应用数学和力学，第5卷第5期（1984年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

幂硬化不可压缩材料平面应变问题的解法*

林 拜 松

（中南矿冶学院，1983年9月9日收到）

摘 要

根据Илюшин微小弹塑性变形理论，本文导出了幂硬化不可压缩材料平面应变问题的基本方程.

另外，本文提出了这些基本方程的两种解法，即位移函数-应力法和应力函数-应变法.举了两个实例来说明这两个方法的应用.

一、前 言

根据变形理论、幂硬化规律及不可压缩条件，Соколовский[1]导出了塑性平面应变问题的基本方程，并研究了平面楔的塑性平衡．但是，他未给出基本方程的一般解法．

Hutchinson，Rice和Rosengren[2~4]已用应力函数$\varphi(r,\theta)$求解了幂硬化不可压缩材料平面应变问题．但是，控制$f(\theta)$的四阶微分方程却无法求解.这里，$f(\theta)$是$\varphi(r,\theta)$的θ变化．另外，位移函数$\psi(r,\theta)$没有用来求解这类平面应变问题．

根据Илюшин微小弹塑性变形理论，本文导出了幂硬化不可压缩材料平面应变问题的基本方程．并用位移函数求解这些基本方程，得到了控制$\psi(r,\theta)$的偏微分方程，它形式上与控制$\varphi(r,\theta)$的偏微分方程相同．当用分离变量法解这些偏微分方程时，我们发现，$g(\theta)$和$f(\theta)$的四阶微分方程二者形式上亦相同．这里，$g(\theta)$是$\psi(r,\theta)$的θ变化．

为了克服$f(\theta)$（或$g(\theta)$）的四阶微分方程求解的困难，我们将$f(\theta)$（或$g(\theta)$）的四阶微分方程化为$\tilde{\varepsilon}_\theta(\theta)$（或$\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta)$）的二阶线性齐次微分方程．这样，问题就容易解决．这里，$\tilde{\varepsilon}_\theta(\theta)$和$\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta)$分别表示$\varepsilon_\theta(r,\theta)$和$\tau_{r\theta}(r,\theta)$的$\theta$变化．

作为上述解法的应用实例，本文研究了Ⅰ型裂纹尖端处的平面应变塑性奇异场和平面楔的塑性应力场．

二、基 本 方 程

根据Илюшин微小弹塑性变形理论，幂硬化不可压缩材料平面应变问题在极坐标中的

* 钱伟长推荐.

基本方程为：

（1） 平衡方程

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0,\quad \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}=0 \tag{2.1}$$

这两个方程可以合并成一个方程：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tau_{r\theta}}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\tau_{r\theta})}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\sigma_{r,\theta}}{\partial\theta}\right)=0 \tag{2.2}$$

其中：$\sigma_{r,\theta}=\sigma_r-\sigma_\theta$

（2） 应变位移关系

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},\quad \gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r} \tag{2.3}$$

（3） 不可压缩条件

$$\varepsilon_r+\varepsilon_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}=0 \tag{2.4}$$

（4） 相容方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varepsilon_r}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\varepsilon_r)}{\partial r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial\gamma_{r\theta}}{\partial\theta}\right)=0 \tag{2.5}$$

（5） 应力应变关系和幂硬化规律

1）

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_r=-\varepsilon_\theta=\frac{3}{4}\frac{\varepsilon_e}{\sigma_e}\cdot\sigma_{r,\theta}\\&\gamma_{r\theta}=3\cdot\frac{\varepsilon_e}{\sigma_e}\cdot\tau_{r\theta}\\&\varepsilon_e=a\sigma_e^n\qquad(1\leqslant n<\infty)\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

2）

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{r,\theta}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}\cdot\varepsilon_r\\&\tau_{r\theta}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}\cdot\gamma_{r\theta}\\&\sigma_e=A\varepsilon_e^N\qquad(0<N\leqslant1)\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

式中，有效应力σ_e和有效应变ε_e分别为：

$$\sigma_e=\left(\frac{3}{4}\cdot\sigma_{r,\theta}^2+3\cdot\tau_{r\theta}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.8}$$

和

$$\varepsilon_e=\left(\frac{4}{3}\cdot\varepsilon_r^2+\frac{1}{3}\cdot\gamma_{r\theta}^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.9}$$

（6） 用ε_e（或σ_e）和ω表示ε_{ij}（或σ_{ij}）为：

1）

$$\varepsilon_r=-\varepsilon_\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\varepsilon_e\cdot\cos\omega,\quad \gamma_{r\theta}=\sqrt{3}\,\varepsilon_e\cdot\sin\omega \tag{2.10}$$

