

文章编号: 1000-0887(2004)09-1143-07

等直蜂窝夹芯盒式矩形截面梁 约束弯曲应力的分析*

张英世, 张 行

(北京航空航天大学 飞行器设计与应用力学系, 北京 100083)

(我刊原编委何福保推荐)

摘要: 在研究等截面蜂窝夹芯盒式矩形截面直梁自由弯曲位移和应力的基础上, 分析其约束弯曲位移和应力附加项。对附加位移采用了分离变量假设, 在此基础上, 得到了几何、物理和平衡三方面的方程。采用伽辽金解法, 使问题归结为具有衰减特性的二阶线性常微分方程。分析表明, 应力衰减速度的快慢, 取决于参数 ν , 而 ν 与载荷的大小、梁截面的几何尺寸以及材料的物理性质有关。

关键词: 蜂窝结构; 约束弯曲; 应力; 衰减; 翘曲位移

中图分类号: V214.6 文献标识码: A

引 言

蜂窝填充薄壁杆件具有比强度高、比刚度大的特点, 在军用飞机和民用飞机设计中有着广泛的应用^[1]。M. Tahir Khalid, Zhang Xing 研究了等直蜂窝夹芯盒式矩形截面杆自由扭转与弯曲的应力和位移^[2, 3], 张英世、张行研究了等直蜂窝夹芯盒式矩形截面杆约束扭转的应力和位移^[4]。本文在此基础上, 并考虑到空心薄壁杆件的经典理论^[5-8], 讨论蜂窝夹芯盒式矩形截面梁约束弯曲时的应力。在此方面尚未见有文章公开发表。

图 1 所示蜂窝夹芯梁, 其上、下面板承受面内正应力与剪应力, 左右腹板也承受面内正应力和剪应力, 中间填充的铝合金制成的正六边形蜂窝夹芯材料与面板用胶粘接在一起, 并被简化为无限多个无限薄的腹板, 只承受面内剪应力。

1 几何方程

蜂窝夹芯盒式矩形截面梁发生约束弯曲时, 其各个横截面的翘曲各不相同, 翘曲位移是 x, y 的函数 $u_s = u_s(x, y)$ 。设面板与腹板的翘曲位移分别为^[2]

$$u_s^* = u_s + u_{s1}, \quad (1)$$

$$u_w^* = u_w + u_{w1}, \quad (2)$$

式中, u_s 与 u_w 分别为梁自由弯曲时面板与腹板的翘曲位移; u_{s1} 与 u_{w1} 分别为约束弯曲时面板

* 收稿日期: 2003_03_20; 修订日期: 2004_06_14

基金项目: 航空基金资助项目(99B51024)

作者简介: 张英世(1948—), 男, 北京人, 副教授(联系人. Tel: + 86_10_82317508; Fax: + 86_10_82315644;

E_mail: beihangcaili@yahoo.com.cn)

与腹板翘曲位移的附加项, 它们满足固定端的位移边界条件

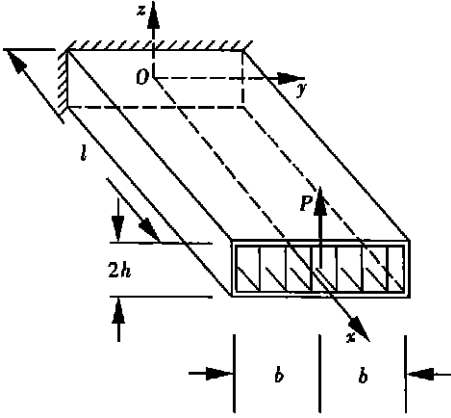


图1 蜂窝夹芯盒式矩形截面梁

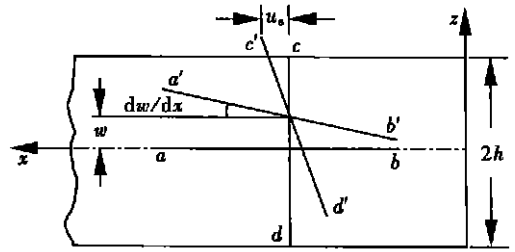


图2 被简化为受纯剪腹板后的芯材变形图

$$x = 0, u_s + u_s = 0, u_w + u_w = 0 \quad (3)$$

将自由弯曲位移 u_s 与 u_w 分别表为两个变量 x 与 y 各自函数之和(详见[2])

