

# 用力学子单元模型求解与时间有关的 各向异性塑性问题

卞学镛

(美国麻省理工学院, 1983年5月19日收到)

## 摘 要

本文介绍了用力学子单元模型模拟金属各向异性弹-塑性平面应力行为的作法。模型引用的纵向与横向应力-应变曲线, 是用几个光滑的短线段来表达的; 但为简化起见, 把它们当作分段线性线段。模型已纳入粘塑性杂交应力有限元分析程序。

## 一、概 述

处理与时间有关的弹-塑性问题时, 有一种模型, 用以表达机动硬化, 十分方便。建立这种模型时, 要把弹性-理想塑性元件组合起来, 以表达由几个分段光滑的直线段来近似应力-应变关系曲线。这种模型, 已经广泛地用于求解多轴弹-塑性问题的数值分析工作, 称为力学子层模型或层叠模型<sup>[3,4,6]</sup>。对于包括三维固体在内的一般情形, 此种方法或许被称为力学子单元法。

对于平面应力问题, 此种模型转化为层板, 其各子层皆为弹性-塑性材料, 但各层的屈服应力不同。文[6]导出了引用各向同性应力-应变关系的弹-塑性平面应力问题的微分方程式; 引用的模型有两个子层, 一层为弹性, 另一层为弹性-理想塑性层。方程是非线性的; 对于单轴加载, 应变硬化行为不呈线性。因之, 若以直线线段来近似材料的单轴应力-应变关系, 那么, 严格地说, 用前文描述的力学子层, 并不可能确切表达上述的平面应力问题。文[6]得到了初始切线模量与弹性模量之比, 也得到了两层层厚之比。然而, 我们还是有理由假设: 若使线段充分小, 仍可采用逐段光滑线性模型。哈恩塞克尔(Hunsaker)<sup>[6]</sup>也建立了一个三维各向同性固体的力学子层模型关系。该模型的特点是, 用两个子单元来表示材料, 一个是弹性子单元, 另一个是弹-塑性子单元; 总体的单轴应力-应变关系, 反映了线性应变硬化表现。弹-塑性单元的体积与总体积之比 $V_1/V$ , 简洁地表达为:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{E_1 - E_2}{E_1 - \frac{1-2\nu}{3} E_2}$$

这里,  $E_1$ 为弹性模量,  $E_2$ 为切线模量。由于单轴应力-应变关系是用线性的线段来表示的,

故子单元是确切的。

本文拟将力学子层模型推广，使能概括各向异性塑性材料。本文仍将讨论平面应力问题。这里，作者将把本文建议的力学子单元模型与粘塑性问题杂交应力元分析方法结合起来。本文附有与时间有关的弹-塑性问题求解示例。

## 二、各向异性塑性问题的力学子层模型

图1为在平面应力载荷作用下的双层板模型。层1是弹性-理想塑性层。我们把层1视为横观各向同性，其屈服应力沿纵向与横向分别为 $Y_x$ 与 $Y_y$ 。层2为弹性层。两层具有相同的弹性模量 $E$ 与泊桑比 $\nu$ 。层1的屈服条件按希尔(Hill)广义屈服准则

$$f = [F(\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1})^2 + G(\sigma_{y_1} - \sigma_{z_1})^2 + H(\sigma_{z_1} - \sigma_{x_1})^2 + K\sigma_{x_1 y_1}^2]^{\frac{1}{2}} - \bar{\sigma} = 0 \quad (2.1)$$

这里，沿 $x$ 向单轴受荷时， $\bar{\sigma} = Y_x$ 。若沿 $y$ 与 $z$ 向，单轴屈服应力为 $Y_y$ ，我们可以用屈服应力来表示常量 $F, H$ 等等，从而得出平面应力问题的屈服条件如下：

$$f = [\sigma_{x_1}^2 - \sigma_{x_1}\sigma_{y_1} + \alpha\sigma_{y_1}^2 + \alpha_s\sigma_{x_1 y_1}^2]^{\frac{1}{2}} - Y_x = 0 \quad (2.2)$$