2)

$$\sigma_{r,\theta}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sigma_e\cdot\cos\omega,\quad \tau_{r\theta}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sigma_e\cdot\sin\omega \tag{2.11}$$

这里，$\omega=2\alpha$，而α是最大主应力σ_1与r轴的夹角。

众所周知，在比例加载下，弹塑性体内每一点的主应力方向与主应变方向重合；而且，在加载过程中，每一点的主方向始终保持不变。所以，我们可以取线弹性解的应力主方向作为弹塑性体的主方向，从而确定了ω。

三、位移函数-应力法

取径向位移u_r和切向位移u_θ作为基本未知量，于是，用$\psi(r,\theta)$表示的u_r和u_θ为：

$$u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad u_\theta=-\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{3.1}$$

这样，不可压缩条件(2.4)和相容方程(2.5)都被满足。

将式(3.1)代入式(2.3)，应变分量就可用位移函数$\psi(r,\theta)$表示如下：

$$\varepsilon_r=-\varepsilon_\theta=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right),\quad \gamma_{r\theta}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) \tag{3.2}$$

然后，式(2.7)可以写成：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{r,\theta}&=\frac{4A}{3}\cdot\varepsilon_e^{N-1}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\\ \tau_{r\theta}&=\frac{A}{3}\cdot\varepsilon_e^{N-1}\cdot\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

以之代入方程(2.2)，得到：

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{r_2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r)}{\partial r^2}\right)\left\{\varepsilon_e^{N-1}\cdot\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}-r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\right]\right\}\\ &\qquad+\frac{4}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left[r\varepsilon_e^{N-1}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right]=0\end{aligned} \tag{3.4}$$

这是控制$\psi(r,\theta)$的偏微分方程，它与控制应力函数$\varphi(r,\theta)$的偏微分方程([3]，方程(29))形式上相同。

设方程(3.4)有如下形式的解：

$$\psi(r,\theta)=Mr^\lambda\cdot g(\theta) \tag{3.5}$$

其中，M和λ是常参数。于是得到控制$g(\theta)$的四阶微分方程分为：

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-N(\lambda-2)(N(\lambda-2)+2)\right]\left\{\tilde{\varepsilon}_e^{N-1}(\theta)\left[\lambda(\lambda-2)g(\theta)+\frac{\partial^2 g(\theta)}{\partial\theta^2}\right]\right\}\\ &\qquad+4(\lambda-1)[N(\lambda-2)+1]\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{\varepsilon}_e^{N-1}(\theta)\cdot\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}\right)=0\end{aligned} \tag{3.6}$$

这个方程亦与控制$f(\theta)$的四阶微分方程([3]，方程(3.1))形式上相同。

这里

$$\left.\begin{array}{ll} u_r=Mr^{\lambda-1}\cdot\tilde{u}_r(\theta), & \tilde{u}_r(\theta)=\dfrac{\partial g(\theta)}{\partial\theta} \\ u_\theta=Mr^{\lambda-1}\cdot\tilde{u}_\theta(\theta), & \tilde{u}_\theta(\theta)=-\lambda g(\theta) \\ \varepsilon_r=-\varepsilon_\theta=Mr^{\lambda-2}\cdot\tilde{\varepsilon}_r(\theta), & \tilde{\varepsilon}_r(\theta)=(\lambda-1)\dfrac{\partial g(\theta)}{\partial\theta} \\ \gamma_{r\theta}=Mr^{\lambda-2}\cdot\tilde{\gamma}_{r\theta}(\theta), & \tilde{\gamma}_{r\theta}(\theta)=\dfrac{\partial^2 g(\theta)}{\partial\theta^2}+\lambda(\lambda-2)g(\theta) \\ \sigma_{r,\theta}=AM^N\cdot r^{N(\lambda-2)}\cdot\tilde{\sigma}_{r,\theta}(\theta), & \tilde{\sigma}_{r,\theta}(\theta)=\dfrac{4}{3}\cdot(\tilde{\varepsilon}_e(\theta))^{N-1}\cdot\tilde{\varepsilon}_r(\theta) \\ \tau_{r\theta}=AM^N\cdot r^{N(\lambda-2)}\cdot\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta), & \tilde{\tau}_{r\theta}=\dfrac{1}{3}(\tilde{\varepsilon}_e(\theta))^{N-1}\cdot\tilde{\gamma}_{r\theta}(\theta) \\ \varepsilon_e=Mr^{\lambda-2}\cdot\tilde{\varepsilon}_e(\theta), & \tilde{\varepsilon}_e(\theta)=\left(\dfrac{4}{3}\cdot\tilde{\varepsilon}_r^2(\theta)+\dfrac{1}{3}\tilde{\gamma}_{r\theta}^2(\theta)\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \quad (3.7a\sim n)$$

