应用数学和力学，第5卷第4期（1984年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

奇异摄动法在薄板和薄壳的弯曲问题中的若干应用

周 焕 文

（武汉大学，1983年4月30日收到）

摘 要

本文是一篇文献综述，采用待定小参数，统一讨论某些板与壳的非线性弯曲问题。

一、引 论

本文讨论用奇异摄动方法处理板壳非线性问题。

用奇异摄动方法处理板壳非线性问题，最早可以追朔到1948年，钱伟长用合成展开法处理了圆板大挠度问题[1]，所得到的一些结果，符合 A. E. McPherson 等的实验[2]。那时讨论的载荷是均布载荷，我们可以把圆板受均布载荷作用的大挠度方程写成[3]：

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}x\frac{d\beta}{dx}=\frac{1}{4}F\frac{d\beta}{dx}+p\varepsilon^3 \tag{1.1a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}xF+\frac{1}{2}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2=0 \tag{1.1b}$$

其中 ε 是一个无量纲的任意参数，它是待定的；p 是一个荷载常量。

上述方程的定解条件，讨论[4]与[5]中所述的几种。如果采用[6]中的记号，则可以写成

（Ⅰ） $p\neq 0$

当 $x=1$ 时，

$$\beta=0,\qquad \beta'+k_\beta\beta''=0,\qquad F+k_F F'=0 \tag{1.2a,b,c}$$

$k_\beta\geqslant 0$，$k_F\geqslant 0$

当 $x=0$ 时，

F 有限，β' 有限。 (1.2d)

（Ⅱ） $p=0$

当 $x=1$ 时，

$$\beta=0,\qquad 2\beta''+(1+\mu)\beta'=m,\qquad F=0 \tag{1.3a,b,c}$$

当 $x=0$ 时，

F，β' 取有限值， (1.3d)

其中 m 是边缘力矩常量。

在方程(1.1a)中，有一个常数 $p\varepsilon^3$，自然我们须要对它进行限制，假定

$$p\varepsilon^3=O(1) \tag{1.4}$$

利用这个条件，就限制了参数 ε 的选择范围。最初，钱伟长[1]选择 ε 为

$$\varepsilon=\left(\frac{2Eh^4}{cqa^4}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{1.5}$$

以后，E. Bromberg 选取 ε 为[7]

$$\varepsilon^3=\frac{Eh^4}{qa^4}[12(1-\mu^2)]^{-\frac{3}{2}} \tag{1.6}$$

而 Л. С. Срубщик 则选取 ε 为[8]

$$\varepsilon=\frac{h}{a}[12(1-\mu^2)]^{-\frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

如果采用(Ⅱ)，则应该假定

$$m=O(1) \tag{1.8}$$

钱伟长在[1]中所使用的方法，称之为合成展开法。这个方法，我们在[3]中作了推广，对于参数 ε，不是取某一固定的值，而是通过待定小参数法，选取各种不同的值。这个方法有很多优点，不但应用在圆板大挠度问题[3]，还可以推广去解其他非线性问题[27]。在本文中，对于一些基本方程的推导，主要是采用这个方法。

用奇异摄动法研究非线性板壳问题，其退化方程的解都是采用薄膜解，因此，研究薄膜方程的解法也是很要紧的。钱伟长最先使用的是级数解法[9]，以后，Dickey 使用迭代法[10]，Schmidt 等用摄动法[11]解过同样的问题。关于薄膜解，还可以参考[12]～[16]。

用奇异摄动理论去研究板壳非线性问题，苏联 Срубщик 作了很多工作，关于数学方面的应用，文献[31]值得一读。

二、环形和圆形薄板非对称弯曲

关于环形和圆形薄板非对称弯曲问题，江福汝在最近作了系统的研究[19]，作者利用他本人提出的方法[20-21]，讨论环形和圆形薄板在各种支承条件下的非线性弯曲问题。

引进极坐标系(r,σ)。我们知道，薄板弯曲挠度$w(r,\sigma)$和应力函数$N(r,\sigma)$确定于下面的 von Kármán 方程[22]

$$\Delta^2 w=\frac{h}{D}L(w,N)+\frac{q}{D} \tag{2.1a}$$

$$\Delta^2 N=-\frac{E}{2}L(w,w) \tag{2.1b}$$

其中

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} \tag{2.2a}$$

$$\begin{aligned}L(w,N)=&\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 N}{\partial\sigma^2}\right)+\frac{\partial^2 N}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\sigma^2}\right)\\&-2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right)\end{aligned} \tag{2.2b}$$