式内，

$$\alpha = (Y_x/Y_y)^2, \quad \alpha_s = (Y_x/Y_{xy})^2 \quad (2.3)$$

流动法则为

$$\dot{\epsilon}_{x_1}^p = \left(\sigma_{x_1} - \frac{1}{2}\sigma_{y_1}\right)\dot{\lambda}, \quad \dot{\epsilon}_{y_1}^p = \left(\alpha\sigma_{y_1} - \frac{1}{2}\sigma_{x_1}\right)\dot{\lambda}, \quad \dot{\epsilon}_{x_1 y_1}^p = \alpha_s\sigma_{x_1 y_1}\dot{\lambda} \quad (2.4)$$

在面内荷载作用下，层板的表性如何？沿 $x$ 与 $y$ 向割取拉伸试件，由实验结果得知，两个方向的弹性模量为 $E_1$ ，而初始切线模量分别为 $E_{x_1}$ 与 $E_{y_1}$ （见图2）。令 $\sigma_x$ 与 $\sigma_y$ 表示面内平均应力，则应力率

$$\dot{\sigma}_y = \dot{\sigma}_{y_1} \frac{t_1}{t} + \dot{\sigma}_{y_2} \frac{t_2}{t} = 0 \quad (2.5)$$

这里， $t$ 为总厚度， $t_1, t_2$ 为各该层的厚度。于是有厚度比：

$$\frac{t_1}{t_2} = -\frac{\dot{\sigma}_{y_2}}{\dot{\sigma}_{y_1}} \quad (2.6)$$

注意，由于层2是弹性的，故有

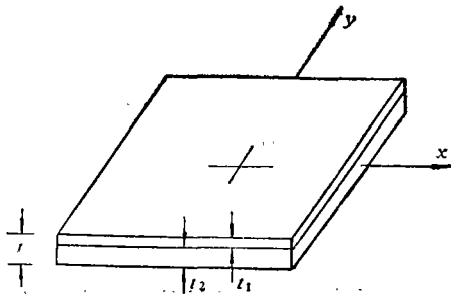


图1 用以描述应变硬化行为的双层模型

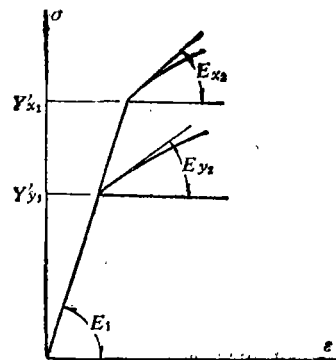


图2 双层模型的单轴应力-应变关系

$$\dot{\sigma}_{y_2} = -\frac{E_1}{1-\nu^2}(\dot{\epsilon}_y + \nu\dot{\epsilon}_x) \quad (2.7)$$

由  $f=0$ , 得到

$$\dot{\sigma}_{x_1}(2\sigma_{x_1} - \sigma_{y_1}) + \dot{\sigma}_{y_1}(2\sigma_{y_1} - \sigma_{x_1}) = 0 \quad (2.8)$$

如是, 在初始屈服时,  $\sigma_y = \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = 0$ , 有

$$\frac{\dot{\sigma}_{y_1}}{\dot{\sigma}_{x_1}} = 2 \quad (2.9)$$

且由式(2.4), 又有

$$\dot{\epsilon}_{x_1}^p = -2\dot{\epsilon}_{y_1}^p \quad (2.10)$$

此外,

$$\dot{\epsilon}_{x_1}^p = \dot{\epsilon}_x - \frac{1}{E_1}(\dot{\sigma}_{x_1} - \nu\dot{\sigma}_{y_1}) \quad (2.11)$$

$$\dot{\epsilon}_{y_1}^p = \dot{\epsilon}_y - \frac{1}{E_1}(\dot{\sigma}_{y_1} - \nu\dot{\sigma}_{x_1}) \quad (2.12)$$

由式(2.9)~(2.12), 可得出

$$\dot{\sigma}_{x_1} = \frac{E_1}{5-4\nu}(\dot{\epsilon}_x + 2\dot{\epsilon}_y) \quad (2.13)$$

$$\dot{\sigma}_{y_1} = \frac{E_1}{5-4\nu}(2\dot{\epsilon}_x + 4\dot{\epsilon}_y) \quad (2.14)$$

由已知的单轴受荷条件, 沿  $y$  的应变率为

$$\dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_y^c + \dot{\epsilon}_y^p = -\nu\dot{\epsilon}_x^c - \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_x^p \quad (2.15)$$