$$u_s = f(x) + g(y), \quad (4)$$

$$u_w = f(x) + e(z), \quad (5)$$

其中 $f(x)$ 满足条件

$$x = 0, f(x) = 0, \quad (6)$$

$e(z)$ 沿截面高度呈线性分布

$$e(z) = e(h)z/h \quad (7)$$

现设约束弯曲位移附加项 u_s 与 u_w 为两个变量 x 与 y 各自函数之积

$$u_s = \xi(x) \phi(y), \quad (8)$$

$$u_w = \xi(x) \varphi(z) \quad (9)$$

式中, $\xi(x)$ 为待定函数, 且有

$$x = 0, \xi(x) = 1, \quad (10)$$

由式(3)~(10)可知

$$\phi(y) = -g(y), \quad (11)$$

$$\varphi(z) = -e(z) \quad (12)$$

将蜂窝芯材简化为无限多个无限薄的受纯剪的腹板, 其内沿 x 与 z 方向的线素 ab 与 cd 分别转移到 $a'b'$ 与 $c'd'$ 处(图2)。由几何关系, 面板沿 x 方向正应变、剪应变、芯材剪应变、腹板正应变与剪应变的附加项可分别表为

$$\varepsilon_s = \partial u_s / \partial x = \xi'(x) \phi(y), \quad (13)$$

$$\gamma_s = \partial u_s / \partial y = \xi(x) \phi'(y), \quad (14)$$

$$\gamma_c = u_s / h + dw / dx = 1/h \xi(x) \phi(y) + w'(x), \quad (15)$$

$$\varepsilon_w = \partial u_w / \partial x = \xi'(x) \varphi(z), \quad (16)$$

$$\gamma_w = \partial u_w / \partial z + dw / dx = \xi(x) \varphi'(z) + w'(x) \quad (17)$$

2 物理方程

面板的正应力、剪应力、芯材剪应力、腹板正应力及剪应力附加项分别为

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = E_s \partial u_s / \partial x = E_s \xi'(x) \phi(y), \quad (18)$$

$$\tau_s = G_s \gamma_s = G_s \partial u_s / \partial y = G_s \xi(x) \phi'(y), \quad (19)$$

$$\tau_c = G_c \gamma_c = G_c \left[\frac{u_s}{h} + \frac{dw}{dx} \right] = G_c \left[\frac{1}{h} \xi(x) \phi(y) + w'(x) \right], \quad (20)$$

$$\sigma_w = E_w \epsilon_w = E_w \partial u_w / \partial x = E_s \xi(x) \varphi(z), \quad (21)$$

$$\tau_w = G_w \gamma_w = G_w \left[\frac{\partial u_w}{\partial z} + \frac{dw}{dx} \right] = G_w [\xi(x) \phi(z) + w'(x)] \cdot \quad (22)$$

3 平衡方程

由图3与图4所示上面板体素及腹板体素的平衡,有

$$t_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} + t_s \frac{\partial \tau_s}{\partial y} - \tau_c = 0, \quad (23)$$

$$t_w \frac{\partial \sigma_w}{\partial x} + t_w \frac{\partial \tau_w}{\partial z} = 0, \quad (24)$$

