积分曲面为(1.1)的零值(极值)积分曲面, 如上所述, 可得:

**引理 1** 方程(1.1)的零值或极值积分曲面, 与 $\mu$ 的零值或极值密度曲面相互重合.

现引入积分

$$I = \int_{(V)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x_i} \right) dV \quad (1.5)$$

其中 $V$ 为 $n$ 维欧氏空间中的某一区域, 如该区域的边界为闭曲面 $S$ , 则由Green公式, 得

$$I = \int_{(S)} \mu v_n dS \quad (1.6)$$

其中 $v_n$ 为(1.1)之速度矢量沿面积元 $dS$ 外法线方向的投影. 我们称 $I$ 为(1.1)穿过 $S$ 的轨线流量.

取由(1.1)之一族轨线所组成的一段流管(图1). 对此段流管所围成的区域 $V$ , 我们有

$$I = \int_{(V)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x_i} \right) dV = \int_{(S)} \mu v_n dS = \int_{(S_1)} \mu v_n dS + \int_{(S_2)} \mu v_n dS + \int_{(S_3)} \mu v_n dS \quad (1.7)$$

由于 $V$ 内无(1.1)之奇点, 故有 $\int_{(V)} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x_i} \right) dV = 0$ . 又在 $S_3$ 上有 $v_n = 0$ , 故

$\int_{(S_3)} \mu v_n dS = 0$ . 此外, 设 $v_n$ 在 $S_1$ 与 $S_2$ 处之值分别为 $v_{1n}$ 与 $v_{2n}$ . 据此, 上式可化为

$$\int_{(S_1)} \mu v_{1n} dS + \int_{(S_2)} \mu v_{2n} dS = 0 \quad (1.8)$$

又由图知,  $v_{1n} < 0$ ,  $v_{2n} > 0$ , 因而 $v_{1n} = -|v_{1n}|$ ,  $v_{2n} = |v_{2n}|$ , 从而, 上式又可化为

$$\int_{(S_1)} \mu |v_{1n}| dS = \int_{(S_2)} \mu |v_{2n}| dS \quad (1.9)$$

注意上式左端乃由 $S_1$ 流入的轨线流量, 右端乃由 $S_2$ 流出的轨线流量, 如是得

**引理 2** 对于(1.1)的一段流管而言, 由一端流入的轨线流量与由另一端流出的轨线流量二者相等.

设在 $S_1$ 处 $\mu$ 之值为 $\mu_1$ , 在 $S_2$ 处 $\mu$ 之值为 $\mu_2$ . 由(1.9)不难看出, 如 $v_{1n}$ 与 $v_{2n}$ 相差不大, 那么,  $\mu_2$ 与 $\mu_1$ 之比, 将和 $S_2$ 与 $S_1$ 的面积成反比. 这表明, 截面面积越小的地方,  $\mu$ 之值将越大, 亦即轨线越稠密. 由此可见,  $\mu$ 可以作为(1.1)之轨线密度的一种测度. 我们所以称 $\mu$ 为(1.1)的轨线密度函数, 其理由即在此.

由上所述不难得出:

**引理 3** 如方程(1.1)有一族轨线当 $t \rightarrow \infty$  (或 $t \rightarrow -\infty$ )时趋向原点, 则原点必为 $\mu$ 的极点.

下面, 我们将利用 $\mu$ 的这些性质, 来推出一些有关定常系统、非定常系统以及极限环的

不稳定定理.

## 二、关于定常系统的一个不稳定定理

**定理 1** 如原点为方程(1.1)的平衡位置且在原点邻域内  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  为定正函数, 则原点必为不稳定.

证: 由(1.4)知, 沿(1.1)之轨线, 有

$$\mu = \mu_0 \exp \left[ - \int_{t_0}^t \operatorname{div} \mathbf{v} dt \right] \quad (2.1)$$

由于在原点邻域内  $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$ , 故知沿(1.1)之轨线,  $\mu$  的绝对值将减小.