再以 r_0 表示环形的内缘半径，r_1 表示外缘半径，引进无量纲量：

$$\left.\begin{aligned}\tilde{w}&=\varepsilon\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{h}w, \quad \tilde{N}=\frac{h}{D}\varepsilon^2 N\\ \tilde{r}&=\frac{r}{r_1}, \quad \tilde{q}=\frac{r_1^4 q}{h^4 E}[12(1-\mu^2)]^{\frac{3}{2}}\ \varepsilon^3\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

则上述方程(2.1a)～(2.1b)变成（略去字母上的"～"号）：

$$\Pi_\varepsilon(w,N)\equiv\varepsilon^2\Delta^2 w-L(w,N)=q \tag{2.4a}$$

$$\Pi(w,N)\equiv\Delta^2 N+\frac{1}{2}L(w,w)=0 \tag{2.4b}$$

其中 ε 是待定参数。

在方程(2.4)中，我们须要假定

$$|q|<M \tag{2.5}$$

其中M是一个正数。如果恢复"～"号，则

$$\left|\frac{r_1^4 q}{h^4 E}[12(1-\mu^2)]^{\frac{3}{2}}\ \varepsilon^3\right|<M \tag{2.6}$$

这就限制了参数的选择范围。江福汝[19]选取 ε 为

$$\varepsilon^2=\frac{h^2}{12(1-\mu^2)r_1^2} \tag{2.7}$$

如果假定 ε 是一小参数，此时必须假定$|q|/E$ 是很小的量，也就是说，此时的荷载不能太大。

关于非对称弯曲的研究，还有[17～18]、[23]和[24]等工作。

三、旋转壳对称弯曲

对于旋转壳的对称弯曲，可以将它的平衡方程[25]写成奇异摄动型方程：

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}\left(x\frac{d\beta}{dx}\right)-\frac{1}{4}F\frac{d\beta}{dx}-\varepsilon k(x)F-\varepsilon^3 p(x)=0 \tag{3.1a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(xF)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2+\varepsilon k(x)\frac{d\beta}{dx}=0 \tag{3.1b}$$

其中

$$k(x)=-\frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{4h}\ \frac{dz}{dx} \tag{3.2}$$

此处字母量 z 的定义见文献[26]，其余字母量见文献[27]。

同前两节一样，方程(3.1)中的 ε 是待定的。当取

$$\varepsilon=\frac{h}{a\gamma} \tag{3.3}$$

时，Срубшик 讨论了该问题的渐近解[28]。此外，他还讨论了旋转壳的其他问题[29-30]。

我们在文献[27]中，采用待定小参数的钱伟长合成展开法求非线性扁球壳体大挠度问题的渐近解，对于受均布荷载作用的固定夹紧或简单铰链支承的扁球壳体，各级渐近近似的求解问题都可以转化为求泛函的极值问题，得到了泛函的一般表达式；对于渐近展开式中的小参数的选择，文中只列举一例，要求小参数 ε 满足等式 $\varepsilon^3 p+\varepsilon-1=0$。这样选取小参数，无

论是大载荷或小载荷情形都能适用.

我们在文献[27]中，由于采用了待定参数法选择摄动参数，从而求得了“薄膜”解在中心区域不出现凹陷的条件.

以摄动法的基本思想为依据，我们曾引伸出一个迭代法，用以求解非线性扁壳大挠度问题[32].

讨论叶开沅等用修正迭代法讨论过的问题[5]. 基本方程

$$L(x,\theta)=F\theta \tag{3.4a}$$

$$xL(x^2F)+\frac{1}{2}\theta^2-\frac{1}{2}k^2x^2=0 \tag{3.4b}$$

其中

$$L=\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx} \tag{3.5a}$$

$$\theta=-\frac{d\beta}{dx} \tag{3.5b}$$

边界条件

$$x=0,\quad \beta,\ \theta,\ F\ \text{取有限值} \tag{3.6a}$$

$$x=1,\quad \beta=\frac{k}{2},\ F=0,\quad \frac{d\theta}{dx}+\mu\theta=m-k(1+\mu) \tag{3.6b}$$

我们取迭代初值为

$$\theta_0=\frac{1}{1+\mu}[m-(1+\mu)k]x \tag{3.7a}$$

$$F_0=0 \tag{3.7b}$$

一般迭代格式为

$$xL(x^2F_n)=-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\theta_i\,\theta_{n-1-i}-\sum_{i=0}^{n-2}\theta_i\,\theta_{n-2-i}\right]+\frac{k^2}{2}x^2 \tag{3.8a}$$

$$L(x\theta_n)=\sum_{i=1}^{n}F_i\,\theta_{n-i}-\sum_{i=1}^{n-1}F_i\theta_{n-1-i} \tag{3.8b}$$

$$(n=1,2,3\cdots)$$

其中 $\theta_{-1}\equiv0$.

