应用数学和力学，第5卷第5期（1984年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

含有δ函数的弱非线性微分方程的摄动解*

刘曾荣　　魏锡荣

（安徽大学，1983年6月14日收到）

摘　要

本文从Heaviside函数和δ函数的基本性质出发，利用奇异摄动法，提出了一个方法来求方程

$$M(u)=\varepsilon f(u)+\lambda\delta(t-a)$$

的渐近解析解，这里M是n阶线性微分算子，$f(u)$是多项式．利用这个方法讨论了一些具体例子，得到的结果有很满意的物理解释．

一、引　言

在工程技术和物理领域中，常常会碰到含有δ函数的弱非线性微分方程．对于二阶线性微分方程，当其含有δ函数作为非齐次项时，可以用通常的冲量定理来求解．七十年代，徐皆苏教授讨论了非线性振动领域中的周期脉冲参数激励问题[1],[2]，给出了这一类含有δ函数方程的求解方法，当方程为线性时能给出定量的结果．在本文中，我们打算用另一种办法讨论更广泛的一类含有δ函数的微分方程的近似解析解．

对于弱非线性微分方程，其系数或非齐次项含有δ函数的情况，必须既要考虑到其非线性的特点，又要考虑到含有δ函数的特点．对于具有弱非线性，而不含有δ函数的微分方程的摄动法处理，Nayfeh在[3]和[4]中作了详细讨论．对于含有δ函数作为非齐次项的二阶线性微分方程可用冲量定理求解，类似的处理可以推广到含有δ函数的高阶线性微分方程[5]．本文利用摄动法，对于含有δ函数的弱非线性微分方程提出一种求解办法．

在第二节我们对方法作比较详细的介绍；第三节中通过一些例子来说明这种方法．

二、一　般　过　程

在讨论方法之前，先给出两个简单的引理．

引理1　在广义函数空间成立有

1°　$H(x)=H^2(x)=\cdots=H^n(x)$（$n$为任意正整数）其中$H(x)$为Heaviside函数；

2°　若$f(x)$为充分光滑函数，则在广义函数空间有

$$f(x)\delta^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i f^{(n-i)}(0)\delta^{(i)}(x)$$

---

*　许政范推荐．

其中n为任意正整数，$\delta(x)$为Dirac δ函数.

引理2 在广义函数空间成立有

1° $H(x)$，$\delta(x)$，$\delta'(x)$，$\cdots$，$\delta^{(n)}(x)$互为线性独立；

2° $H(x-a_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$当a_i互不相等时是互为线性独立的；

3° $\delta^{(n)}(x-a_i)$ $(i=1, 2, \cdots, m; m, n$为任一正整数)当各a_i互不相等时是互为线性独立的.

以上两个引理可用泛函分析的方法加以证明，这里从略.

现在我们来讨论方法. 考虑如下算子方程:

$$M(u)=\varepsilon f(u)+\lambda\delta(t-a) \tag{2.1}$$

其中M是一个n阶线性微分算子，$\varepsilon f(u)$为弱非线性，$0<\varepsilon<<1$为正小参数，$f(u)$为u的幂次高于1的多项式.

令(2.1)的解为:

$$u=x_1+x_2 \tag{2.2}$$

要求x_1满足如下方程

$$M(x_1)=\varepsilon f(x_1) \tag{2.3}$$

以及(2.1)关于u的定解条件. 假设按照摄动理论，对于充分小的$\varepsilon>0$，可求得其一致有效渐近解[6]

$$x_1=\bar{x}_1 \tag{2.4}$$

那么，此时x_2应当满足方程:

$$M(x_2)=\varepsilon[f(x_1+x_2)-f(x_1)]+\lambda\delta(t-a) \tag{2.5}$$

显然，x_2是由$\lambda\delta(t-a)$项而引起的，该项作用只能对$t\geqslant a$产生影响，故有理由认为:

$$x_2=\omega(t)H(t-a) \tag{2.6}$$

把(2.6)代入(2.5)，利用引理1的结果，(2.5)可写成:

$$\begin{aligned}[M(\varepsilon)+\varepsilon g(x_1,\omega)]H(t-a)=g_1(a)\delta(t-a)+g_2(a)\delta'(t-a)+\cdots\\+g_n(a)\delta^{(n-1)}(t-a)\end{aligned} \tag{2.7}$$

