

复合型脆断的应变能判据*

林 拜 松

(中南矿冶学院, 1983年3月20日收到)

摘 要

本文提出一个十分简单的复合型脆断判据, 即应变能判据. 该判据可以表示成: $(K_I/K_{Ic})^2 + (K_{II}/K_{Ic})^2 + (K_{III}/K_{Ic})^2 = 1$, 它与文献中的实验数据非常一致, 是一个实用的判据. 本文还提出一个经验判据: $(K_I/K_{Ic})^m + (K_{II}/K_{Ic})^n = 1, 1 \leq \frac{m}{n} \leq 2$.

一、前 言

自从Erdogan和薛昌明^[1]于1963年提出复合型脆断的最大周向应力判据以来, 有很多人从事这个课题的研究工作, 提出了种种复合型脆断判据, 而且这些判据都在一定程度上符合实验数据^{[2], [3]}. 因此, 现在很难从这些判据中选出最实用的判据. 还需要作更多的实验研究和理论分析.

现有复合型脆断判据的共同点是, 选择一个力学参数作为复合型脆断参数, 该参数取极值的方向就是裂纹的开始扩展方向, 由此确定开裂角. 该参数的极值达到临界值时, 裂纹就开始扩展, 从而得到复合型脆断判据. 这是一种开裂角与断裂判据相关连的判据. 它们的主要缺点是计算较繁, 而且得不到显式判据: $F(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0$. 为了克服上述缺点, 本文提出一个十分简单的应变能判据: 1) 裂纹的开始扩展方向与最大外加拉应力相垂直; 2) 裂纹尖端附近圆内总应变能达到临界值时, 裂纹就开始扩展. 由此得到复合型脆断判据为: $(K_I/K_{Ic})^2 + (K_{II}/K_{Ic})^2 + (K_{III}/K_{Ic})^2 = 1$. 该判据与文献中的实验数据非常一致, 是一个实用的判据. 本文根据实验数据和理论判据, 又提出一个经验判据: $(K_I/K_{Ic})^m + (K_{II}/K_{Ic})^n = 1, 1 \leq \frac{m}{n} \leq 2$.

二、开 裂 角

根据一些实验数据和理论分析, 我们认为: 斜裂纹开始扩展方向与最大外加拉应力相垂直. 设斜裂纹的裂纹角为 β , 则斜裂纹的开裂角 θ_0 为(图1):

* 钱伟长推荐.

$$\theta_0 = \beta - \frac{\pi}{2} \tag{2.1}$$

图 2 表示最大周向应力判据, 应变能密度因子判据及式 (2.1) 的开裂角与裂纹角之间的关系. 由该图可知, 各种判据的开裂角相差不大, 这表明开裂角不是检验判据好坏的一个敏感参数.

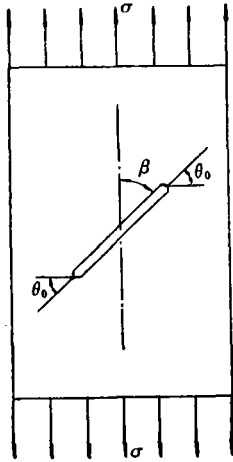


图 1 中心斜裂纹的裂纹角和开裂角

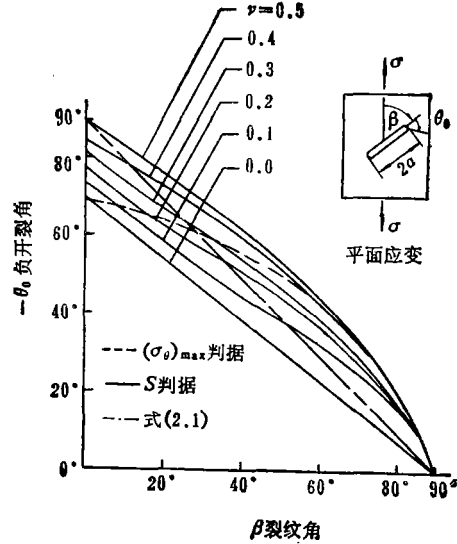


图 2 拉伸时开裂角与裂纹角之间的关系

Shah^[4] 制备了八根含中心斜裂纹的平板试样. 材料是4340钢, 裂纹角为90°, 65°, 40°, 25°, 裂纹长度与试样宽度之比均为1/2, 试样厚度为0.25吋. 将全部试样在-200°F下单向拉断, 断裂后全部试样的断裂面都与拉力相垂直 (文献 [4], 图 5). 所以, 实验开裂角与式 (2.1) 的理论开裂角相同.

