

摄动有限元法解一般轴对称壳 几何非线性问题*

谢志成 杨学忠 钱振东 刘 燕 张立平

(清华大学, 1983年5月27日收到)

摘 要

本文在处理几何非线性问题时, 利用在变分方程中引入摄动过程, 得到各级变分摄动方程, 并通过有限元法求解。由于有限元法能成功地处理各种复杂边界条件、几何形状的力学问题, 摄动法又可将非线性问题转化为线性问题求解。若结合这两种方法的优点, 将能够解决大量复杂的非线性力学问题, 并能够消除单独使用有限元法或摄动法求解复杂非线性问题所出现的困难。

本文应用摄动有限元法求解了一般轴对称壳的几何非线性问题。

一、引 言

科学技术的飞速发展, 向人们提出了大量的非线性力学问题。解决这类问题是比较困难的。许多学者为此曾做过大量的研究。1947年钱伟长教授成功地用摄动法求解了圆薄板大挠度问题^[1]。这方法的特点是把非线性方程化为多级线性方程, 然后逐级求解, 从而克服了直接求解非线性方程的困难。但摄动法需要先找出一个线性方程的解析解作为逐级计算的基础, 倘若结构的几何形状及边界条件较为复杂, 难以求得一个简单的线性解析解时, 应用摄动法将遇到困难。

自有限元法出现后, 非线性问题更多地依靠这种方法, 以求得一个数值解^[3~6]。有限元法的最大优点是能够解决形状和边界比较复杂的非线性问题。但这种方法通常需要花大量的计算机时, 如Newton-Rapshon迭代法求解非线性代数方程组; 而且在某些情况下, 还可能出现迭代不收敛现象。

本文所介绍的摄动有限元法, 其基本思想是: 将摄动过程引入变分法中, 得到各级变分摄动方程, 并通过有限元法求解。这种方法吸取了摄动法和有限元法各自的优点, 既解决了结构形状及边界条件复杂所带来的困难, 又不需用迭代法求解, 因而扩大了求解非线性问题的范围, 大大地节省了计算时间。

1982年我们曾用摄动有限元法求解材料非线性的平面应力问题^[7], 得到了一个与实验结果十分相符的解答。本文进一步应用这种方法导出轴对称壳几何非线性问题的全部摄动有限元法的基本方程, 并具体计算了正截锥壳的非线性应力和位移。为了校核这种方法的可靠

* 张福范推荐。

性, 本文还计算了环板的位移, 其结果与叶开沅教授^[2]所得结果十分一致。

二、轴对称壳几何非线性问题的基本关系式

(1) 定义内力、应变矩阵

内力如图 1 所示。

$$\text{内力矩阵: } \{\bar{\sigma}\} = [\bar{N}_s, \bar{N}_\theta, \bar{M}_s, \bar{M}_\theta]^T \quad (2.1a)$$

$$\text{应变矩阵: } \{\bar{\varepsilon}\} = [\bar{\varepsilon}_s, \bar{\varepsilon}_\theta, \bar{\chi}_s, \bar{\chi}_\theta]^T \quad (2.1b)$$

(2.1)式中: $\bar{N}_s, \bar{N}_\theta$ 分别为壳中切向和环向薄膜力; $\bar{M}_s, \bar{M}_\theta$ 分别是相应方向的弯矩; $\bar{\varepsilon}_s, \bar{\varepsilon}_\theta$ 分别为壳中面切、环向薄膜应变; $\bar{\chi}_s, \bar{\chi}_\theta$ 分别为壳中面切、环向的曲率变化。

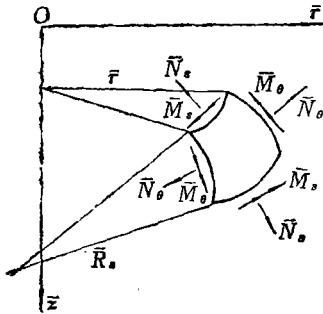


图 1

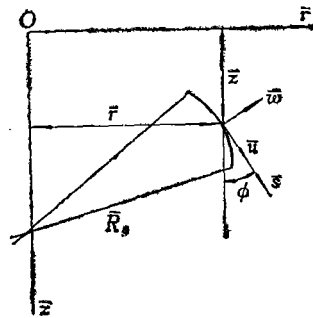


图 2

(2) 应变与位移的几何关系

位移如图 2 所示。

u, w 分别表示切、法向位移。 s 为沿壳母线方向的坐标。位移矩阵:

$$\{\bar{U}_1\} = [u, w]^T \quad (2.2)$$

$$\{\bar{U}\} = [u, w, \bar{\beta}]^T \quad (2.3)$$

(2.3)式中 $\bar{\beta}$ 表示壳中转角。

本文只讨论小应变、大转角问题。在这种情况下, 几何关系为:

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_s} \\ \frac{1}{r}(\bar{w} \cos \varphi + u \sin \varphi) \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{u}{R_s} - \frac{d\bar{w}}{ds} \right) \\ \frac{\sin \varphi}{r} \left(\frac{u}{R_s} - \frac{d\bar{w}}{ds} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{w}}{ds} - \frac{u}{R_s} \right)^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

且
$$\bar{\beta} = \frac{d\bar{w}}{ds} - \frac{u}{R_s}$$

(3) 物性关系

由于材料是线弹性的, 故满足下列广义虎克定律:

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{D}]\{\bar{\varepsilon}\} \quad (2.5)$$

其中:

$$[\bar{D}] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & \frac{\nu h^2}{12} \\ 0 & 0 & \frac{\nu h^2}{12} & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

E 为材料的弹性模量, ν 为泊松比, h 为壳厚度.