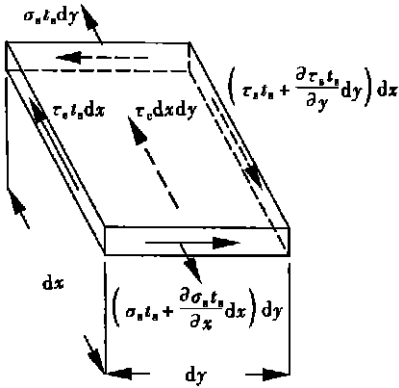


图3 面板体素示力图

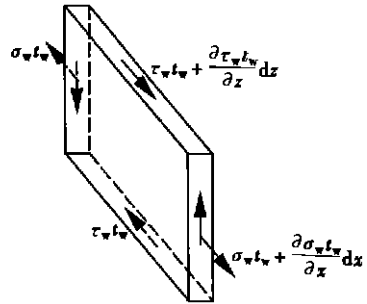


图4 腹板体素示力图

式中, t_s 与 t_w 分别为面板与腹板的厚度。剪流连续条件为

$$\tau_w t_w |_{z=h} + \tau_s t_s |_{y=b} = 0 \quad (25)$$

将式(19)与式(22)代入式(25),可得

$$w'(x) = -\mu_1 Q \xi(x), \quad (26)$$

$$\text{式中 } \mu_1 Q = \mu = \lambda \phi'(b) + \phi'(h), \quad (27)$$

$$\lambda = t_s G_s / t_w G_w \quad (28)$$

在 $y-z$ 坐标系每一象限内,面板与腹板上正应力附加项形成的合力为零,故有

$$\int_0^b t_s \sigma_s dy + \int_0^h t_w \sigma_w dz = 0 \quad (29)$$

$$\text{或 } E_s t_s \int_0^b \phi(y) dy + E_w t_w \int_0^h \varphi(z) dz = 0 \quad (30)$$

将式(11)与式(12)代入上式,我们有

$$-E_s t_s \int_0^b g(y) dy - E_w t_w \int_0^h e(z) dz = 0 \quad (31)$$

由[2],自由弯曲位移连续条件为

$$\alpha h k b - c/k^2 = g(b) = e(h), \quad (32)$$

由式(7)、(31)与式(32)可得

$$c = 2k^2(2bE_s t_s + hE_w t_w)^{-1}(k^{-1}E_s t_s \alpha h k b + 2^{-1}hE_w t_w \alpha h k b), \quad (33)$$

式中之 α 以及其中包含之 η 与 k^2 可由[2]得到如下

$$\alpha = - Q\eta/4bG_c, \quad (34)$$

$$1/\eta = (G_s t_s / G_w t_w) h k s h k b + c h k b, \quad (35)$$

$$k^2 = G / h t_s G_s. \quad (36)$$

4 控制方程

为了满足平衡方程式(23)与(24),我们采用伽辽金方法求解。式(23)两边同乘以 $\phi(y)$, 再从0到 b 对 y 积分; 式(24) 两边同乘以 $\varphi(z)$, 再从0到 h 对 z 积分, 然后将二式相加, 有

$$\int_0^b \left[t_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} + t_s \frac{\partial \tau_s}{\partial y} - \tau_c \right] \phi(y) dy + \int_0^h \left[t_w \frac{\partial \sigma_w}{\partial x} + t_s \frac{\partial \tau_w}{\partial y} \right] \varphi(z) dz = 0 \quad (37)$$

将式(18)~(22)代入式(37), 可得

$$A \xi''(x) - B \xi(x) = 0, \quad (38)$$

式中

$$A = E_s t_s \int_0^b \phi^2(y) dy + E_w t_w \int_0^h \varphi^2(z) dz = Q^2 \left\{ E_s t_s \left[\left(\frac{\eta}{4bG_c} \right)^2 \left(\frac{sh2kb}{4k} + \frac{b}{2} \right) - \frac{F\eta shkb}{2bG_c k} + bF^2 \right] + \frac{hE_w t_w}{3} \left[\frac{\eta chkb}{4bG_c} - F \right]^2 \right\}, \quad (39)$$

$$B = \int_0^b \left[\frac{G_c}{h} \phi^2(y) - G_s t_s \phi''(y) \phi(y) - \mu G_c \phi(y) \right] dy - G_w t_w \int_0^h \phi''(z) \varphi(z) dz = Q^2 \left[\frac{F}{h} + \mu_1 \right] \left[bFG_c - \frac{\eta}{4bk} shkb \right], \quad (40)$$