引理3 设

$$M=a_0(t)\frac{d^n}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)$$

只要$a_0(a)\neq 0$，就可由(2.7)右端推出

$$\left.\begin{aligned}&\omega(a)=0\\&\omega'(a)=0\\&\cdots\cdots\\&\omega^{(n-2)}(a)=0\\&\omega^{(n-1)}(a)=\lambda\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

证 由引理2，当(2.7)成立时应有

$$g_1(a)=0,\ g_2(a)=0,\ \cdots,\ g_n(a)=0$$

显然$g_n(a)$是

$$a_0(t)\frac{d^n}{dt^n}\omega(t)H(t-a)$$

所产生的$\delta^{(n-1)}(t-\alpha)$项的系数，所以应有

$$g_n(\alpha)=a_0(\alpha)\omega(\alpha)=0$$

即 $$\omega(\alpha)=0$$

同理，$g_{n-1}(\alpha)$是由

$$\left(a_0(t)\frac{d^n}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\right)\omega(t)H(t-\alpha)$$

所产生的$\delta^{(n-2)}(t-\alpha)$之系数，应有

$$g_{n-1}(\alpha)=[a_1(\alpha)-na_0'(\alpha)]\omega(\alpha)+a_0(\alpha)\omega'(\alpha)=0$$

即 $$\omega'(\alpha)=0$$

依次类推就可完成引理的证明。

这样，由引理2和引理3，由(2.7)可得如下的定解问题

$$\left.\begin{array}{l}M(\omega)+\varepsilon g(x_1,\omega)=0\\ \omega(\alpha)=0\\ \cdots\cdots\\ \omega^{(n-2)}(\alpha)=0\\ \omega^{(n-1)}(\alpha)=\lambda\end{array}\right\}\tag{2.9}$$

(2.9)也是一个类似于(2.3)带有弱非线性的微分方程定解问题，因而可用摄动方法求出其一致有效渐近解：

$$\omega=\bar{\omega}(t-\alpha)\tag{2.10}$$

最后，我们就可以得到(2.1)的一致有效渐近解：

$$u=\bar{x}_1+\bar{\omega}(t,\alpha)H(t-\alpha)\tag{2.11}$$

为了说明这个方法的合理性，我们举一个简单的线性例子．考虑二阶线性非保守系统：

$$x''+\mu x'+x=\lambda\delta(t-\alpha);\quad x(0)=1,\quad x'(0)=0\tag{2.12}$$

利用上述方法，令

$$x=x_1+u(t)H(t-\alpha)$$

代入(2.12)可得如下两个方程

$$x_1''+\mu x_1'+x_1=0;\quad x_1(0)=1,\quad x_1'(0)=0\tag{2.13}$$

和

$$u''+\mu u'+u=0;\quad u(\alpha)=0,\quad u'(\alpha)=\lambda\tag{2.14}$$

这与用冲量定理所得的结果是一致的。

上面所述方法，可推广到处理如下一些问题：

1° (2.1)中算子M的系数带有δ函数；

2° (2.1)右端不仅含有δ函数，还含有$\delta'(t)$，$\delta''(t)$，…，$\delta^{(n-1)}(t)$；

3° (2.1)中不一定要求λ为小量；

4° 对某些偏微分方程也可作类似的处理。

三、　例

本节我们通过一些例子来说明上节的方法。

例1　考虑自激系统

$$x''+x=\varepsilon(1-x^2)x'+\lambda\delta(t-a);\quad x(0)=a_0,\quad x'(0)=0 \tag{3.1}$$

利用上节方法，令

$$x=x_1+u(t)H(t-a)$$

代入(3.1)得到如下两个方程：

$$x_1''+x_1=\varepsilon(1-x_1^2)x_1';\quad x_1(0)=a_0,\quad x_1'(0)=0 \tag{3.2}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&u''+u-\varepsilon[1-(x_1+u)^2]u'+\varepsilon(2x_1x_1'u+u^2x_1')=0\\&u(a)=0,\qquad u'(a)=\lambda\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

由摄动法可知(3.2)的解是[3]

$$x_1=a\cos t \tag{3.4}$$

其中

$$a^2=\frac{4}{1+\left(\frac{4}{a_0^2}-1\right)e^{-\varepsilon t}}=C^2(\varepsilon t)$$