把

$$\dot{\epsilon}_y^p = \dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_x^c \quad (2.16)$$

$$\dot{\epsilon}_x^c = \frac{\dot{\sigma}_x}{E_1} = \frac{\dot{\epsilon}_x E_{x_1}}{E_1} \quad (2.17)$$

代入式(2.15), 得到

$$\dot{\epsilon}_y = \dot{\epsilon}_x \left[ -\frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - \nu \right) \frac{E_{x_1}}{E_1} \right] \quad (2.18)$$

代入式(2.7)与(2.14), 再代入式(2.6), 可得出厚度比如下:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{5-4\nu}{4(1-\nu^2)} \left( \frac{E_1}{E_{x_1}} - 1 \right) \quad (2.19)$$

由此,

$$\frac{t_1}{t} = \frac{t_1}{t_1+t_2} = \frac{E_1 - E_{x_1}}{E_1 - \beta E_{x_1}} \quad (2.20)$$

这里

$$\beta = \frac{(1-2\nu)^2}{5-4\nu} \quad (2.21)$$

应当指出, 对于各向同性材料式(2.9)与(2.10)仍然有效; 对于各向同性材料,  $\beta$  仍同(2.21). 对于一维问题, 塑性单元的面积与总面积之比为

$$\frac{A_1}{A} = \frac{E_1 - E_2}{E_1} \quad (2.22)$$

可见,  $\beta$  为平面应力问题的修正系数. 对于  $\nu=0.3$ , 式(2.21)的  $\beta = (1-2\nu)^2 / (5-4\nu) = 0.0421$ . 由此可见, 若利用沿纵向的单轴表性来求定厚度比, 我们所要作的修正是很小的.

若沿  $y$  轴切取试件, 则当  $\sigma_x = \sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = 0$  时,

$$\frac{\dot{\sigma}_{x_1}}{\dot{\sigma}_{y_1}} = 2\alpha \tag{2.23}$$

$$\varepsilon_{y_1}^p = -2\alpha \varepsilon_{x_1}^p \tag{2.24}$$

采用相同的推导方法，且以  $E_{y_2}$  表示切线模量，则厚度比为

$$\frac{t_1}{t} = \frac{E_1 - E_{y_2}}{E_1 - \beta' E_{y_2}} \tag{2.25}$$

式内，

$$\beta' = \frac{(1 - 2\alpha\nu)^2}{1 - 4\nu\alpha + 4\alpha^2} \tag{2.26}$$

当  $\nu = 0.3$ ，且  $\alpha$  在  $0.5 \sim 2$  之间，则  $\beta'$  在  $0 \sim 0.35$  之间。

令(2.20)等于(2.25)，求解  $E_{y_2}$ ，可得出  $E_{x_2}$  与  $E_{y_2}$  的关系式：

$$E_{y_2} = \frac{(1 - \beta)E_1 E_{x_2}}{(1 - \beta')E_1 - (\beta - \beta')E_{x_2}} \tag{2.27}$$

可见，用力学子层模型表示的各向异性材料，两向的初始切向模量并不相同。若沿两垂直方向给定了应力-应变曲线，则可按下列步骤来建立力学子层。

(1) 在两个方向的应力-应变曲线上，定出初始屈服应力  $Y'_{x_1}$ ， $Y'_{y_1}$ 。这也是子层的屈服应力  $Y_{x_1}$  与  $Y_{y_1}$ ，它们分别等于  $E_1 \varepsilon_{x_1}$  与  $E_1 \varepsilon_{y_1}$ 。

(2) 根据一条曲线，例如沿  $x$  向的曲线，试设初始切线模量  $E_{x_2}$ 。已知  $Y_{x_1}$ ， $Y_{y_1}$  和  $E_{x_2}$ ，则可定出层 1 的  $\alpha$  与  $\beta$ ，故可由式(2.20)算出  $t_1/t$ ，由式(2.27)算出  $y$  向的初始切线模量  $E_{y_2}$ 。

(3) 引用已建立的 2-子层模型，分析两个单轴受荷问题，并求出两向的应力-应变曲线。由这些直线与真实应力-应变曲线的交点，可定出第二组过渡点——在这些点上，第二子层屈服。对应的应力与应变为： $Y'_{x_2}$ ， $Y'_{y_2}$ ， $\varepsilon_{x_2}$ ， $\varepsilon_{y_2}$  (见图3)。尽管就单轴问题的子元模型而言，第二个子层的屈服应力等于  $E_1 \varepsilon_2$ ，但一般地说，新的子层的屈服应力  $Y_{x_2}$ ， $Y_{y_2}$ ，并不等于  $E_1 \varepsilon_{x_2}$ ， $E_1 \varepsilon_{y_2}$ 。