这个迭代格式有一个显著特点，它能很好地“记忆”历史资料；但也有一个很大弱点，它不如修正迭代法收敛快.

四、第二边界层问题

对于受均布荷载作用的球壳对称变形问题，其非线性平衡方程可以写成[33]：

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}x\theta-\frac{1}{4}F\theta-k^2F-\varepsilon^3p\delta=0 \tag{4.1a}$$

$$\delta^2\frac{d^2}{dx^2}xF+\frac{1}{2}\theta^2+4k^2\theta=0 \tag{4.1b}$$

式中 ε 与 δ 是待定参数. 当 $\delta=1$，ε 是小参数时，这是第一边界层问题；当 δ 与 ε 都是小参数时，这是第二边界层问题.

带有两个或两个以上小参数的奇异摄动理论的应用，公开发表的文献虽不多，但是是一个重要的研究课题，这方面，R. E. Jr. O'Malley的工作是很出色的[34-38]；林宗池最近也研究过[39]，Л.С. Срубщик 把它应用到弹性球壳的弯曲问题[40].关于后者，E.Reissner也有研究[41]。我们在[33]中，采用一个特殊假定，令

$$\varepsilon^3 p\delta=1-\varepsilon \tag{4.2}$$

利用先前所使用的方法[8,27]，求得了上述问题的渐近解。

对于方程(4.1)，必须对 p 与 k^2 加以限制，即要求

$$\varepsilon^3 p\delta=O(1) \tag{4.3a}$$

$$k^2=O(1) \tag{4.3b}$$

其中

$$p=q\,a^4[12(1-\mu^2)]^{\frac{3}{2}}\,/16Eh^4 \tag{4.4a}$$

$$k^2=a^2\varepsilon\delta\sqrt{12(1-\mu^2)}\,/8Rh \tag{4.4b}$$

这里的 h 为壳的厚度，$2a$ 为跨度，R 是壳体半径。

利用(4.3)的限制，便可求得 δ 的估计值，

$$\delta=O\left(\frac{\sqrt{p}}{\rho^3}\right) \tag{4.5}$$

其中

$$\rho^2=\sqrt{12(1-\mu^2)}\,\frac{a^2}{Rh} \tag{4.6}$$

这一结果与 Reissner 的结果是一致的[41]。

上面所讨论的是均布荷载作用的球壳对称变形问题。其实，可以推广到任意荷载作用的旋转壳体变形问题。现在讨论对称情况，在方程(3.1)中，令

$$\beta=\frac{\tilde{\beta}}{\delta} \tag{4.7}$$

则(3.1a)与(3.1b)变成

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}\,x\,\frac{d\tilde{\beta}}{dx}-\frac{1}{4}\,F\frac{d\tilde{\beta}}{dx}-\varepsilon\delta k(x)F-\varepsilon^3\delta p(x)=0 \tag{4.8a}$$

$$\delta^2\frac{d^2}{dx^2}\,xF+\frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{\beta}}{dx}\right)^2+\varepsilon\delta k(x)\frac{d\tilde{\beta}}{dx}=0 \tag{4.8b}$$

在这个方程组中，须要假定 $\varepsilon^3\delta p(x)$ 与 $\varepsilon\delta k(x)$ 都是有界的，即

$$|\varepsilon^3\delta p(x)|<M_p \tag{4.9a}$$

$$|\varepsilon\delta k(x)|<M_k \tag{4.9b}$$

其中 M_p 与 M_k 是两个有限值。

如果令 $\varepsilon=\delta$，则(4.8)变为

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}\,x\frac{d\tilde{\beta}}{dx}-\frac{1}{4}\,F\frac{d\tilde{\beta}}{dx}-\tilde{k}F-\tilde{p}=0 \tag{4.10a}$$

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}xF+\frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{\beta}}{dx}\right)^2+\tilde{k}\frac{d\tilde{\beta}}{dx}=0 \tag{4.10b}$$

其中

$$\tilde{k}=\varepsilon^2 k,\quad \tilde{p}=\varepsilon^4 p$$

利用(4.10a)与(4.10b)，Срубщик 研究了扁壳变形的稳定性和决定临界荷载的值[26,42]。自然，可以利用本文作者的工作[3]和江福汝的工作[20]中所提出的方法，对稳定性和临界荷载值作进一步讨论。

参 考 文 献

[1] 钱伟长,Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection，清华大学理科报告，5. 1(1948)。

[2] McPherson, A. E., W. Ramburg and S. Levy, Normal pressure tests at circular plates with clamped edges, N.A.C.A. Report, (1942), 744.