引入双重时间尺度t和$\tau=\varepsilon t$，对u作摄动展开：

$$u=u_0(t,\ \tau)+\varepsilon u_1(t,\ \tau)+\cdots \tag{3.5}$$

把(3.4)和(3.5)代入(3.3)，得u_0的方程为

$$D_0^2u_0+u_0=0;\qquad u_0(0,0)=0,\quad u_{0t}(0,0)=\lambda \tag{3.6}$$

(3.6)的解为

$$u_0=A(\tau)\sin t+B(\tau)\cos t \tag{3.7}$$

其中$A(0)=\lambda$，$B(0)=0$。

u_1的方程为

$$D_0^2u_1+u_1=-2D_0D_1u_0+[1-(x_1+u_0)^2]D_0u_0-2[x_1x_{1t}'u_0+u_1^2x_{1t}'] \tag{3.8}$$

把(3.7)和(3.4)代入(3.8)，为消去长期项就有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dA}{d\tau}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{4}(B+C)^2\right]A+\frac{3}{8}A^3\\&\frac{dB}{d\tau}=-\frac{1}{8}A^2C+\frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{4}C^2+\frac{1}{4}A^2\right)B-\frac{7}{8}CB^2-\frac{3}{8}B^3\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

对足够大的a，可取$C(\varepsilon t)\doteq 2$，此时(3.9)简化成：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dA}{d\tau}=\left(-\frac{1}{8}B^2-\frac{1}{2}B\right)A+\frac{3}{8}A^3\\&\frac{dB}{d\tau}=-\frac{1}{4}A^2+\left(-2+\frac{1}{8}A^2\right)B-\frac{7}{4}B^2-\frac{3}{8}B^3\end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

经分析可知，自治系统(3.10)在相平面上存在唯一稳定平衡点(0,0)，故$t\to\infty$时A与$B\to 0$。这样，(3.1)的首项解当$t\to\infty$时为

$$x=2\cos t \tag{3.11}$$

这个结果与没有λ存在时情况是一样的。从物理上看，结果是自然的，因为无论初始冲击有多大，系统的自激机能都能使系统最终稳定到本身所具有的周期解。

例2　考虑弱非线性保守系统

$$x''+x+\varepsilon x^3=\lambda\delta(t),\qquad x(0)=1,\ x'(0)=0 \tag{3.12}$$

令$x=x_1+u(t)H(t)$，用类似方法得到

$$x_1=\cos\left[\left(1-\frac{3\varepsilon}{8}\right)t\right]+\frac{\varepsilon}{32}\left\{\cos\left[3\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon\right)t\right]-\cos\left[\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon\right)t\right]\right\} \tag{3.13}$$

和

$$u=a(\varepsilon t)\cos\left[t-\frac{3}{8}\varepsilon t+\beta(\varepsilon t)\right] \tag{3.14}$$

其中$a(\varepsilon t)$和$\beta(\varepsilon t)$满足如下方程

$$\left.\begin{aligned}&a'=\frac{3}{8}a\sin2\beta+\frac{3}{8}a^2\sin\beta,\ a(0)=\lambda\\&\beta'=\frac{3}{8}(a^2+3)+\frac{3}{8}\cos3\beta+\frac{9}{8}a\cos\beta,\ \beta(0)=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

(3.15)的数值解如图1．由图可见，由于$\lambda\delta(t)$的作用，(3.12)产生了一个缓变调幅形解．因(3.12)是一个保守系统，这样结果的物理意义也是很明确的．

例3 具有周期冲击的耦合振动

考虑如下耦合振动

$$\left.\begin{aligned}&u_1''+\omega_1^2u_1=-2\hat{\mu}_1u_1'+\alpha_1u_1u_2+\hat{\beta}_1\sum_{m=0}^{\infty}\delta\left(t-\frac{2\pi m}{\omega_1}\right)\\&u_2''+\omega_2^2u_2=-2\hat{\mu}_2u_2'+\alpha_2u_1^2+\hat{\beta}_2\sum_{m=0}^{\infty}\delta\left(t-\frac{2\pi m}{\omega_2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

它的定解条件为：

$$\begin{cases}u_1(0)=2\varepsilon,\ u_2(0)=2\varepsilon;\\u_1'(0)=0,\ u_2'(0)=0\end{cases}$$