注意到式(3.7e～n)，方程(3.6)可改写成：

$$\frac{d^2\tilde{\tau}_{r\theta}}{d\theta^2}-N(\lambda-2)[N(\lambda-2)+2]\tilde{\tau}_{r\theta}+[N(\lambda-2)+1]\frac{d\tilde{\sigma}_{r,\theta}}{d\theta}=0 \quad (3.8)$$

该方程可以分解成两个常微分方程：

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2\tilde{\tau}_{r\theta}}{d\theta^2}-N(\lambda-2)[N(\lambda-2)+2]\tilde{\tau}_{r\theta}=-k_1(\theta) \\ [N(\lambda-2)+1]\dfrac{d\tilde{\sigma}_{r,\theta}}{d\theta}=k_1(\theta) \end{array}\right\} \quad (3.9)$$

一旦知道了$k_1(\theta)$，就可由这两个方程简单地求出$\tilde{\sigma}_{r,\theta}(\theta)$和$\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta)$。

利用方程(2.11)，方程(3.8)就化为$\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta)$的二阶线性齐次微分方程：

$$\frac{d^2\tilde{\tau}_{r\theta}}{d\theta^2}+[N(\lambda-2)+1]T_1(\theta)\cdot\frac{d\tilde{\tau}_{r\theta}}{d\theta} +\{[N(\lambda-2)+1]T_1'(\theta)-N(\lambda-2)[N(\lambda-2)+2]\}\tilde{\tau}_{r\theta}=0 \quad (3.10)$$

式中：$T_1(\theta)=2\mathrm{ctg}\omega$，$T_1'(\theta)=dT_1(\theta)/d\theta$。

一旦确定了$\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta)$，就可用下式求出$\tilde{\sigma}_{r,\theta}(\theta)$：

$$\tilde{\sigma}_{r,\theta}(\theta)=T_1(\theta)\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta) \quad (3.11)$$

于是，问题得解。

四、应力函数-应变法

利用三节类似方法，我们可以得到下列方程式：

（1） 应力分量与应力函数

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2},\quad \sigma_\theta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2},\quad \tau_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \quad (4.1)$$

（2） 控制$\varphi(r,\theta)$的偏微分方程

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r)}{\partial r^2}\right)\left[\sigma_e^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)\right]$$

$$+\frac{4}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left[r\cdot\sigma_e^{n-1}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)\right]=0 \tag{4.2}$$

(3) 设

$$\varphi(r,\theta)=Kr^s\cdot f(\theta) \tag{4.3}$$

则$f(\theta)$的四阶微分方程是：

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}-n(s-2)[n(s-2)+2]\right\}\left\{\tilde{\sigma}_e^{n-1}\cdot\left[s(2-s)f(\theta)+\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta^2}\right]\right\}$$

$$+4(s-1)[n(s-2)+1]\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\tilde{\sigma}_e^{n-1}\cdot\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}\right)=0 \tag{4.4}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{r,\theta}(\theta)=\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial\theta^2}+s(2-s)f(\theta)\\
&\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta)=(1-s)\frac{\partial f(\theta)}{\partial\theta}\\
&\tilde{\varepsilon}_r(\theta)=-\tilde{\varepsilon}_\theta(\theta)=\frac{3}{4}\cdot\tilde{\sigma}_e^{n-1}(\theta)\cdot\tilde{\sigma}_{r,\theta}(\theta)\\
&\tilde{\gamma}_{r\theta}(\theta)=3\cdot\tilde{\sigma}_e^{n-1}(\theta)\cdot\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta)\\
&\sigma_e=Kr^{s-2}\tilde{\sigma}_e(\theta)\\
&\tilde{\sigma}_e(\theta)=\left(\frac{3}{4}\tilde{\sigma}_{r,\theta}^2(\theta)+3\tilde{\tau}_{r\theta}^2(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}\right\} \tag{4.5a~f}$$

(4) 注意到方程(4.5a～f)，方程(4.4)可以化成如下方程：

$$\frac{d^2\tilde{\varepsilon}_\theta}{d\theta^2}-n(s-2)[n(s-2)+2]\tilde{\varepsilon}_\theta+[n(s-2)+1]\frac{d\tilde{\gamma}_{r\theta}}{d\theta}=0 \tag{4.6}$$