(4) 变分方程

壳所受均布力如图3所示. \bar{q}_s, \bar{q}_n 分别为壳切、法向均布力.

$$\{\bar{q}\} = [\bar{q}_s, \bar{q}_n]^T \quad (2.7)$$

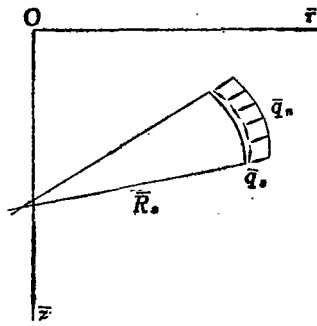


图 3

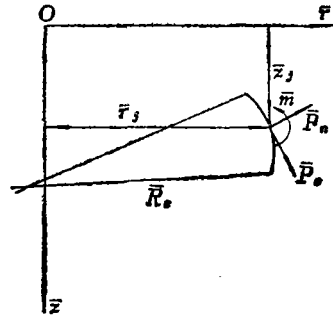


图 4

作用于 j 点的集中力、集中力偶如图4所示. \bar{P}_s, \bar{P}_n 分别为作用于 j 点的切、法向集中力; \bar{m} 为作用于 j 点的集中力偶.

$$\{\bar{F}_j\} = [\bar{P}_s, \bar{P}_n, \bar{m}]^T \quad (2.8)$$

根据最小位能原理, 得

$$\int_0^L \{\delta \bar{\varepsilon}\}^T \{\bar{\sigma}\} \bar{r} d\bar{s} - \int_{L_q} \{\delta \bar{U}_1\}^T \{\bar{q}\} \bar{r} d\bar{s} - \sum_{j=1} \bar{r}_j \{\delta \bar{U}\}^T \{\bar{F}_j\} = 0 \quad (2.9)$$

式中, L 为壳母线的总长度, L_q 为均布力作用下的壳母线长度.

(5) 无量纲化

将上述各有量纲的物理量化为无量纲的纯数. 设:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{u}{h}, \quad w = \frac{\bar{w}}{h}, \quad \beta = \bar{\beta}, \quad r = \frac{\bar{r}}{h}, \quad s = \frac{\bar{s}}{h}, \quad R_s = \frac{\bar{R}_s}{h} \\ P_s &= \frac{1-\nu^2}{Eh} \bar{P}_s, \quad P_n = \frac{1-\nu^2}{Eh} \bar{P}_n, \quad m = \frac{1-\nu^2}{Eh^2} \bar{m}, \quad q_s = \frac{1-\nu^2}{E} \bar{q}_s, \quad q_n = \frac{1-\nu^2}{E} \bar{q}_n \\ N_s &= \frac{1-\nu^2}{Eh} \bar{N}_s, \quad N_o = \frac{1-\nu^2}{Eh} \bar{N}_o, \quad M_s = \frac{1-\nu^2}{Eh^2} \bar{M}_s, \quad M_o = \frac{1-\nu^2}{Eh^2} \bar{M}_o, \\ \chi_s &= h \bar{\chi}_s, \quad \chi_o = h \bar{\chi}_o \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

将(2.10)代入(2.9)得

$$\int_0^L \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} r ds - \int_{L_q} \{\delta U_1\}^T \{q\} r ds - \sum_{j=1} r_j \{\delta U\}^T \{F_j\} = 0 \quad (2.11)$$

(2.11)式为无量纲方程, 式中各物理量均为无量纲量.

三、摄 动 过 程

选择壳中的最大挠度 W_0 为摄动参数, 并将所有物理量展开为 W_0 的幂级数

$$\{U\} = \sum_{i=1}^{\infty} \{U^{(i)}\} W_0^i; \quad \{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^{\infty} \{\varepsilon^{(i)}\} W_0^i; \quad \{\sigma\} = \sum_{i=1}^{\infty} \{\sigma^{(i)}\} W_0^i \quad (3.1)$$

式中 $\{U^{(i)}\}$, $\{\varepsilon^{(i)}\}$, $\{\sigma^{(i)}\}$ 分别表示第 i 级摄动的位移、应变、内力系数矩阵.

在比例加载的情况下, 设壳的所有外力均按同一比例变化, 则可写成

$$\{q\} = T\{q^0\}; \quad \{F_j\} = T\{F_j^0\} \quad (3.2)$$

其中, $\{q^0\}$, $\{F_j^0\}$ 表示外载分布规律, 它们只是坐标的函数, 而 T 则为表示外力大小的量, 它是 W_0 的函数, 故 T 亦可展成 W_0 的幂级数

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} t^{(i)} W_0^i \quad (3.3)$$

将(3.1), (3.2), (3.3)代入(2.11)后, 即得

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^m \{\delta \varepsilon^{(k)}\}^T \{\sigma^{(m-k+1)}\} \right) W_0^{m+1} \right] r ds \\ & - \int_{L_q} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^m \{\delta U_1^{(k)}\}^T t^{(m-k+1)} \right) W_0^{m+1} \right] r ds \{q^0\} \\ & - \sum_{j=1} r_j \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^m \{\delta U\}^T t^{(m-k+1)} \right) W_0^{m+1} \right] \{F_j^0\} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

归并同次幂项后, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \left[\int_0^L \{\delta \varepsilon^{(k)}\}^T \{\sigma^{(m-k+1)}\} r ds - \int_{L_q} \{\delta U_1^{(k)}\}^T t^{(m-k+1)} \{q^0\} r ds \right. \\ & \left. - \sum_{j=1} r_j \{\delta U^{(k)}\}^T t^{(m-k+1)} \{F_j^0\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{设 } \{e^{(k)}\} = \{e^{(k)_1}\} + \{e^{(k)_2}\} \quad (3.6)$$