先设  $\mu$  为正号函数 (即在原点的邻域内, 除原点外, 均有  $\mu > 0$ , 而在原点处,  $\mu$  或者等于零, 或者大于零). 我们首先证明, 此时原点不可能为  $\mu$  的零点. 如其不然, 设原点为  $\mu$  的零点. 如上所述, 由于沿(1.1)之轨线  $\mu$  的绝对值将减小, 且当  $t \rightarrow \infty$  时  $\mu \rightarrow 0$ , 故由原点邻域内任一点出发的轨线, 当  $t \rightarrow \infty$  时必趋向原点. 但由引理 3, 此时原点应为  $\mu$  的极点, 于是得出矛盾. 这一矛盾表明, 原点只可能是  $\mu$  的常点或极点. 我们先设原点是  $\mu$  的极点. 上面已说过, 沿(1.1)之轨线  $\mu$  的绝对值将减小, 且当  $t \rightarrow \infty$  时  $\mu \rightarrow 0$ , 故由原点邻域内任一点出发的轨线, 当  $t \rightarrow \infty$  时必然离开此邻域, 这就表明, 原点是不稳定的. 下面我们再设原点是  $\mu$  的常点, 即在原点  $\mu$  取大于零的有限值. 此时又可分为两种情况, 一种是在原点  $\mu$  取极小值, 一种是在原点  $\mu$  取非极小值. 对于前一种情况, 我们将如同零点那样证明它为不可能, 对于后一种情况, 我们将如同极点那样证明原点为不稳定.

对于  $\mu$  为负号函数, 其证明与上述完全相同.

最后设  $\mu$  为变号函数. 由于  $\mu$  之二相邻异号区域的分界面必为  $\mu$  的零值或极值密度曲面, 由引理 1, 这些曲面又必与(1.1)之零值或极值积分曲面相重合, 此外, 我们已设(1.1)满足解的惟一性条件, 故知由  $\mu$  的正号或负号区域内任一点出发的轨线, 必始终停留在此区域之内. 然后, 用上述相同的方法, 即可证明原点为不稳定.

对于  $\mu$  为常号函数的情况, 其证明与变号函数同.

总之, 不论  $\mu$  为何种函数, 我们都有: 1. 由  $\mu$  之正号或负号区域内任一点出发的轨线, 将始终停留在此区域之内; 2. 无论是在  $\mu$  之正号区域还是在  $\mu$  的负号区域,  $\mu$  在原点均取非极小值; 3. 由于在原点邻域内沿(1.1)之轨线  $\mu$  的绝对值将减小, 因此, 由  $|\mu| < |\mu_0|$  ( $|\mu_0|$  为  $\mu$  在原点的绝对值) 区域出发的轨线中, 必有这样的轨线, 它最终将走出原点某一邻域之外, 这表明, 原点是不稳定的. 如是, 定理得以证明.

**例 1**

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \text{高次项} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (A)$$

其中  $a_{ij}$  为常数. 由于  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \text{高次项}$ , 因而, 如  $\sum_{i=1}^n a_{ii} > 0$ , 则在原点充分小邻域内, 必有  $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$ , 按照上述定理, 知原点为不稳定.

注意  $\sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ , 其中  $\lambda_i$  为系数矩阵  $\{a_{ij}\}$  的特征根. 因而由  $\sum_{i=1}^n a_{ii} > 0$  可得  $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$ ,

这表明, 在诸 $\lambda_i$ 之中, 至少有一个实部大于零. 所以, 由本定理所得之结论, 与由一次近似理论所得之结果是一致的.

例 2

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 \left( \frac{1}{3} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 \right) + \text{高次项} \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_2 \left( b_1 x_1^2 + \frac{1}{3} b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 \right) + \text{高次项} \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3 \left( c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \frac{1}{3} c_3 x_3^2 \right) + \text{高次项} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B})$$

由于  $\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^3 (a_i + b_i + c_i) x_i^2 + \text{高次项}$

可见, 如 $a_i + b_i + c_i > 0$  ( $i=1, 2, 3$ ), 则有 $\operatorname{div} v > 0$ , 从而原点为不稳定.

### 三、关于极限环的稳定问题

定理 2 如方程(1.1)有极限环

$$x_i = \phi_i(t), \quad \phi_i(t+T) = \phi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

如果, 此极限环为稳定, 则必有  $\int_0^T \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i = \phi_i(t)\}} dt < 0$ .