它可以分解成两个方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\tilde{\varepsilon}_\theta}{d\theta^2}-n(s-2)[n(s-2)+2]\tilde{\varepsilon}_\theta=-k_2(\theta)\\
&[n(s-2)+1]\frac{d\tilde{\gamma}_{r\theta}}{d\theta}=k_2(\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

一旦知道了$k_2(\theta)$，就可以用方程(4.7)求出$\tilde{\varepsilon}_\theta(\theta)$和$\tilde{\gamma}_{r\theta}(\theta)$。

(5) $\tilde{\varepsilon}_\theta(\theta)$的二阶线性齐次微分方程为：

$$\frac{d^2\tilde{\varepsilon}_\theta}{d\theta^2}+[n(s-2)+1]T_2(\theta)\cdot\frac{d\tilde{\varepsilon}_\theta}{d\theta}$$

$$+\{[n(s-2)+1]T_2'(\theta)-n(s-2)[n(s-2)+2]\}\tilde{\varepsilon}_\theta=0 \tag{4.8}$$

这里：$T_2(\theta)=-2\mathrm{tg}\omega$，$T_2'(\theta)=dT_2(\theta)/d\theta$

$\tilde{\varepsilon}_\theta(\theta)$确定后，由如下方程算出$\tilde{\gamma}_{r\theta}(\theta)$

$$\tilde{\gamma}_{r\theta}(\theta)=T_2(\theta)\cdot\tilde{\varepsilon}_\theta(\theta) \tag{4.9}$$

这样，问题得解。

五、实　例

(1) Ⅰ型裂纹

我们用位移函数-应力法来确定Ⅰ型裂纹尖端处的平面应变塑性奇异场。

对于幂硬化不可压缩材料平面应变Ⅰ型裂纹，当HRR奇异性成立时，我们有：

$$\lambda=\frac{2N+1}{1+N} \tag{5.1}$$

于是

$$\left.\begin{array}{ll}\varepsilon_r=-\varepsilon_\theta=Mr^{-\frac{1}{1+N}}\cdot\tilde{\varepsilon}_r(\theta), & \gamma_{r\theta}=Mr^{-\frac{1}{1+N}}\cdot\tilde{\gamma}_{r\theta}(\theta)\\ \varepsilon_e=Mr^{-\frac{1}{1+N}}\cdot\tilde{\varepsilon}_e(\theta); & \sigma_{r,\theta}=AM^N\cdot r^{-\frac{N}{1+N}}\cdot\tilde{\sigma}_{r,\theta}(\theta)\\ \tau_{r\theta}=AM^Nr^{-\frac{N}{1+N}}\cdot\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta), & \sigma_e=AM^Nr^{-\frac{N}{1+N}}\tilde{\sigma}_e(\theta)\end{array}\right\} \tag{5.2a～f}$$

平面应变Ⅰ型裂纹的线弹性解给出：

$$T_1(\theta)=2\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad T_1'(\theta)=\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{5.3}$$

代入方程(3.10)得：

$$\frac{d^2\tilde{\tau}_{r\theta}}{d\theta^2}+\frac{2b\sin\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{d\tilde{\tau}_{r\theta}}{d\theta}+\left(\frac{2b}{1+\cos\theta}+1-b^2\right)\tilde{\tau}_{r\theta}=0 \tag{5.4}$$

式中：$b=1/(1+N)$。本方程是一个二阶线性齐次微分方程。

本问题的初始条件是：

$$\tilde{\tau}_{r\theta}(0)=0, \qquad \left.\frac{d\tilde{\tau}_{r\theta}}{d\theta}\right|_{\theta=0}=1 \tag{5.5}$$

应用幂级数法解方程(5.4)，得到：

$$\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta)=\theta-\frac{1}{12}\cdot(a+\beta_0)\theta^3+\frac{1}{480}[2a+6\beta+(a+\beta_0)(\beta_0+8a-2)]\theta^5 \\ +\cdots+C_{2n+3}\cdot\theta^{2n+3}+\cdots \qquad (0\leqslant\theta<\pi) \tag{5.6}$$