哈恩塞克尔曾就三维各向同性塑性问题，得到了 2-子元模型的闭合解。对于  $E_2 = 0.5E_1$ ， $\varepsilon_2 = 3\varepsilon_1$  的典型情况， $Y'_2$  与  $E_1 \varepsilon_2$  之差，只有 5%。

选择初始切线模量  $E_{x_2}$  时，必须使第二组过渡点确实落到真实的应力-应变曲线上。通常，这要靠迭代过程来实现。

(4) 把平板当作一个新的双层模型，其两向屈服应力等于  $Y_{x_2}$ ， $Y_{y_2}$ 。对下一线段，选取切线模量  $E_{x_3}$ ，按与步骤(2)、(3)相同的做法，引用以下二式，定出  $(t_1 + t_2)/t$ ， $E_{y_3}$ ， $Y'_{x_3}$ ， $Y'_{y_3}$ ， $Y_{x_3}$ ， $Y_{y_3}$ 。

$$\frac{t_1 + t_2}{t} = \frac{E_1 - E_{x_3}}{E_1 - \beta E_{x_3}} \tag{2.28}$$

$$E_{y_3} = \frac{(1 - \beta)E_1 E_{x_3}}{(1 - \beta')E_1 - (\beta - \beta')E_{x_3}} \tag{2.29}$$

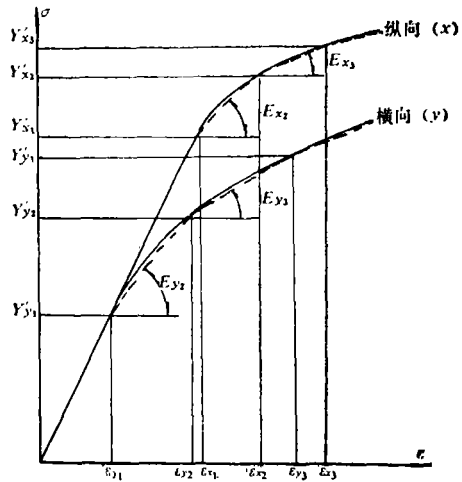


图3 力学子层模型的应力-应变关系

推算 $\beta'$ 时,可引用式(2.26),且令 $\alpha=(Y_{x_2}/Y_{y_2})^2$ 。

(5) 以横向应力-应变曲线为参考曲线,也可以建立力学子层模型。这时,利用式(2.25)来推求厚度比,由式(2.27)解出 $E_{x_i}$ ;  $E_{x_i}$ 是用 $E_{y_i}$ 表达的。

作者求解本文中的平面应力问题时,采用了简化方法。这里,作者用折线代换了纵向以及横向的应力-应变曲线。若给定一个切线模量,则可求出其它的切线模量;仍把后者当作常量。如是,即能定出折线与真实应力-应变曲线的交点。子层的屈服应力可由简单公式推出:

$$Y_{x_i}=E_1\varepsilon_{x_i}, Y_{y_i}=E_1\varepsilon_{y_i} \quad (2.30)$$

### 三、粘塑性理论的有限元法

引用粘塑性模型<sup>[7]</sup>,可以分析与时间有关的弹-塑性问题。对于弹性-理想塑性材料,只须把粘塑性应变率 $\dot{\varepsilon}^{vp}$ 当作

$$\dot{\varepsilon}^{vp}=\gamma\langle\phi\rangle\frac{\partial F}{\partial\sigma} \quad (3.1)$$

式中,  $F(\sigma)=0$  表示屈服面, 且有

$$\langle\phi\rangle=\begin{cases} \bar{\sigma}-\sigma_y, & \bar{\sigma}>\sigma_y \\ 0, & \bar{\sigma}\leq\sigma_y \end{cases} \quad (3.2)$$

$\bar{\sigma}$ 为等效应力,  $\sigma_y$ 为单轴加载的屈服应力,  $\gamma$ 为流动参数;在有关的弹-塑性分析中,  $\gamma$ 为一任意常数。