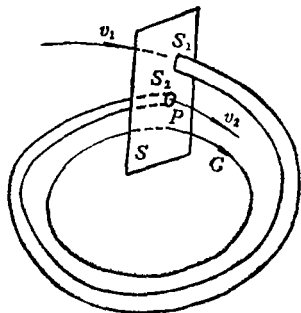


图 2

证: 如图 2 所示, 设 $C$ 为极限环. 在其上任一点 $P$ 作 $C$ 之法面 $S$ , 又在 $C$ 之 $\delta$ 邻域内选取一段流管, 此流管与上述法面的截面分别为 $S_1$ 与 $S_2$ , 如此由引理 2, 得

$$\int_{(S_1)} \mu |v_{1n}| dS = \int_{(S_2)} \mu |v_{2n}| dS$$

设 $\mu$ 在 $S_1, S_2$ 处的平均值为 $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ ;  $|v_{1n}|$ 与 $|v_{2n}|$ 的平均值为 $|\bar{v}_{1n}|, |\bar{v}_{2n}|$ ; 又 $S_1, S_2$ 的面积为 $\sigma_1, \sigma_2$ ; 如此, 利用中值定理, 上式可化为

$$\bar{\mu}_1 |\bar{v}_{1n}| \sigma_1 = \bar{\mu}_2 |\bar{v}_{2n}| \sigma_2 \quad (3.1)$$

在上述流管内任取一轨线, 设在该轨线的进口与出口处 $\mu$ 之值为 $\mu_1, \mu_2$ , 则有

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1 + \varepsilon_1, \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2 + \varepsilon_2$$

且当 $\sigma \rightarrow 0$ 时有 $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ , 其中 $\sigma = \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ . 此外, 设 $C$ 上 $P$ 点之速度为 $v$ , 由图 2 不难看出

$$|\bar{v}_{1n}| = |v| + \varepsilon_3, \quad |\bar{v}_{2n}| = |v| + \varepsilon_4$$

且当前述之 $\delta \rightarrow 0$ 时, 有 $\varepsilon_3 \rightarrow 0, \varepsilon_4 \rightarrow 0$ .

将所有上述关系代入(3.1), 可得

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (1 + \varepsilon_5) + \varepsilon_6 \quad (3.2)$$

其中 $\varepsilon_0$ 随 $\delta$ 而趋于零,  $\varepsilon_0$ 随 $\sigma$ 而趋于零.

由于假设极限环是稳定的, 故有 $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} < 1$ . 因此, 只要我们将上述流管取得充分细 (亦即令 $\sigma$ 充分小), 并且让此流管离极限环 $C$ 充分近 (亦即令 $\delta$ 充分小), 那么, 由(3.2)不难得出, 此时对流管内任一轨线, 均有

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} < 1$$

但是, 由(1.4)得知, 沿此流管内的任一轨线, 有

$$\mu_2 = \mu_1 \exp \left[ - \int_0^{T'} \operatorname{div} \mathbf{v}' \cdot dt \right]$$

$$\text{或} \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = \exp \left[ \int_0^{T'} \operatorname{div} \mathbf{v}' \cdot dt \right] \quad (3.3)$$

其中 $T'$ 为该轨线由 $S_1$ 到 $S_2$ 所经历的时间, 而 $\operatorname{div} \mathbf{v}' = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i = \phi'_i(t)\}}$ ,  $x_i = \phi'_i(t)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 乃此轨线的方程.

由于 $\frac{\mu_1}{\mu_2} < 1$ , 故得 $\int_0^{T'} \operatorname{div} \mathbf{v}' \cdot dt < 0$ . 注意到当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 有 $T' \rightarrow T$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{v}' \rightarrow \operatorname{div} \mathbf{v}$ , 其

中 $\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i = \phi_i(t)\}}$ , 因而, 将上式取极限, 即得

$$\int_0^T \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i = \phi_i(t)\}} dt < 0$$

如是, 定理得证.

应指出, 如果对于极限环 $C$ , 有 $\int_0^T \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot dt < 0$ , 那么, 应用与上面相同的方法可以证明, 对于与 $C$ 充分邻近的一段流管而言, 将有 $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} < 1$ . 但是, 当 $n \geq 3$ 时,  $S_1, S_2$ 乃是二维平面或二维以上的超平面, 故尽管 $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} < 1$ , 但 $S_2$ 与 $S_1$ 相较并不一定是各向均减小的, 而可以是在某些方向减小, 而在另一些方向却增大, 从而 $C$ 可以是不稳定的. 故 $\int_0^T \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot dt < 0$ 只是 $C$ 稳定的必要条件而不是充分条件. 但是, 如果 $n=2$ , 则 $S_1, S_2$ 变为一维直线段,  $\sigma_1, \sigma_2$ 变为此二线段的长度, 因而, 由 $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} < 1$ 即可得出 $C$ 必是稳定的. 据此, 并结合上述定理2, 就能推出关于平面极限环稳定的熟知定理, 即: 平面极限环稳定的必要与充分条件是, 沿此极限环, 有 $\int_0^T \operatorname{div} \mathbf{v} \cdot dt < 0^{[4]}$ .