其中

$$\{e^{(k)_1}\} = \begin{bmatrix} \frac{du^{(k)}}{ds} + \frac{w^{(k)}}{R_s} \\ \frac{1}{r} w^{(k)} \cos \varphi + u^{(k)} \sin \varphi \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{u^{(k)}}{R_s} - \frac{dw^{(k)}}{ds} \right) \\ \frac{\sin \varphi}{r} \left(\frac{u^{(k)}}{R_s} - \frac{dw^{(k)}}{ds} \right) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

称为 k 级线性应变摄动系数矩阵。

$$\{e^{(k)}\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \beta^{(j)} \beta^{(k-j)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k \geq 2 \quad (3.8)$$

称为 k 级非线性应变摄动系数矩阵。

由(3.6), (3.7), (3.8)式得

$$\{\delta e^{(k)}\} = \{\delta e^{(k)}\} + \sum_{j=1}^{k-1} \{\delta \beta^{(j)}\} \beta^{(k-j)} \quad (3.9)$$

式中 $\{\delta \beta^{(j)}\} = [\delta \beta^{(j)}, 0, 0, 0]^T$ (3.10)

由(3.7)式知, $\{U^{(k)}\}$ 确定了, $\{e^{(k)}\}$ 便可确定; 而由(3.8)式可知, $\{e^{(k)}\}$ 与 $k-1$ 级以下各级位移摄动系数有关, 故 k 级摄动时 $\{e^{(k)}\}$ 是已知的。

将(3.9)代入(3.5)式并经整理后得

$$\sum_{k=1}^m \left[\int_0^L \{\delta e^{(k)}\}^T \{\sigma^{(m-k+1)}\} r ds + \int_0^L \{\delta \beta^{(k)}\}^T \sum_{j=1}^{m-k} \beta^{(j)} \{\sigma^{(m-k-j+1)}\} r ds \right. \\ \left. - \int_0^L \{\delta U^{(k)}\}^T t^{(m-k+1)} \{q^0\} r ds - \sum_{i=1} r_j \{\delta U^{(k)}\}^T t^{(m-k+1)} \{F_i^0\} \right] = 0 \quad (3.5a)$$

($m=1, 2, 3, \dots$)

若设 k 级摄动系数的变分不为零, 而其余各级摄动系数的变分均为零, 上式即得

$$\int_0^L \{\delta e^{(k)}\}^T \{\sigma^{(m-k+1)}\} r ds + \int_0^L \{\delta \beta^{(k)}\}^T \sum_{j=1}^{m-k} \beta^{(j)} \{\sigma^{(m-k-j+1)}\} r ds \\ - \int_0^L \{\delta U^{(k)}\}^T t^{(m-k+1)} \{q^0\} r ds - \sum_{i=1} r_j \{\delta U^{(k)}\}^T t^{(m-k+1)} \{F_i^0\} = 0 \quad (3.5b)$$

设 $i = m - k + 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), 则有

$$\int_0^L \{\delta e^{(k)}\}^T \{\sigma^{(i)}\} r ds + \int_0^L \{\delta \beta^{(k)}\}^T \sum_{j=1}^{i-1} \beta^{(j)} \{\sigma^{(i-j)}\} r ds \\ - \int_0^L \{\delta U^{(k)}\}^T t^{(i)} \{q^0\} r ds - \sum_{i=1} r_j \{\delta U^{(k)}\}^T t^{(i)} \{F_i^0\} = 0 \quad (3.5c)$$

四、有限元法的应用

利用有限元法解(3.5c)式的方程, 将得到各级位移、应变、内力摄动系数的解。

考虑到轴对称问题, 取环状壳单元, 并简化为 R_0 为常量的简单直线单元。以 m, n 结点的切向、法向位移和转角的 i 级摄动系数为独立变量 (如图5), 即

$$\{W^{(i)}\}^e = [u_m^{(i)}, w_m^{(i)}, \beta_m^{(i)}, u_n^{(i)}, w_n^{(i)}, \beta_n^{(i)}]^T \quad (4.1)$$

令 $\xi = \frac{s}{l_e}$ 并设单元的位移模式为

$$u^{(i)} = a_1 + a_2 \xi, \quad w^{(i)} = \gamma_1 + \gamma_2 \xi + \gamma_3 \xi^2 + \gamma_4 \xi^3 \quad (4.2)$$

将结点位移的 i 级摄动系数 $\{W^{(i)}\}^e$ 及结点坐标 r_m, r_n 代入(4.2)式, 解出 $a_1, a_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ 并代回(4.2)式得到

$$\{U^{(i)}\}^e = [N] \{W^{(i)}\}^e \quad (4.3)$$

$$\{U^{(j)}\}^e = [N_2] \{W^{(i)}\}^e \quad (4.4)$$

$$\{\beta^{(i)}\}^e = [C] \{W^{(i)}\}^e \quad (4.5)$$

其中

$$[N]_{3 \times 6} = \begin{Bmatrix} [N_2]_{2 \times 6} \\ [N_1]_{1 \times 6} \end{Bmatrix}, \quad [C]_{4 \times 6} = \begin{Bmatrix} [N_1]_{1 \times 6} \\ [0]_{3 \times 6} \end{Bmatrix}$$