在力学子层模型中引用的粘弹性模型,由并连的粘塑性元件组成(见图4)。

按有限元法分析平面问题时,要把全域离散为 $N$ 个有限单元的集合;再依照前节介绍的模型建立的办法,把每一有限单元体的厚,分成 $M$ 个子层。关于采用有限元来分析蠕变问题,文[8, 9]已经建议了杂交应力模型的初应变列式。现将该法加以延伸,以处理本文的多层模型。弹-塑性问题的增量解法,其步骤如下:

- (1) 引用杂交应力模型,求出已给载荷增量所对应的节点位移弹性解。
- (2) 在每一单元内,算出选定的高斯积分点的应力增量。
- (3) 在每一高斯积分点上,修改每一子层的应力,并计算对应的等效应力 $\bar{\sigma}$ 。
- (4) 选用时间增量 $\Delta t$ ;在全部高斯积分点上,各子层的粘塑性应变增量为 $\Delta\varepsilon^{vp}=\dot{\varepsilon}^{vp}\Delta t$ 。这里,粘塑性应变率由式(3.1)、(3.2)定出。

(5) 现在,可算出粘塑性应变增量对应的等效节点力。用这些等效节点力来定出本时间增量(正在采用的时间增量)所对应的节点位移。

(6) 重复步骤(2)、(5),直到本时间增量内的应力变化量小于一个预给的限度(这是一个小量)。

至此,每子层的等效应力 $\bar{\sigma}$ 已等于或小于该子层的屈服应力,亦即,已达到与当前的载荷增量对应的稳定应力状态。对于这一弹-塑性问题,采用一个接着一个的时间增量,就等价于对同一问题施加迭代过程。

根据柯尔米欧<sup>[10]</sup>的看法,为保证计算稳定性,选择时间增量 $\Delta t$ 时,可参考:

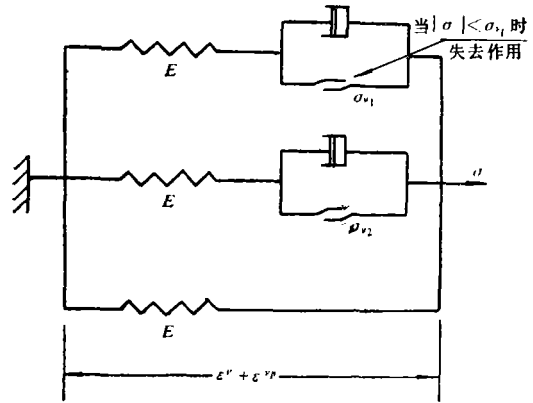


图4 力学子层粘塑性模型

$$\Delta t \leq \frac{4(1+\nu)}{3E\gamma} \quad (3.3)$$

这里,  $E$  为杨氏模量。

#### 四、剪滞结构的各向异性分析

为了举例说明怎样应用本文的各向异性模型来寻求有限元解, 现引用麻省理工学院1963年作过的剪滞结构实验<sup>[11]</sup>。该结构(图5), 是由一块2024-T4 铝合金厚板经铣、刨等工序加工而成的整体结构。结构为一27.94cm×25.4cm×0.203cm的矩形板件, 沿加载轴( $y$ )有带梢的加劲肋(加劲肋与板件为一整体, 二者皆由同一块厚合金板经加工刻出)。在板件中心, 刚度与板件的刚度一致; 这里, 荷载经加劲肋施加于板件, 而在板件中心处, 应力与