[3] 周焕文，奇异摄动法在圆板大挠度问题中的应用，钱伟长主编《奇异摄动理论及其在力学中的应用》，科学出版社，(1981)。

[4] 钱伟长、叶开沅，圆薄板大挠度问题，物理学报，10，3 (1954，9)

[5] 叶开沅等，弹性圆底扁球壳在边缘均布力矩作用下的非线性稳定问题，应用数学和力学，1，1 (1980)，71—88.

[6] 周焕文，圆板非线性理论的一种摄动解，应用数学和力学，2，5 (1981，10)，475—484.

[7] Bromberg, E., Non-linear bending of a circular plate under normal pressure, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 9 (1956), 597—612.

[8] Срубщик Л. С. и В. И. Юдович, Асимптотика уравнений большого прогиба круглой симметрично загруженной пластины, *ДАН СССР*, 139, 2 (1961).

[9] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅，《弹性圆薄板大挠度问题》，中国科学院出版社，(1954)。

[10] Dickey, R. W., The plane circular elastic surface under normal pressure, *Arch. Rational Mech. Anal.* 26, 3 (1967).

[11] Tucker, J. R., R. Schmidt and D. A. Dadeppo, Moderately large deflections of a loosely clamped circular plate under a uniformly distributed load, *J. Industrial Mathematics Society*, 25, part 1, (1975).

[12] 钱伟长、王志忠、徐尹格、陈山林，圆薄膜中心部分受均布载荷产生的对称变形，应用数学和力学，2，6(1981，12)。

[13] Dickey, R. W. (Chief Editor), *Nonlinear Elasticity*, (1973).

[14] Срубщик Л. С, Круглые пластины под действием разрывных нагрузок, *ПММ*, 28, 6 (1964), 1024—1032.

[15] Срубщик Л. С. и В. И. Юдович, Асимптотика уравнения большого прагиба круглой симметрично загруженной пластины, *Сибирский Математ. Ж.*, 4, 3(1963).

[16] Срубщик Л. С., К существованию решения задачи о равновесии круглой мембраны, *ПММ*, 30, 3 (1966), 576—579.

[17] Fife, P., Non-linear deflection of thin elastic plates under tension, *Comm. Pure and Appl. Math.*, 14 (1961), 81—112.

[18] Срубщик Л. С., Об асимптотическом интегрировании системы нелинейных уравнений теории пластин, *ПММ*, 28, 2 (1964), 335—349.

[19] 江福汝，环形和圆形薄板在各种支承条件下的非对称非线性弯曲问题(Ⅰ)，应用数学和力学，3，5(1982)。

[20] 江福汝，关于椭圆型方程的奇摄动，复旦学报，2 (1978)。

[21] 江福汝，摄动方法在薄板弯曲问题中的某些应用，应用数学和力学，1，1 (1980)。

[22] S. 铁摩辛柯、S. 沃诺斯基，《板壳理论》，科学出版社，(1977)。

[23] Alzheimer, W. E. and R. T. Davis, Unsymmetrical bending of prestressed annular plates, *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, 4 (1968), 905—917.

[24] 莫嘉琪、石秉国, 关于薄板弯曲问题的摄动方法, 应用数学和力学, **2**, 5(1981).

[25] Chien, W. Z., The intrinsic theory of thin shells and plates, Part I, General theory, *Quart. Appl. Math.*, 1 (1944), 297—327; Part II, Application to thin plates, ibid., 2 (1944), 43—59; Part III, Application to thin shells, ibid., 2(1944), 120—135.

[26] Срубщик Л. С., Асимптотический метод определения критических нагрузок потери устойчивости пологих строго выпуклых оболочек вращения, *ПММ*, **36**, 4(1972).

[27] 周焕文, 合成展开法在球壳大挠度问题中的应用, 《应用数学和力学论文集》(待出版).

[28] Срубщик Л. С. и В. И. Юдович, Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения, *ПММ*, **26**, 5 (1962).

[29] Жуков М. Ю. и Л. С. Срубщик, Поведение замнутой сферической оболочки после потери устойчивости, *ПММ*, **35**, 5(1971).