这里 $F = \eta [2bG_c(2bE_s t_s + hE_w t_w)] J^{-1} (k^{-1} E_s t_s shkb + 2^{-1} hE_w t_w chkb).$ (41)

令 $\nu^2 = B/A,$ (42)

则式(38)变为

$$\xi''(x) - \nu^2 \xi(x) = 0. \quad (43)$$

5 求解方法

方程(43)之通解为

$$\xi(x) = \alpha ch \mathcal{X} + \beta sh \mathcal{X}. \quad (44)$$

由边界条件

$$x = 0, \quad \xi(x) = 1, \quad (45)$$

$$x = l, \quad \sigma_s = 0, \quad \sigma_w = 0, \quad (46)$$

可得 $\alpha = 1, \quad \beta = - th \mathcal{M}.$ (47)

故有 $\xi(x) = ch \mathcal{X} - th \mathcal{M} sh \mathcal{X}.$ (48)

将式(48)代入式(18)、(19)及式(23)、(24), 并利用式(25), 可得无量纲化的面板正应力、剪应力、芯材剪应力、腹板正应力、剪应力附加项如下

$$\sigma_s = \frac{\sigma_s}{(\sigma_s)_{\max}} = \frac{(sh \mathcal{X} - th \mathcal{M} ch \mathcal{X}) [(Q\eta \nu) / (4bG_c) shky - FQ\nu]}{Pl / (4bht_s E_s)}, \quad (49)$$

$$\tau_s = \frac{\tau_s}{(\tau_s)_{\max}} = - \frac{(ch \mathcal{X} - th \mathcal{M} sh \mathcal{X}) shky}{shkb}, \quad (50)$$

$$\tau_c = \frac{\tau_c}{(\tau_c)_{\max}} = \frac{(ch \mathcal{X} - th \mathcal{M} sh \mathcal{X}) [(ht_s \eta) / (G_c) (E_s \nu^2 + G_s k^2) chky - 4bhE_s t_s F\nu^2]}{1 - \eta}, \quad (51)$$

$$\sigma_w = \frac{\sigma_w}{(\sigma_s)_{\max}} = \frac{(\operatorname{sh} \mathcal{X} - \operatorname{th} \mathcal{V} \operatorname{ch} \mathcal{X}) \left[(Q\eta) / (4bhG_c) \operatorname{ch} ky - (FQ/h) \right] z \mathcal{V}}{Pl / (4bht_s E_w)}, \quad (52)$$

$$\tau_w = \frac{\tau_w}{\tau_w} = \frac{(\operatorname{ch} \mathcal{X} - \operatorname{th} \mathcal{V} \operatorname{sh} \mathcal{X}) \left[-\frac{QkG_s t_s \eta}{4bG_c t_w} \operatorname{sh} kb + \frac{E_s \mathcal{V}^2 (h^2 - z^2)}{2} \left(\frac{Q\eta}{4bhG_c} \operatorname{ch} kb - \frac{FQ}{h} \right) \right]}{\frac{QG_w}{4bhG_c} (1 - \eta \operatorname{ch} kb)}. \quad (53)$$