将(4.3)式代入(3.7)式得单元 i 级摄动系数的线性应变与结点位移之间的关系

$$\{e^{(i)}\}^e = [B] \{W^{(i)}\}^e \quad (4.6)$$

根据(2.5)式可推出

$$\{\sigma^{(i)}\}^e = [D] \{e^{(i)}\}^e \quad (4.7)$$

将(3.6)代入(4.7)式有

$$\{\sigma^{(i)}\}^e = [D] (\{e^{(i)}\}^e + \{e^{(i)}_n\}^e) = \{\sigma^{(i)}\}^e + \{\sigma^{(i)}_n\}^e \quad (4.8)$$

将(4.3)、(4.4)、(4.5)、(4.6)、(4.8)式代入(3.5c), 且由于 k 级结点位移摄动系数的变分是任意的, 其系数应为零, 得到

$$\begin{aligned} & \sum_j \left[\int_0^{l_e} [B]^T [D] [B] r ds \{W^{(i)}\}^e + \int_0^{l_e} [B]^T \{\sigma^{(i)}_n\}^e r ds \right. \\ & \left. + \int_0^{l_e} [C]^T \sum_{j=1}^{i-1} \beta^{(j)0} \{\sigma^{(i-j)}\}^e r ds - \int_0^{l_e} [N_2]^T t^{(i)} \{q^0\}^e r ds \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{i-1} r_j [N]^T t^{(i)} \{F^0\}^e \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

式中

$$\{\sigma^{(i)}_n\}^e = \frac{1}{2} [D] [C] [A^{(i)}]^e [N_1]^T$$

$$\text{且 } [A^{(i)}]^e = \sum_{j=1}^{i-1} \{W^{(j)}\}^e \{W^{(i-j)}\}^{eT}$$

$$\beta^{(j)0} \{\sigma^{(i-j)}\}^e = [N_1] \{W^{(j)}\}^e \left([D] [B] \{W^{(i-j)}\}^e + \frac{1}{2} [D] [C] [A^{(i-j)}]^e [N_1]^T \right)$$

若定义

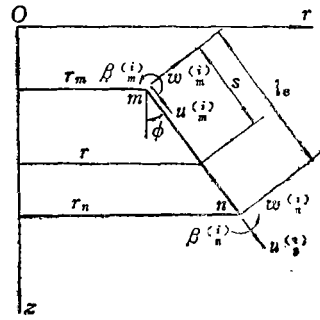


图 5

$$\left. \begin{aligned}
 [K]^e &= \int_0^{t^e} [B]^T [D] [B] r ds \\
 \{P_C\}^e &= \int_0^{t^e} [N_2]^T \{q^0\}^e r ds + \sum_{j=1}^{i-1} r_j [N]^T \{F^j\}^e \\
 \{P_A^{(i)}\}^e &= \frac{1}{2} \int_0^{t^e} [B]^T [D] [C] [A^{(i)}]^e [N_1]^T r ds \\
 &\quad + \int_0^{t^e} [C]^T [D] [B] [A^{(i)}]^e [N_1]^T r ds \quad (i \geq 2) \\
 \{P_B^{(i)}\}^e &= \frac{1}{2} \int_0^{t^e} [C]^T [D] [C] \sum_{j=1}^{i-1} [A^{(i-j)}]^e [N_1]^T \{W^{(j)}\}^e [N_1]^T r ds \\
 &\quad (i \geq 3)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

将(4.10)式代入(4.9)式得:

$$\sum_i ([K]^e \{W^{(i)}\}^e = t^{(i)} \{P_C\}^e - \{P_A^{(i)}\}^e - \{P_B^{(i)}\}^e) \quad (4.11)$$

将各单元集成后, (4.11)式即得

$$[K] \{W^{(i)}\} = t^{(i)} \{P_C\} - \{P_A^{(i)}\} - \{P_B^{(i)}\} \quad (4.12)$$

(4.12)式中 $[K]$, $\{P_A^{(i)}\}$, $\{P_B^{(i)}\}$, $\{P_C\}$ 都是单元矩阵(4.10)式集成后的结果。 $\{P_C\}$ 是与外载有关的常量列阵, $\{P_A^{(i)}\}$, $\{P_B^{(i)}\}$ 是只与 $i-1$ 级摄动以前的计算结果有关的列阵, 对于 i 级摄动来说, 它们是已知量。当 $i=1$ 时, $\{P_A^{(i)}\}$, $\{P_B^{(i)}\}$ 均为零, 此时方程(4.12)式成为

$$[K] \{W^{(1)}\} = t^{(1)} \{P_C\} \quad (4.13)$$

(4.13)式所对应的解 $\{W^{(1)}\}$, $t^{(1)}$ 即为线性解。在求得第一级摄动的线性解 $\{W^{(1)}\}$ 后, 可以根据(4.10)式确定(4.11)式中的 $\{P_A^{(2)}\}^e$, $\{P_B^{(2)}\}^e$ 以及(4.12)式中的 $\{P_A^{(2)}\}$, $\{P_B^{(2)}\}$, 再由(4.12)式求出 $\{W^{(2)}\}$ ……按上述方法循环进行下去, 将求得各级位移、应变、内力摄动系数的值。(4.12)式中 $[K]$ 是总刚度矩阵, 在各级摄动中它是一个常量矩阵。因此在编计算机程序时, 采用三角分解的方法进行(4.12)式方程的求解, 最为方便。