式中：

$$\left.\begin{array}{l}a=2b,\ \beta=1-b^2,\ \beta_0=2(b+1-b^2)\\ C_{2n+3}=\dfrac{-1}{2(2n+2)(2n+3)}\left\{a\cdot\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}C_1+\beta_0C_{2n+1}\right.\\ \qquad+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(-1)^i}{(2i)!}\cdot(2n-2i+3)\cdot(2n-2i+2)C_{2n-2i+3}\right.\\ \qquad+\dfrac{a\cdot(-1)^{i+1}}{(2i-1)!}\cdot(2n-2i+3)C_{2n-2i+3}\\ \qquad\left.\left.+\beta\dfrac{(-1)^i}{(2i)!}C_{2n-2i+1}\right]\right\}, \qquad C_1=1\end{array}\right\} \tag{5.7}$$

利用式(4.9)，我们得到：

$$\tilde{\sigma}_{r,\theta}(\theta)=2\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\tilde{\tau}_{r\theta}(\theta) \qquad (0\leqslant\theta<\pi) \tag{5.8}$$

显然，边界条件是：

$$\tilde{\tau}_{r\theta}(\pi)=\tilde{\sigma}_{r,\theta}(\pi)=0 \qquad (5.9)$$

所以问题已解。

（2） 平面楔

我们研究平面楔($\theta=\pm\alpha$)顶端作用着一集中力P的问题（图1）。用应力函数-应变法解这个问题。如同弹性楔一样，假定

$$\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0,\ \sigma_r=\sigma_r(r,\theta),\ s=1,\ K=2\alpha_1 P \qquad (5.10)$$

这里，α_1是一个待定常数。

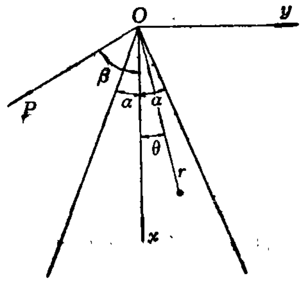

图 1 平面楔

于是，方程(4.6)或(4.8)变成：

$$\frac{d^2\tilde{\varepsilon}_r}{d\theta^2}+n(2-n)\varepsilon_r=0 \qquad (5.11)$$

它有如下三种不同的解：

1) $n=2$的情形

$$\tilde{\varepsilon}_r=c(1+\delta\theta) \qquad (5.12a)$$

2) $n<2$的情形

$$\tilde{\varepsilon}_r=c\cos(n\sqrt{2-n}\cdot\theta+\delta) \qquad (5.12b)$$

3) $n>2$的情形

$$\tilde{\varepsilon}_r=c\,\mathrm{ch}(n\sqrt{n-2}\cdot\theta+\delta) \qquad (5.12c)$$

这里，c和δ是待定常数。

现在，我们来确定$\tilde{\sigma}_r(\theta)$。由方程(4.5c)得：

$$\tilde{\sigma}_r(\theta)=\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{1+n}\cdot\tilde{\varepsilon}_r(\theta)\right]^{\frac{1}{n}} \qquad (5.13)$$

将方程(5.12)代入方程(5.13)并利用条件$\tilde{\sigma}_r(0)=1$，就得到：

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_r=(1+\delta\theta)^{\frac{1}{2}}, && n=2\\
&\tilde{\sigma}_r=\left[\frac{\cos(n\sqrt{2-n}\cdot\theta+\delta)}{\cos\delta}\right]^{\frac{1}{n}}, && n<2\\
&\tilde{\sigma}_r=\left[\frac{\mathrm{ch}(n\sqrt{n-2}\cdot\theta+\delta)}{\mathrm{ch}\delta}\right]^{\frac{1}{n}}, && n>2
\end{aligned}\right\} \qquad (5.14a\sim c)$$

将这些结果与文献[1]中的结果相比较，我们发现，$\tilde{\varepsilon}_r(\theta)$和$\tilde{\sigma}_r(\theta)$分别就是文献[1]中的$\eta$和$\xi$；而且，余下的计算与文献[1]相同。因此，我们就不继续研究这个问题。

参 考 文 献

[1] Соколовский В. В., *Теория Пластичности*, Москва (1950).

[2] Rice, J.R. et al., Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 1(1968), 1—12.

[3] Hutchinson, J. W., Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 1(1968), 13—31.

[4] Hutchinson, J. W., Plastic stress and atrain fields at a crack tip, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 5(1968), 337—347.

Solutions of the Plane-Strain Problems in a Power Hardening and Incompressible Material

Lin Bai-song
(*Central-South Institute of Mining and Metallurgy, Changsha*)

Abstract

According to Iliushin's small elastic-plastic deformation theory, in this paper, we derive the basic equations of plane-strain problems in a power hardening and incompressible material.

In addition, this paper presents two methods to solve these basic equations, i. e. the displacement function-stress method and the stress function-strain method. Two examples were calculated to illustrate the application of these two methods.