将约束弯曲时的附加项与自由弯曲时的相关量相加, 便得蜂窝夹芯盒式矩形截面梁发生约束弯曲时的面板正应力、剪应力, 芯材剪应力、腹板正应力、剪应力如下

$$\sigma_s^* = \sigma_s + \sigma_s = \frac{P(l-x)}{4bht_s} + E_s (\operatorname{sh} \mathcal{X} - \operatorname{th} \mathcal{V} \operatorname{ch} \mathcal{X}) \left[\frac{Q\eta \mathcal{V}}{4bG_c} \operatorname{ch} ky - FQ \mathcal{V} \right], \quad (54)$$

$$\tau_s^* = \tau_s + \tau_s = -\frac{G_s k Q \eta}{4bG_c} \operatorname{sh} ky + \frac{G_s k Q \eta}{4bG_c} (\operatorname{ch} \mathcal{X} - \operatorname{th} \mathcal{V} \operatorname{sh} \mathcal{X}) \operatorname{sh} ky, \quad (55)$$

$$\tau_c^* = \tau_c + \tau_c = \frac{Q}{4bh} (1 - \operatorname{ch} ky) + (\operatorname{ch} \mathcal{X} - \operatorname{th} \mathcal{V} \operatorname{sh} \mathcal{X}) \left[\frac{Q\eta \mathcal{V}_s}{4bG_c} (E_s \mathcal{V}^2 + G_s k^2) \operatorname{ch} ky - E_s t_s FQ \mathcal{V}^2 \right], \quad (56)$$

$$\sigma_w^* = \sigma_w + \sigma_w = \frac{Q(l-x)z}{4bh^2 t_s} + E_w \mathcal{V} (\operatorname{sh} \mathcal{X} - \operatorname{th} \mathcal{V} \operatorname{ch} \mathcal{X}) \left[\frac{Q\eta}{4bhG_c} \operatorname{ch} kb - \frac{FQ}{h} \right] z, \quad (57)$$

$$\tau_w^* = \tau_w + \tau_w = \frac{QG_w}{4bhG_c} (1 - \eta \operatorname{ch} kb) + (\operatorname{ch} \mathcal{X} - \operatorname{th} \mathcal{V} \operatorname{sh} \mathcal{X}) \left[-\frac{QkG_s t_s \eta}{4bG_c t_w} \operatorname{sh} kb + \frac{E_s \mathcal{V}^2 (h^2 - z^2)}{2} \left(\frac{Q\eta \operatorname{ch} kb}{4bhG_c} - \frac{FQ}{h} \right) \right]. \quad (58)$$

6 算 例

表 1 $y = b$ 处应力沿 x 方向的变化

\mathcal{X}	0	1.125	2.249	3.374	4.498
σ_s	-4.157×10^{-2}	-1.350×10^{-2}	-0.439×10^{-2}	-0.142×10^{-2}	-0.046×10^{-2}
τ_s	-1.162	-0.325	-0.105	-0.034	-0.011
τ_c	1.470	0.477	0.155	0.050	0.016

表 2 $x = 0$ 处应力沿 y 方向的变化

点	σ_s	τ_s	τ_c
-4	-4.157×10^{-2}	10.000×10^{-1}	14.695×10^{-1}
-3	-0.637×10^{-2}	5.269×10^{-1}	4.952×10^{-1}
-2	1.189×10^{-2}	2.654×10^{-1}	-0.104×10^{-1}
-1	2.056×10^{-2}	1.105×10^{-1}	-2.503×10^{-1}
0	2.310×10^{-2}	0	-3.208×10^{-1}
1	2.056×10^{-2}	-1.105×10^{-1}	-2.503×10^{-1}
2	1.189×10^{-2}	-2.654×10^{-1}	0.104×10^{-1}
3	-0.637×10^{-2}	-5.269×10^{-1}	4.952×10^{-1}
4	-4.157×10^{-2}	-10.000×10^{-1}	14.695×10^{-1}