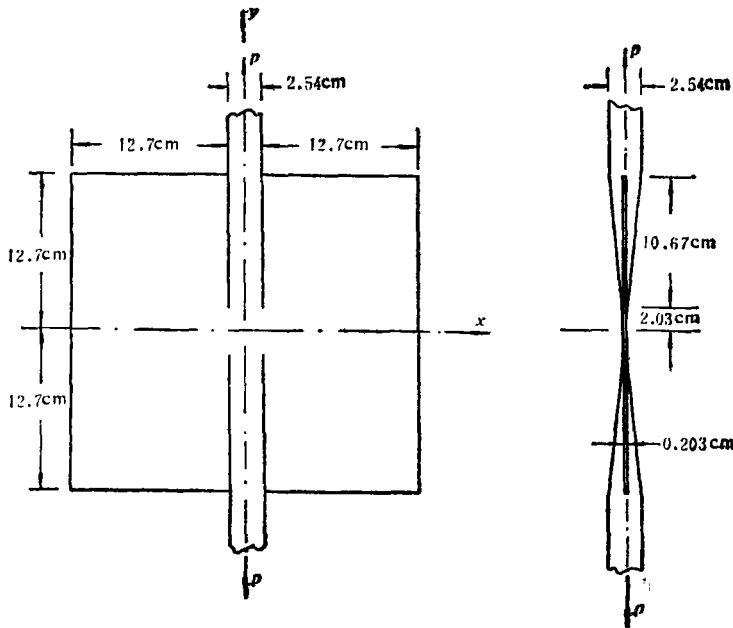


图 5 剪滞结构

应变都呈最高值。图 6 示纵向( $x$ -向)与横向( $y$ -向)的拉伸应力-应变曲线。图 6 也给出了以上两条曲线的平均曲线。

按本文第二节介绍的简化步骤, 作者建立了材料的力学子层模型。图 7 给出了对应的由分段光滑线段组成的应力-应变曲线。原实验并没提供剪切屈服应力。对于力学子层模型, 令每层的  $Y_{xy}$  值等于  $Y/\sqrt{3}$ ; 这里, 应区分  $Y_x$  与  $Y_y$  中何者大, 令之为  $Y$ 。模型共有五个子层, 最后一层取为弹性层。于是, 板件的应变分布情况, 直接由此层的弹性应变定出。表 1 列出了各子层的厚度比以及屈服应力。

作有限元分析时, 取板件的四分之一, 分成  $7 \times 7$  矩形平面应力元(见图 8)。带梢的加劲肋, 也摹拟成平面应力元; 但是, 每一单元都是等厚的。求有限元解时, 全部数值积分皆按  $2 \times 2$  高斯积分推算。

板件中心处的应变  $\epsilon_x$  与  $\epsilon_y$ , 取自距中心最近的单元; 沿此单元的对角线上, 有两个高斯积分点, 从这两点外推, 即可定出  $\epsilon_x$  与  $\epsilon_y$ 。图 9 示  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  与荷载间的关系。为进行比较, 图 9