[30] Срубщик Л. С., Асимптотика уравнений рейсснера в нелинейной теории симметрично загруженных оболочек вращения, *ДАН СССР*, **182**, 3 (1968).

[31] Срубщик Л. С., К вопросу о нежесткость в нелинейной теории пологих оболочек, *Изв. АН СССР Сер. Матем.*, 4(1972).

[32] 周焕文, 由摄动法引伸的一个迭代法(未发表).

[33] 周焕文, 合成展开法应用于球壳对称弯曲的边界层问题, 应用数学和力学, **4**, 6(1983).

[34] O'Malley, Jr, R. E., Two-parameter singular perturbation problems, Doctoral Dissertation, stanford University, U. S. A. (1965).

[35] O'Malley, Jr, R. E., The first boundary value problem for certain linear elliptic differential equations involving two small parameters, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **26** (1967).

[36] O'Malley, Jr, R. E., On initial value problems for nonlinear systems of differential equations with two small parameters, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **40**(1971), 209—222.

[37] O'Malley, Jr., R. E., Two-parameter singular perturbation problems for second order equations, *J. Math. Mech.*, **16**(1967), 291—308.

[38] Chen, J. and R. E. O'Malley, Jr., On the asymptotic solution of a two-parameter boundary value problem of chemical reactor theory, *SIAM J. Appl. Math.*, **26**(1974).

[39] 林宗池, 方程带两参数的高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动, 应用数学和力学, **3**, 5(1982).

[40] Срубщик Л. С., Вторичный краевой эффект при изгибе тонких упругих оболочек, *ПММ*, **45**, 5 (1981).

[41] Reissner, E., The edge effect in symmetric bending of shallow shells of revolution, *Pure and Appl. Math.*, **12**, 2 (1959), 385.

[42] Срубщик Л. С., Докритическое равновесие тонкой пологой оболочки вращения и его устойчивость, *ПММ*, **44**, 2 (1980).

[43] Chang Chin-hao, An experimental verification of boundary-layer solutions of Kármán's equations of plates, *J. Appl. Mech. Tran. ASME*, E43(1976), 168—169.

[44] Срубщик Л. С., Влияние начальных несовершенств на выпучивание упругих оболочек при кратных критических нагрузках, *ПММ*, **44**, 5(1980).

[45] Срубщик Л. С. и В. А. Треногин, О выпучивании гибких пластин, *ПММ*, 32. 4 (1968).

[46] Срубщик Л. С., Выпучивание упругих оболочек с начальными несовершенствами по многим собственным формам, *Докл. АН СССР*, **249**, 4 (1979).

[47] Bauer, L., H. Keller and E. Reiss, Multiple eigenvalues lead to secondary bifurcation, *SIAM Rev.*, **17**, 1 (1975), 101—122.

[48] Mallet-Paret, J., Buckling of cylindrical shells with small curvature, *Quart. Appl. Math.*, **35**, 3(1977), 383—400.

[49] Срубщик Л. С., О потере устойчивости несимметричных строго выпуклых тонких пологих оболочек, *ПММ*, **37**, 1(1973).

[50] Срубщик Л. С., Нежесткость сферической оболочки, *ПММ*, **31**, 4(1967).

[51] Ворович И. И., Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом, *ДАН СССР*, **122**, 1(1958).

[52] Срубщик Л. С. и В. И. Юдович, Об асимптотическом интегрировании уравнения равновесия жидкости с поверхностным натяжением в поле тяжести, *Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ.*, **6**, 6(1966).

[53] Срубщик Л. С. и В. И. Юдович, Замечание об устойчивости мембранных решений в нелинейной теории пластин и оболочек, *ПММ*, **30**, 1(1966).

[54] Срубщик Л. С., Нежесткость непологого сферического купола, *ПММ*, **32**, 3(1968).

[55] Жуков М. Ю. и Л. С. Срубщик, Устойчивость тонких несимметричных кусочно-выпуклых упругих оболочек, *ПММ*, **41**, 3(1977).

[56] Matkowsky, B. J. and E. L. Reiss, Singular perturbations of bifurcations, *SIAM J. Appl. Math.*, **33**, 2(1977), 230—255.

Some Applications of the Singular Perturbation Method to the Bending Problems of Thin Plates and Shells

Chou Huan-wen

(*Wuhan University, Wuhan*)

Abstract

This paper presents a review which discusses some nonlinear bending problems of plates and shells in a unified way by means of the technique of undetermined small parameters.