**定理3** 如方程(1.1)有极限环

$$x_i = \phi_i(t), \quad \phi_i(t+T) = \phi_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

如沿此极限环, 有

$$\int_0^T \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i = \phi_i(t)\}} dt > 0$$

则此极限环必为不稳定.

证: 根据散度的连续性, 可知对位于上述极限环充分小邻域内之一段充分细的流管中的每一轨线 (参看图 2), 将有  $\int_0^T \operatorname{div} v' dt > 0$ , 从而沿该轨线, 有  $\frac{\mu_1}{\mu_2} > 1$ , 因而, 对整个流管, 也有  $\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2} > 1$ , 然后, 用上述相同的方法, 可以证明对该流管, 必有  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} > 1$ . 据此, 不难得出关于上述极限环不稳定的结论.

#### 四、非定常系统平衡位置的稳定性

给定非定常系统

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.1)$$

其中  $X_i(0, 0, \dots, 0, t) \equiv 0$ , 即  $x_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 为其平衡位置. 今借助  $\frac{dt}{d\tau} = 1$ , 可将上式化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{d\tau} &= X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \frac{dt}{d\tau} &= T(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \equiv 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

此时平衡位置  $\{x_i = 0\}$  相应于  $(x, t)$  空间中的  $t$  轴. 按照前面讨论极限环的方法可知, (4.1) 平衡位置的渐近稳定性, 相当于 (4.2) 在  $t$  轴充分小邻域内的流管的截面积, 当  $\tau \rightarrow \infty$  时趋于零. 而 (4.1) 平衡位置的不稳定性, 则相当于上述流管面积当  $\tau \rightarrow \infty$  时大于  $M$ , 其中  $M$  为某一确定的正数. 注意对 (4.2), 有

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

并且对 (4.1) 的平衡位置亦即对 (4.2) 的  $t$  轴而言, 有

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i = 0\}}$$

据此, 并按照与上节同样的方法, 可得

**定理 4** 如 (4.1) 之平衡位置为渐近稳定, 则必有

$$\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i = 0\}} dt = -\infty$$

反之, 如

$$\int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i=0\}} dt > N$$

其中 $N$ 为某一确定的正数, 则其平衡位置必为不稳定.

如果(4.1)的右端对 $t$ 是周期的, 周期为 $T$ , 则上述定理化为:

**定理 5** 如果(4.1)的右端对 $t$ 是周期的, 周期为 $T$ , 则如其平衡位置为渐近稳定, 必有

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i=0\}} dt < 0$$

反之, 如

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i=0\}} dt > 0$$

则其平衡位置必不稳定.

**例 3**

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \sum_{j=1}^n p_{ij}(t)x_j + \bar{X}_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (C)$$

其中 $p_{ij}(t+T) = p_{ij}(t)$ ,  $\bar{X}_i$ 中关于 $\{x_i\}$ 项最低次为2, 其系数为 $t$ 的周期函数, 周期为 $T$ . 注意到

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \right)_{\{x_i=0\}} = \sum_{i=1}^n p_{ii}(t)$$

由此可知, 如

$$\int_0^T \left( \sum_{i=1}^n p_{ii}(t) \right) dt > 0$$

则(C)之平衡位置为不稳定.

### 参 考 文 献

- [1] Немыцкий В. В. и В. В. Степанов, *Качественная Теория Дифференциальных Уравнений*, Гостехиздат, (1949) (有中译本).
- [2] Степанов В. В., *Курс Дифференциальных Уравнений*, Изд. 5, Гостехиздат, (1950) (有中译本).
- [3] 李骝, 积分因子在定性理论中的性质及其应用, *应用数学和力学*, 3, 3(1982).
- [4] 秦元勋, 《微分方程所定义的积分曲线》, 上册, 科学出版社, (1959).

# The Application of Jacobi Factor in the Stability Theory of Ordinary Differential Equations

Li Li

*(Tianjin University, Tianjin)*

## Abstract

In this paper, we obtain some unstable theorems concerning the autonomous system, nonautonomous system and limit cycle by using the properties of Jacobi factor.