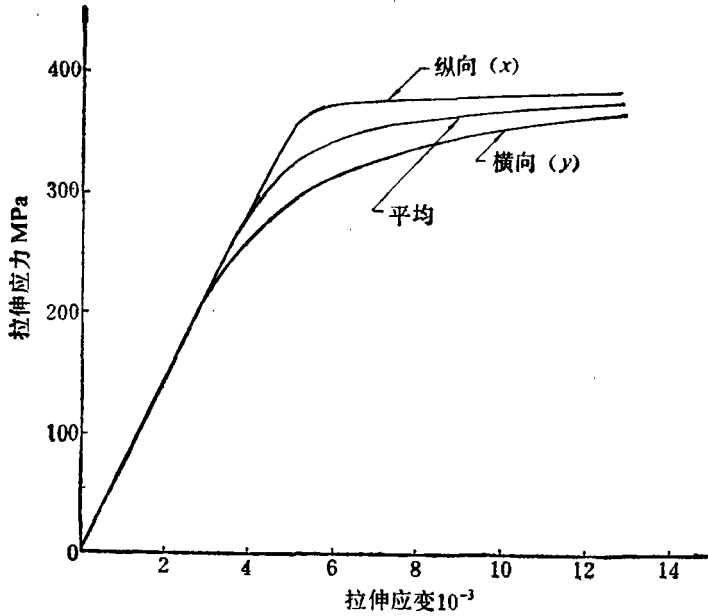


图6 2024-T4 铝合金板的拟合应力-应变曲线

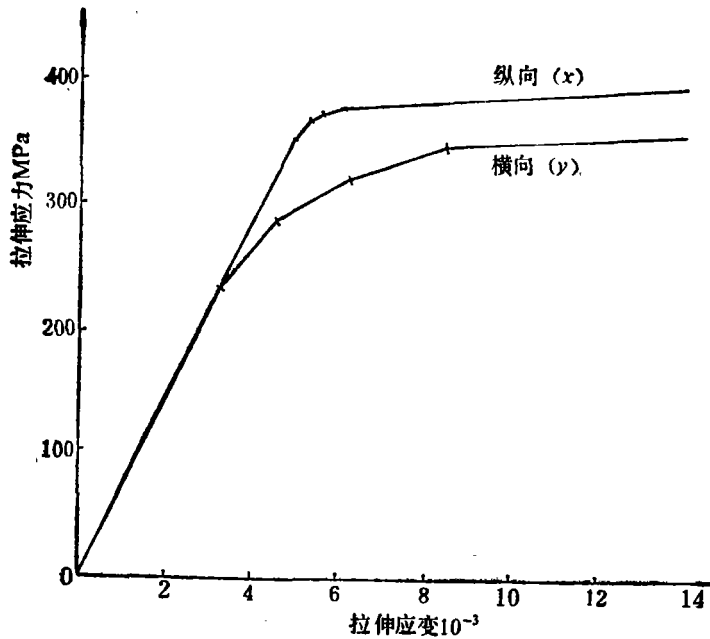


图7 力学子层模型的近似应力-应变曲线 (2024-T4)

还绘出了:

(1) 按本文建议方法得到的有限元解, 采用各向同性材料和图6的平均应力-应变曲线。

(2) 詹森等<sup>[12]</sup>的有限元解, 各向同性材料, 144个常应变三角元。

(3) 文[11]的实验结果。

由图9可见, 三种有限元解与实验结果并不一致, 但是, 三种解答却不相上下。就 $e_y$ 而

表 1 力学子层模型的常量 (各向异性塑性)

子层序号	1	2	3	4	5
$t_i/t$	0.360	0.351	0.130	0.130	0.029
$E_{x_i}$ , GPa	69.6	45.2	20.8	11.5	2.08
$E_{y_i}$ , GPa	69.6	44.7	20.3	11.2	2.01
$\epsilon_{x_i} 10^{-3}$	5.01	5.33	5.52	6.01	10.0
$\epsilon_{y_i} 10^{-3}$	3.24	4.52	6.22	8.44	14.0
$Y_{x_i} (= E_{1i}\epsilon_{x_i})$ MPa	349	371	385	419	弹性
$Y_{y_i} (= E_{1i}\epsilon_{y_i})$ MPa	226	315	433	587	
$\alpha_i = (Y_{x_i} / Y_{y_i})^2$	2.39	1.39	0.789	0.608	
$\alpha s_i = (Y_{x_i} / Y_{s_i})^2$	7.17	4.17	3	3	