还值得一提的是, 在求解上述方程的过程中, 有一个系数 $t^{(i)}$ 未知, 这要根据 O 点的位移等于摄动参数 W_0 这一条件来确定。设 w_0 表示 O 点的法向位移, 其幂级数展开式是

$$w_0 = w_0^{(1)} W_0 + w_0^{(2)} W_0^2 + \dots = W_0$$

于是得到

$$w_0^{(1)} = 1, w_0^{(i)} = 0 \quad (i \neq 1) \quad (4.14)$$

根据这些条件可确定出各级 $t^{(i)}$ 的数值。

五、算 例

运用摄动有限元法, 我们具体计算了正截锥壳在集中力和均布力两种载荷分别作用下的位移和内力、壳的几何尺寸和载荷情况如图6、图7所示。

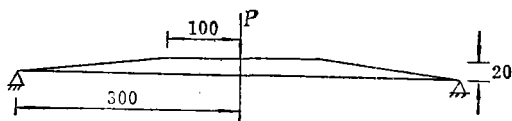


图 6

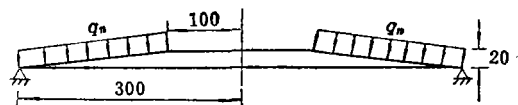


图 7

在此,材料的泊松比 ν 取为0.3,壳厚 h 取为一个单位.计算结果:集中力作用下壳中位移、内力的分布及外载与最大挠度之间的关系如图8~14,均布力作用下壳中的上述关系如图15~21所示;图中分别用①、②标出摄动参数取1和2时的结果.

从图中可以看到用本方法算得的壳中内力是满足边界条件的.考虑非线性项后,内力大小有不少变化,如壳体受均布载荷情况下, \bar{N}_θ 的非线性解与其对应的线性解的最大误差可达53%.

为了校核本方法的正确性,我们计算了环板在集中力载荷作用下的位移(如图22).得到结果所绘曲线(如图23)与叶开沅教授在《环形薄板大挠度问题》^[2]一文中的摄动解完全一样.这也从一个方面说明摄动有限元法的可靠性.