其中ε为正小参数，$\hat{\mu}_1=\varepsilon\mu_1$，$\hat{\mu}_2=\varepsilon\mu_2$，$\hat{\beta}_1=\varepsilon\beta_1$，$\hat{\beta}_2=\varepsilon\beta_2$；$\mu_1$，$\mu_2$，$\beta_1$，$\beta_2$均为$O(1)$．令

$$\left.\begin{aligned}&u_1=\bar{x}+\sum_{n=0}^{\infty}x_n(t)H\left(t-\frac{2\pi n}{\omega_1}\right)\\&u_2=\bar{x}+\sum_{n=0}^{\infty}y_n(t)H\left(t-\frac{2\pi n}{\omega_2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

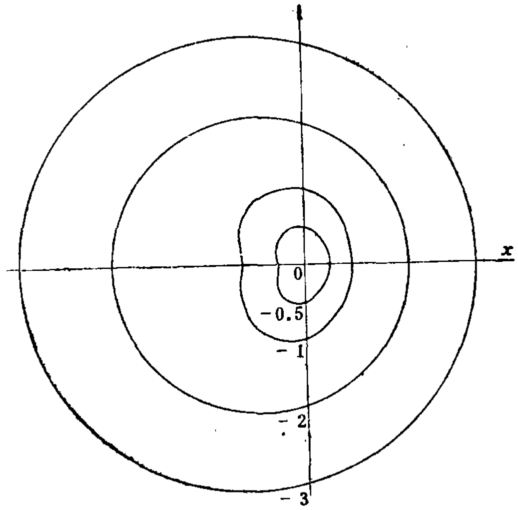

图 1

足够长时间t后，即$t=\dfrac{2\pi N}{\omega_i}+t_1$，$N$为足够大，$0\leqslant t_1\leqslant\dfrac{2\pi}{\omega_i}$，略去高阶无穷小量后，得到解的形式为：

$$\left.\begin{aligned}&u_1=\frac{\varepsilon\beta_1}{\omega_1}\frac{1}{1-\exp\left(-\varepsilon\mu_1\dfrac{2\pi}{\omega_1}\right)}\exp\left(-\varepsilon\mu_1\frac{2\pi t_1}{\omega_1}\right)\sin\omega_1t_1\\&u_2=\frac{\varepsilon\beta_2}{\omega_2}\frac{1}{1-\exp\left(-\varepsilon\mu_2\dfrac{2\pi}{\omega_2}\right)}\exp\left(-\varepsilon\mu_2\frac{2\pi t_1}{\omega_2}\right)\sin\omega_2t_1\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

可见在足够长时间后u_1和u_2都维持振荡解。上述考虑是在远离共振区的情况。对于共振区($\omega_2 \doteq 2\omega_1$)的情况，计算将更加复杂。

例4 小冲击对带陀螺力和平方非线性的保守系统的作用。

$$\left.\begin{aligned}&u_1''-\lambda u_2'+\alpha_1u_1+\alpha_3u_2=2u_1u_2+\varepsilon\beta\delta(t)\\&u_2''+\lambda u_1'+\alpha_3u_1+\alpha_2u_2=u_1^2\end{aligned}\right\}\tag{3.19}$$

满足定解条件

$$u_1(0)=\varepsilon,\ u_1'(0)=0;\qquad u_2(0)=\varepsilon,\ u_2'(0)=0\tag{3.20}$$

当方程

$$\omega^4-(\alpha_1+\alpha_2+\lambda^2)\omega^2+\alpha_1\alpha_2-\alpha_3^2=0\tag{3.21}$$

有两个相异正实根ω_1和ω_2，且ω_2远离$2\omega_1$及ω_1远离$2\omega_2$的情况下，可得到u_1和u_2的首项解为

$$\left.\begin{aligned}u_1=&\varepsilon a_1\cos(\omega_1t+\theta_1)+\varepsilon a_2\cos(\omega_2t+\theta_2)\\&+[\varepsilon a_3\cos(\omega_1t+\theta_3)+\varepsilon a_4\cos(\omega_2t+\theta_4)]H(t)\\u_2=&\varepsilon\rho_1a_1\cos(\omega_1t+\theta_1+\gamma_1)+\varepsilon\rho_2a_2\cos(\omega_2t+\theta_2+\gamma_2)\\&+[\varepsilon\rho_1a_3\cos(\omega_1t+\theta_3+\gamma_1)+\varepsilon\rho_2a_4\cos(\omega_2t+\theta_4+\gamma_2)]H(t)\end{aligned}\right\}\tag{3.22}$$