求图 1 所示蜂窝夹芯盒式矩形截面梁约束弯曲的应力附加项。取 $E_s = E_w = 70 \text{ GPa}$, G_c

$= 0.21 \text{ GPa}$, $G_s = G_w = 27 \text{ GPa}$, $t_s = t_w = h/50$, $b = 4h$, $l = 30h$. 求得 $y = b$ 处 $\sigma_s(\sigma_w)$ 、 τ_s 和 τ_c 沿 x 方向变化的值, 示于表 1 中, 其变化趋势, 分别见图 5、图 6、图 7; $x = 0$ 处的 σ_s 、 τ_s 和 τ_c 沿 y 方向变化的值, 示于表 2 中, 其变化趋势, 分别见图 8、图 9、图 10

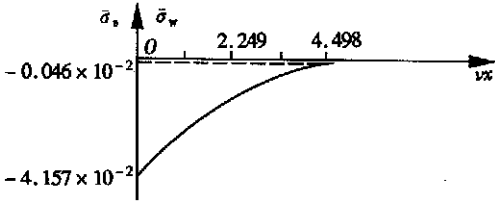


图 5 $y = b$ 处 σ_s 、 σ_w 沿轴向的分布

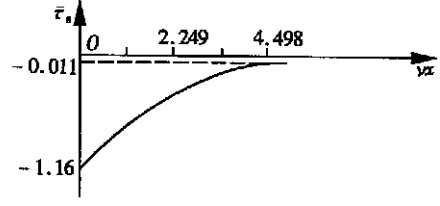


图 6 $y = b$ 处 τ_s 沿轴向的分布

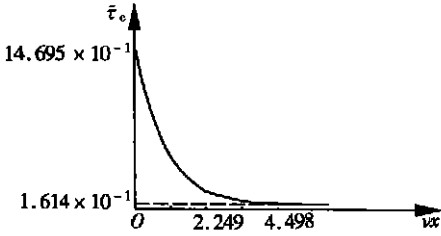


图 7 $y = b$ 处 τ_c 沿轴向的分布

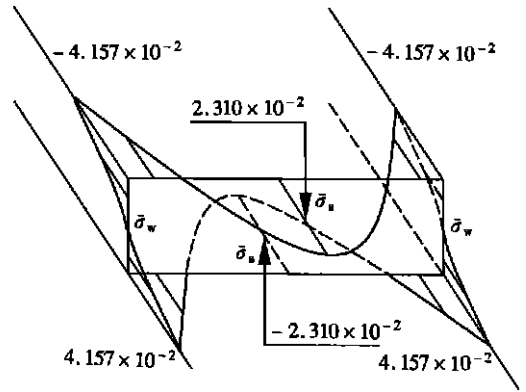


图 8 $x = 0$ 处 σ_s 、 σ_w 沿横截面宽度与高度的分布

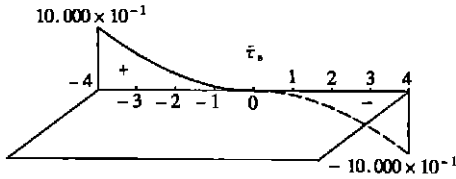


图 9 $x = 0$ 处 τ_s 沿横截面宽度的分布

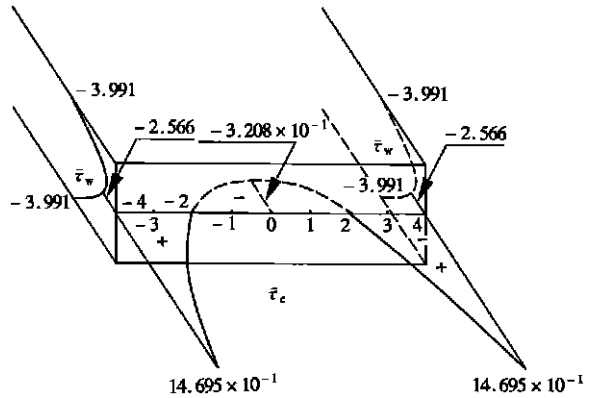


图 10 $x = 0$ 处 τ_c 、 τ_w 沿横截面宽度与高度的分布

理论分析和数值结果表明, 等直蜂窝夹芯盒式矩形截面梁约束弯曲时, 面板正应力附加项 σ_s 与腹板正应力附加项 σ_w , 芯材剪应力附加项 τ_c 与腹板剪应力附加项 τ_w 均分别构成自相平衡力系, 即分别满足式(29) 及方程 $\int_0^b \tau_c dy + t_w \tau_w |_{z=0} = 0$; 无量纲化的面板正应力附加项 σ_s 与芯材剪应力附加项 τ_c 沿截面宽度呈对称分布, 腹板剪应力附加项 τ_w 沿横截面高度呈对称分布, 面板剪应力附加项 τ_s 沿截面宽度呈反对称分布. 面板正应力、面板剪应力、芯材剪应力、腹板正应力、腹板剪应力的附加项沿轴向衰减很快. 距固定端 $8h$ 远处横截面的面板正应力附加项 σ_s 、腹板正应力附加项 σ_w 、芯材剪应力附加项 τ_c 和腹板剪应力附加项 τ_w 均分别为其

在固定端处之值的 1.1%, 面板剪应力仅为其在固定端处之值的 0.97%。

7 结 论

本文在研究等截面蜂窝夹芯盒式矩形截面直梁自由弯曲位移和应力的基础上, 分析其约束弯曲位移和应力附加项。在研究过程中, 对附加位移采用了分离变量假设。在此基础上, 得到了几何、物理和平衡三方面的方程。采用伽辽金解法, 使问题归结为具有衰减特性的二阶线性常微分方程。分析表明, 应力衰减速度的快慢, 取决于参数 ν , 而 ν 与截荷的大小、梁截面的几何尺寸以及材料的物理性质有关。

[参 考 文 献]

- [1] Gerard R. Minimum Weight Analysis of Compression Structures [M]. New York: New York University Press, 1956.
- [2] Tahir Khalid M, ZHANG Xing. Analysis of shear stress distribution in honeycomb aircraft wing structure subjected to (s t) torque [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 1997, 10(3): 182—187.