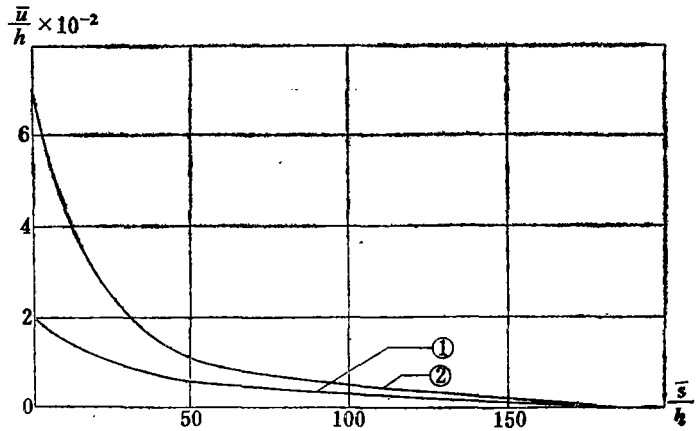


图 8

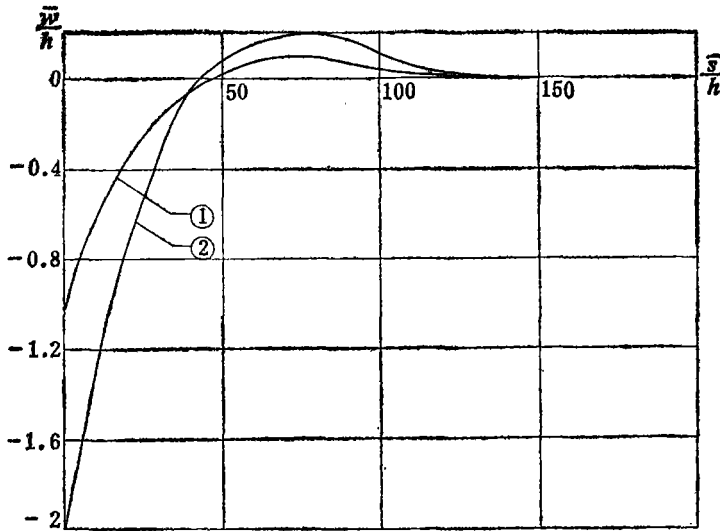


图 9

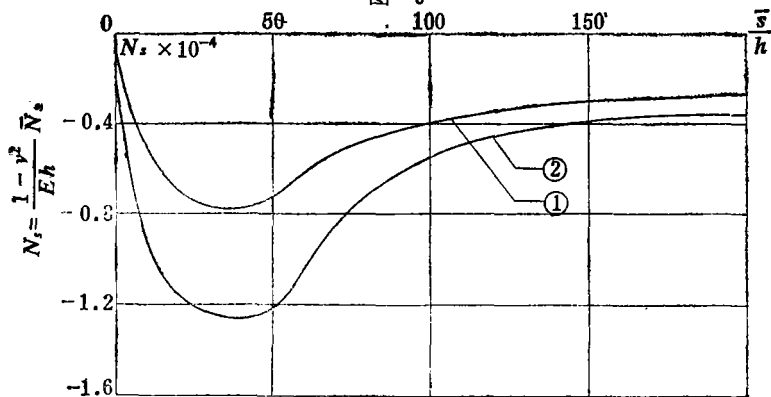


图 10

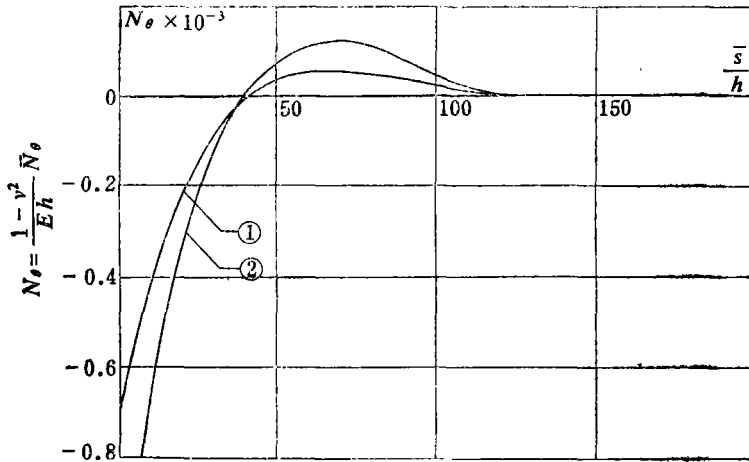


图 11

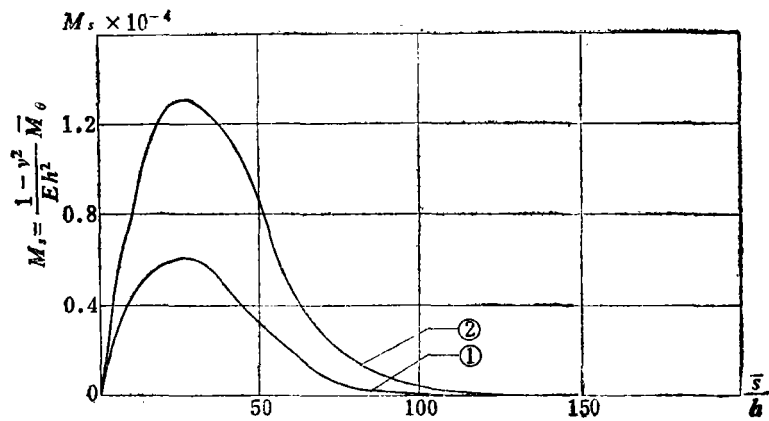


图 12

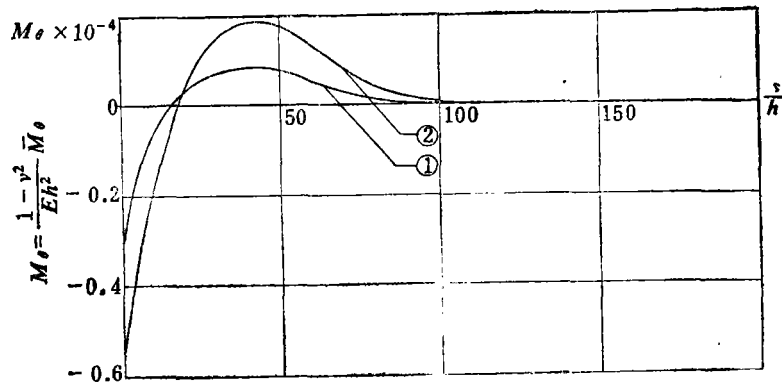


图 13

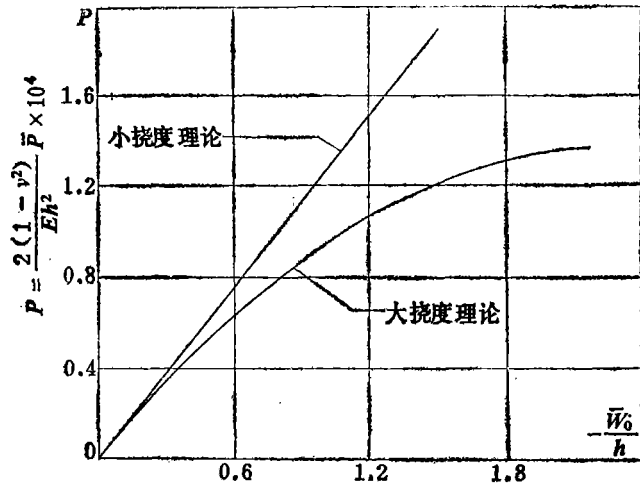


图 14

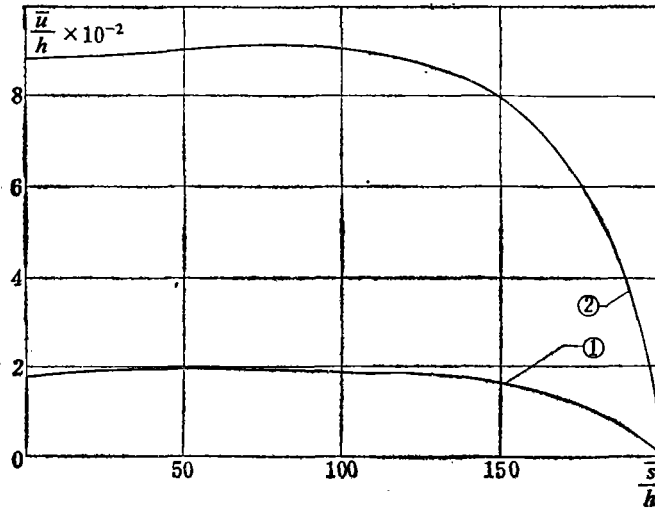


图 15

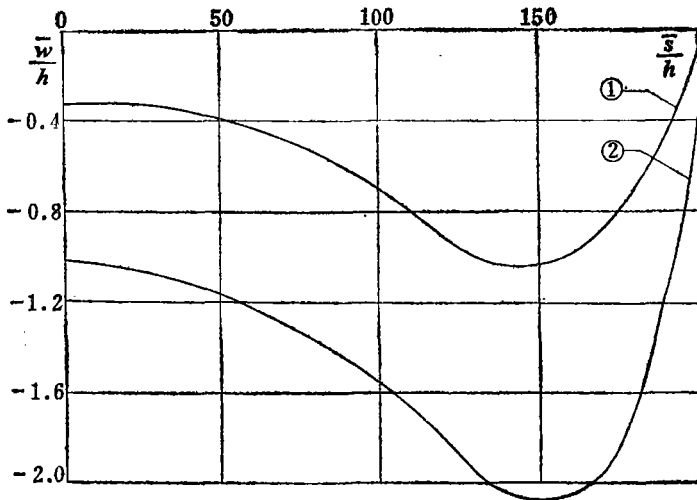


图 16

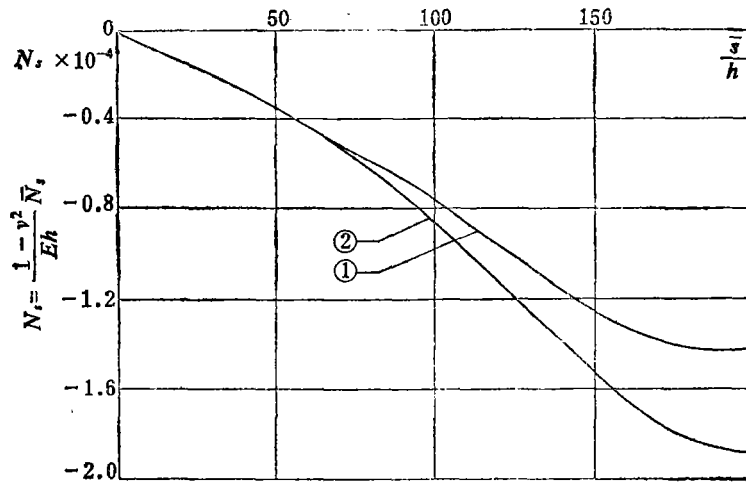


图 17

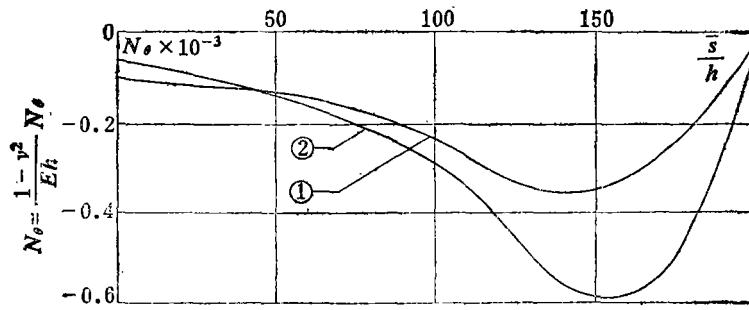


图 18

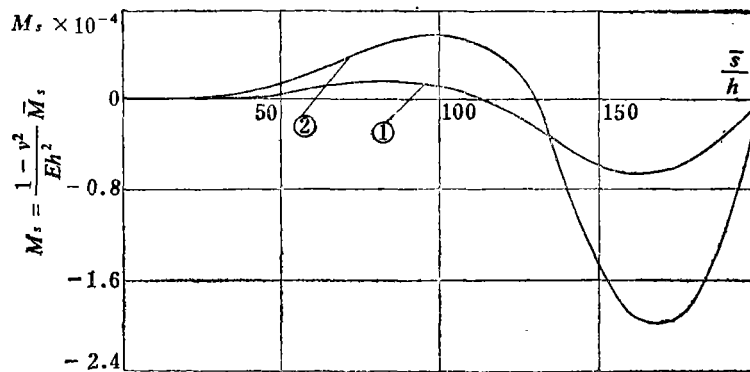


图 19

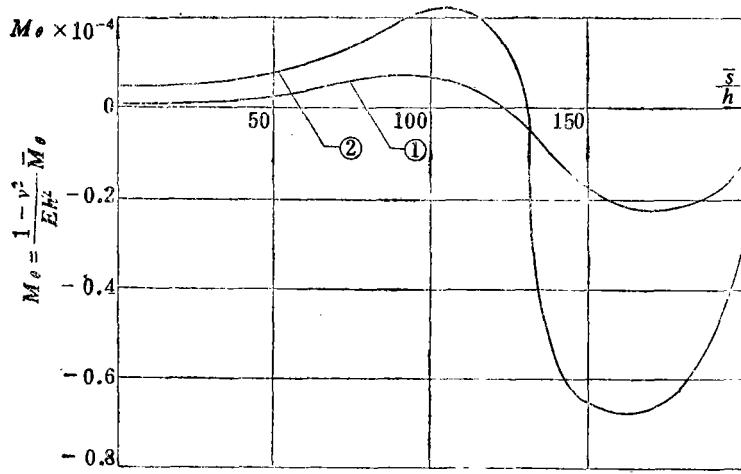


图 20

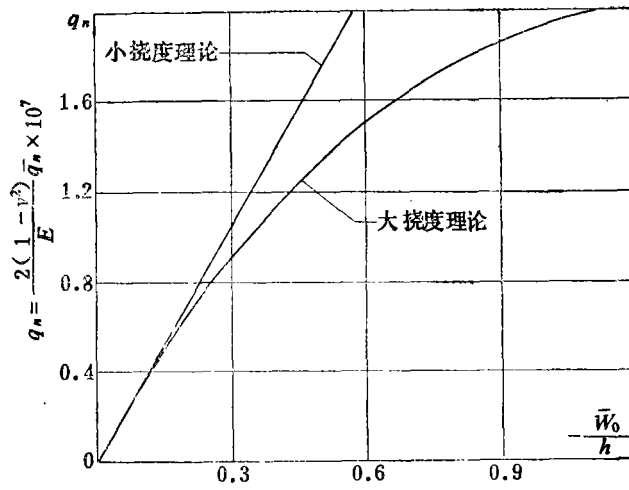


图 21

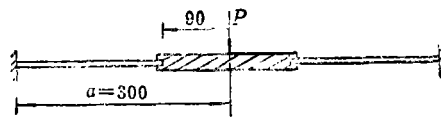


图 22

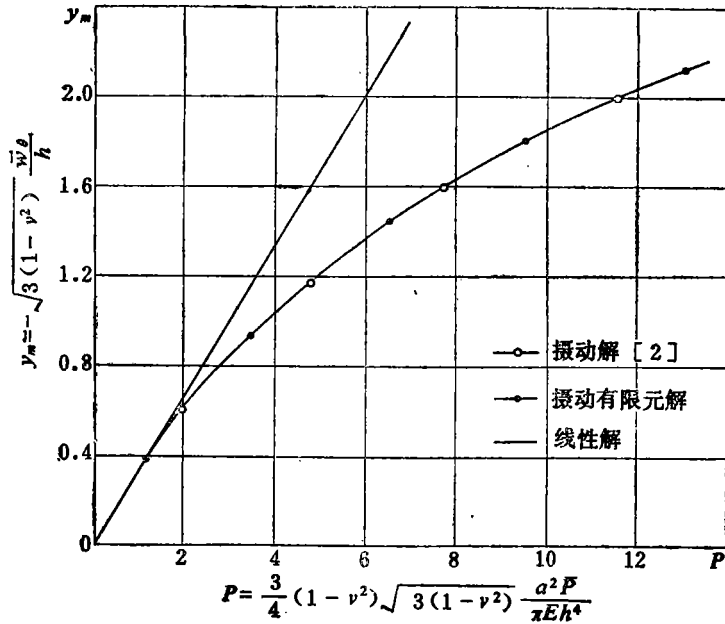


图 23

六、讨 论

用本方法解得的壳之最大挠度与载荷间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \{F\} &= (t^{(1)}W_0 + t^{(2)}W_0^2 + \dots) \{F^0\} \\ \{q\} &= (t^{(1)}W_0 + t^{(2)}W_0^2 + \dots) \{q^0\} \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

将计算结果代入(6.1)式, 得

集中力作用下: $\{F\} = (-12.550W_0 - 3.120W_0^2 - 0.030W_0^3 + \dots) \{F^0\}$

且 $\{F^0\} = \frac{1}{2000\sqrt{404} \pi} [20, -200, 0]^T$

均布力作用下: $\{q\} = (-0.034W_0 - 0.017W_0^2 - 0.002W_0^3 + \dots) \{q^0\}$

且 $\{q^0\} = [0, -1]^T$