其中ρ_1，ρ_2，γ_1，γ_2由下列方程组决定

$$\left.\begin{aligned}&\rho_1\cos\gamma_1=-\frac{\alpha_3}{\alpha_2-\omega_1^2},\qquad \rho_1\sin\gamma_1=-\frac{\omega_1\lambda}{\alpha_2-\omega_1^2}\\&\rho_2\cos\gamma_2=-\frac{\alpha_3}{\alpha_2-\omega_2^2},\qquad \rho_2\sin\gamma_2=-\frac{\omega_2\lambda}{\alpha_2-\omega_2^2}\end{aligned}\right\}\tag{3.23}$$

常数a_1，a_2，a_3，a_4和θ_1，θ_2，θ_3，θ_4决定于下列两个方程组

$$\left.\begin{aligned}&a_1\cos\theta_1+a_2\cos\theta_2=1\\&-a_1\omega_1\sin\theta_1-a_2\omega_2\sin\theta_2=0\\&a_1\rho_1\cos(\theta_1+\gamma_1)+a_2\rho_2\cos(\theta_2+\gamma_2)=1\\&-a_1\rho_1\omega_1\sin(\theta_1+\gamma_1)-a_2\rho_2\omega_2\sin(\theta_2+\gamma_2)=0\end{aligned}\right\}\tag{3.24}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&a_3\cos\theta_3+a_4\cos\theta_4=0\\&-a_3\omega_1\sin\theta_3-a_4\omega_2\sin\theta_4=\beta\\&a_3\rho_1\cos(\theta_3+\gamma_1)+a_4\rho_2\cos(\theta_4+\gamma_2)=0\\&-a_3\rho_1\omega_1\sin(\theta_3+\gamma_1)-a_4\rho_2\omega_2\sin(\theta_4+\gamma_2)=0\end{aligned}\right\}\tag{3.25}$$

通过对方程(3.22)，(3.23)以及(3.24)，(3.25)的讨论，就能给出方程中各种参数对解的影响，这里从略，只由图2给出其中一个有趣的结果：当 $\alpha_3\to\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$时，$a_4\to\infty$和$a_4\rho_2\to\infty$。

作者对于安徽大学许政范教授在本文写作过程中的指导与帮助表示感谢。

本文成稿时，曾与美国布朗大学应用数学系谢定格教授进行过多次有益的讨论，在此表示衷心的感谢。

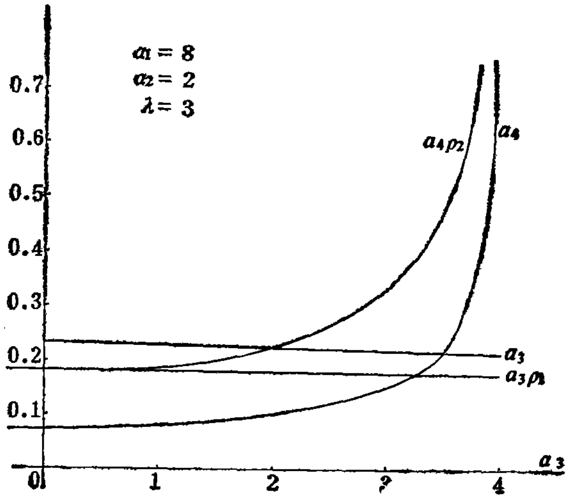

图 2

参 考 文 献

[1] Hsu Chia-shun, *Advances in Appl. Mech.*, 17 (1977), 245—301.

[2] Hsu Chia-shun, *J. Appl. Mech.*, 39 (1972), 551—559.

[3] Nayfeh, A. H. and Deam T. Mook, *Nonlinear Oscillation*, Wiley-Interscience (1979).

[4] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, Wiley-Interscience (1973).

[5] Pan, H. H. and R. M. Hohenstein, *Quart. Appl. Math.*, 39 (1981), 131—137.

[6] Kevorkian, J. and J. D. Cole, *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, Inc. Printed (1981).

Perturbation Solution of the Weak-Nonlinear Differential Equation with δ-Function

Liu Zheng-rong　　Wei Si-rong

(*Anhui University, Hefei*)

Abstract

In this paper, starting from some fundamental properties of Heaviside function and δ-function, making use of singular perturbation methods we provide a method of finding the asymptotic analytic solution of equation

$$M(u)=\varepsilon f(u)+\lambda\delta(t-a)$$

where M is an n-order linear differential operator, $f(u)$ is a polymial, By means of this method, we discuss some examples concretely. The results can be explained satisfactorily in physics. If we deal with linear problem by this method, the result will agree with that drown from theorem of impulse.