- [3] Tahir Khalid M. 蜂窝结构力学与疲劳损伤力学的新方法 [D]. 博士学位论文. 北京: 北京航空航天大学, 1998, 10—34.
- [4] 张英世, 张行. 等直蜂窝夹芯盒式矩形截面杆约束扭转应力和位移的解析解 [J]. 应用数学和力学, 2004, 25(7): 711—717.
- [5] Vlasov V Z Thin-Walled Elastic Beam [M]. 2nd Ed. Jerusalem: Israel Prog for Scientific Translation, 1961.
- [6] von Karman T H, CHIEN Wei zang. Torsion with variable twist [J]. Journal of the Aeronautical Science, 1946, 15(10): 503—511.
- [7] Murray N W. Introduction to the Theory of Thin-Walled Structure [M]. Oxford: Clarendon Press, 1984.
- [8] Hadji Argiris J, Dunne P C. The general theory of cylindrical and conical tubes under torsion and bending loads [J]. The Journal of the Royal Aeronautical Society, 1947, 51: 434, 441, 443.

Stress Analysis of Restrained Bending for Box Beam With Rectangular Cross Section Filled by Honeycomb Core

ZHANG Ying shi, ZHANG Xing

(Division 508, Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P. R. China)

Abstract: On the basis about studying free bending for box beam with rectangular cross section filled by honeycomb core, supplementary displacements and stresses of restrained bending for such beam were analyzed. The hypothesis for separated variables was adopted to solve displacement. According to this, three aspect equations of geometrical, physical and balance were obtained. With Galerkin's method, it is summed up as two_order ordinary differential equations with the attenuation character. Analysis makes clear that attenuation speed of stress is concerned with a big load or a small one, geometric dimensions of cross section of beam, and physical parameter of material.

Key words: honeycomb structure; constrained bending; stress; attenuation; warping displacement