而由小挠度理论, 即线性解得到的关系分别为

$$\{F\} = t^{(1)}W_0 \{F^0\} = -12.55W_0 \{F^0\}$$

$$\{q\} = t^{(1)}W_0 \{q^0\} = -0.0341W_0 \{q^0\}$$

当摄动参数 W_0 较小时, 线性部分占主导地位, 但当 W_0 增大时, 非线性部分越来越重要。如在壳受集中力作用下, 当 $|W_0| = 0.5$ 时, 大挠度理论与小挠度理论相差 12.3%, 当 $|W_0| = 1$ 时, 二者相差 24.4%。并且在所计算的两例中, 对应一定大小的外载, 大挠度理论的位移值要大于小挠度理论所对应的解。

由于摄动有限元法并不需要用迭代法计算, 故不会出现用普通有限元法解非线性问题时所常遇到的迭代收敛问题。这样可节省大量计算时间。但是, 由于摄动参数不能过大, (算例中 $W_0 \leq 2$) 因而此方法的应用亦受到一定限制。

联合使用摄动法和有限元法, 除上述过程 (在变分中引入摄动, 再用有限元法解各级变

分摄动方程)外,还可以先利用有限元法得到非线性代数方程组,再引进摄动法进行求解。根据我们的证明,由这两条途径得到的结果是完全一致的。

本文所利用的摄动与有限元相结合的方法,也可以用来解决材料非线性问题^[7]及几何、材料均为非线性的复合问题。

参 考 文 献

- [1] Chien Wei-zang, Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese Journal of Physics*, 7, 2(1947), 102—113.
- [2] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅,《弹性圆薄板大挠度问题》,中国科学院出版(1954).
- [3] Stanley, P., *Nonlinear Problems in Stress Analysis*, Applied Science Publishers Ltd, London(1977).
- [4] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*(1977).
- [5] 李大潜等,《有限元法选讲》,科学出版社(1976).
- [6] Tottenham, H. and S. Y. Barony, Mixed finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shells of revolution, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12, 2(1978), 195—201.
- [7] 谢志成、王瑞五、杨学忠、钱振东,在材料非线性问题中的摄动有限元法, *应用数学和力学*, 4, 1(1983).

Perturbation Finite Element Method for Solving Geometrically Non-linear Problems of Axisymmetrical Shell

Xie Zhi-cheng Yang Xue-zhong Chien Zhen-dong
Liu Yan Zhang Li-ping

(Dept. of Engineering Mechanics, Qinghua University, Beijing)

Abstract

In analysing the geometrically non-linear problem of an axisymmetrical thin-walled shell, the paper combines the perturbation method with the finite element method by introducing the former into the variational equation to obtain a series of linear equations of different orders and then solving the equations with the latter. It is well known that the finite element method can be used to deal with difficult problems as in the case of structures with complicated shapes or boundary conditions, and the perturbation method can change the nonlinear problems into linear ones. Evidently the combination of the two methods will give an efficient solution to many difficult nonlinear problems and clear away some obstacles resulted from using any of the two methods solely.

The paper derives all the formulas concerning an axisymmetric shell of large deformation by means of the perturbation finite element method and gives two numerical examples, the results of which show good convergence characteristics.