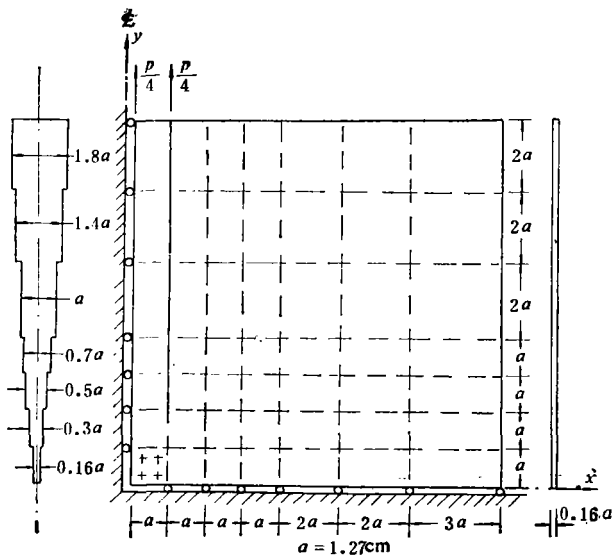


图8 剪滞结构的有限元剖分网格

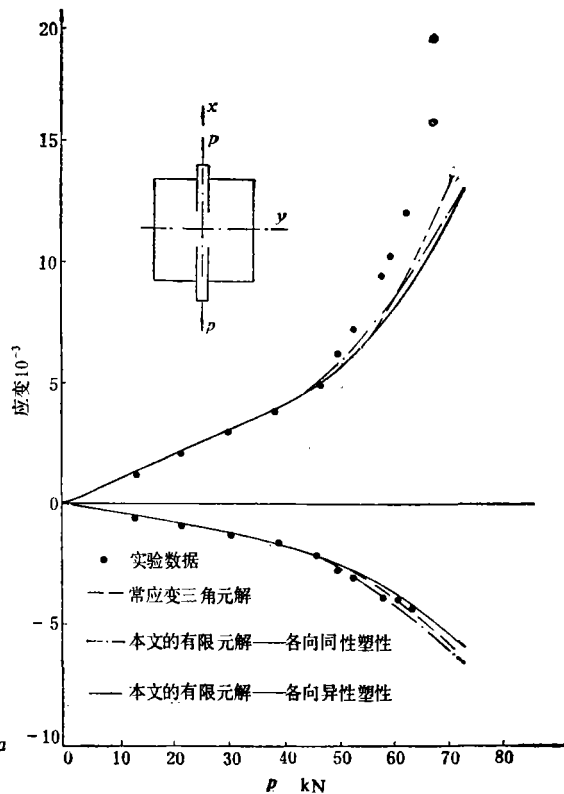


图9 剪滞结构中心处的应变分量——各种有限元解的对比

言, 此种情形尤为明显; 各向同性材料近似解, 与本文建议的各向异性材料模型解很靠近。

### 五、结 语

本文建立了用力学子单元模型来摹拟金属各向异性塑性行为的方法。本文提出的方法,



已被纳入杂交应力模型粘塑性理论有限元分析程序内。

致谢 作者谨向S. E. 弗兰契女士和H. 沙维欧先生致谢, 感谢他们为本文算出了数值结果。本文得到了宇航局——路易斯研究中心的宇航局NAG3-33 拨款的支持。谨此致谢。

本文原文为英文。由本刊编委陈大鹏教授译为中文。——编者

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Duwez, P., On the plasticity of crystals, *Physical Review*, 47 (1935), 494—501.
- [ 2 ] Besseling, J. F., A theory of plastic-flow for anisotropic hardening in plastic deformation of an initially isotropic material, Nat. Aero Research Inst. Rept. S410, Amsterdam (1953).
- [ 3 ] Leech, J. W., E. A. Witmer and T. H. H. Pian, Numerical calculation technique for large elastic-plastic transient deformations of thin shells, *AIAA Journal*, 6(1968), 2352—2359.
- [ 4 ] Zienkiewicz, O. Z., G. C. Nayak and D. R. J. Owen, Composite and overlay models in numerical analysis of elastic-plastic continua, *Foundations of Plasticity*, A. Sawczuk, ed., Noordhoff, Leyden (1973), 107—123.
- [ 5 ] Hunsaker, B., W. E. Haisler and J. A. Stricklin, On the use of two hardening rules of plasticity in incremental and pseudoforce analyses, *Constitutive Equation's in Viscoplasticity, Computational and Engineering Aspect*, ASME, AMD-Vol. 20 (1973), 139—170.
- [ 6 ] Pian, T. H. H., Unpublished Lecture Notes on Plasticity (1966).
- [ 7 ] Perzyna, P., Fundamental problems in viscoplasticity, *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, Vol.9 (1966), 243—377.
- [ 8 ] Pian, T. H. H., Nonlinear creep analysis by assumed stress finite element methods, *AIAA Journal*, 12 (1975), 1756—1758.
- [ 9 ] Pian, T. H. H. and S. W. Lee, Creep and viscoplastic analysis by assumed stress hybrid finite elements, *Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics*, Ed. by P. G. Bergan et al, Tapir Publisher Trondheim, Norway. (1978), 807—822.
- [ 10 ] Cormeau, I. C., Numerical stability in quasi-state elasto/viscoplasticity, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 9 (1975), 109—127.
- [ 11 ] Percy, J. H., W. A. Loden and D. R. Navaratna, A study of matrix analysis methods for inelastic structures, Air Force Dynamics Laboratory Report, RTD-TDA-63-4032, Oct. (1963).
- [ 12 ] Jensen, W. R., W. E. Falby and N. Prince, Matrix analysis methods for anisotropic inelastic structures, Air Force Flight Dynamics Lab, Report AFFDL-TR-65-220, April (1966).

## Time-Independent Anisotropic Plastic Behavior by Mechanical Subelement Models

Theodore H. H. Pian

*(Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., U. S. A.)*

### Abstract

The paper describes a procedure for modelling the anisotropic elastic-plastic behavior of metals in plane stress state by the mechanical sublayer model. In this model the stress-strain curves along the longitudinal and transverse directions are represented by short smooth segments which are considered as piecewise linear for simplicity. The model is incorporated in a finite element analysis program which is based on the assumed stress hybrid element and the viscoplasticity-theory.