表 1 PMMA 单边斜裂纹试样拉伸数据

试样编号 No	β (°)	$-\theta_0$ (°)	L (mm)	w (mm)	l (mm)	P_{fr} (kg)
1	86	2.7	120	50	39.2	90.2
2	74.85	21.4	120	50	39.4	86.6
3	68.3	22.91	120	50	37.7	69.5
4	55.63	27.36	120	50	17.4	83.2
5	45.58	46	120	50	40.6	103
6	35.6	56	120	50	38.2	96.7
7	25.46	50.8	120	50	47	230
8	15	66.83	120	50	44	151.5
9	59.36	27.2	120	50	42.2	116.4
10	19	64.7	120	50	45	150

Ewing 等^[6] 制备了20根含单边斜裂纹的平板试样 (图3). 试样材料是有机玻璃. 在室温下将10根试样单向拉断, 另10根试样弯断. 试样尺寸及实验结果列在表 1 和表 2 上. 由表 1 看出, 单向拉伸试样斜裂纹的实验开裂角几乎与式 (2.1) 的理论开裂角完全相等. 由表 2 看出, 纯弯曲试样斜裂纹的实验开裂角与式 (2.1) 的理论开裂角亦相差不大.

表2 PMMA 单边斜裂纹试样纯弯曲数据

试样编号 №	β ($^{\circ}$)	$-\theta_0$ ($^{\circ}$)	L (mm)	w (mm)	l (mm)	P_{1r} (kg)
11	88.6	5.01	200	50	36.1	82.5
12	76.9	5.08	200	50	23.9	31.8
13	65.83	19.1	200	50	26.1	36.4
14	57.63	32.73	200	50	38.1	93.5
15	47.46	38.33	200	50	40	103
16	35.76	42.96	200	50	42.6	128.5
17	26.33	56.25	200	50	41.2	100
18	14.25	60.2	200	50	43.2	147
19	39.28	44.1	200	50	41.5	93.5
20	49.83	39.13	200	50	26.2	48.6

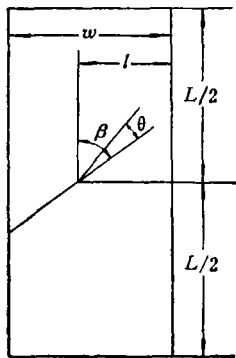


图3 单边斜裂纹平板试样几何尺寸

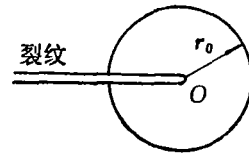


图4 斜裂纹尖端附近的圆

三、复合型断裂判据

以斜裂纹尖端 O 为圆心以 r_0 为半径作一圆周 (图4)。该圆内的总应变能为:

$$W = \int_0^{r_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{r} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2) B r dr d\theta \quad (3.1)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu\pi} [(\kappa - \cos \theta)(1 + \cos \theta)], & a_{12} &= -\frac{1}{16\mu\pi} [\sin 2\theta - (\kappa - 1)\sin \theta] \\ a_{22} &= \frac{1}{16\mu\pi} [(\kappa + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)], & a_{33} &= \frac{1}{4\mu\pi} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

这里, μ 是剪切弹性模量, $\kappa = (3 - 4\nu)$ (平面应变), $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ (平面应力), ν 是泊松比, B 是裂纹体的厚度。

完成式(3.1)的积分后得:

$$W = \frac{B r_0}{16\mu} [(2\kappa - 1)K_I^2 + (2\kappa + 3)K_{II}^2 + 8K_{III}^2] \quad (3.3)$$

我们假定斜裂纹开始扩展条件是: 总应变能 W 达到临界值 W_{cr} , 即开裂条件是:

$$W = W_{cr} \quad (3.4)$$

其中 $W_{cr} = (Br_0/16\mu)(2\kappa-1)K_{I0}$ 。从而得到复合型断裂判据为:

$$\left(\frac{K_I}{K_{I0}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{II0}}\right)^2 + \left(\frac{K_{III}}{K_{III0}}\right)^2 = 1 \quad (3.5)$$

其中

$$K_{I0} = \sqrt{\frac{2\kappa-1}{2\kappa+3}} \cdot K_{I0}, \quad K_{II0} = \sqrt{\frac{2\kappa-1}{8}} \cdot K_{II0} \quad (3.6)$$

由于塑性变形的损伤效应在 I 型裂纹, II 型裂纹和 III 型裂纹中是各不相同的, 因此, 我们要用 K_{I0} 和 K_{II0} 的实验值来代替式(3.6)中 K_{I0} 和 K_{II0} 的理论值。这样, 判据(3.5)就能更好地符合实验数据。

由式(3.5)得到 I - II 复合型断裂判据为:

$$\left(\frac{K_I}{K_{I0}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{II0}}\right)^2 = 1 \quad (3.7)$$

图 5 表示该圆周的 1/4, 它的弦方程为:

$$\frac{K_I}{K_{I0}} + \frac{K_{II}}{K_{II0}} = 1 \quad (3.8)$$

由式(3.5)得到 I - III 复合型断裂判据为:

$$\left(\frac{K_I}{K_{I0}}\right)^2 + \left(\frac{K_{III}}{K_{III0}}\right)^2 = 1 \quad (3.9)$$

图 6 表示该圆周的 1/4。

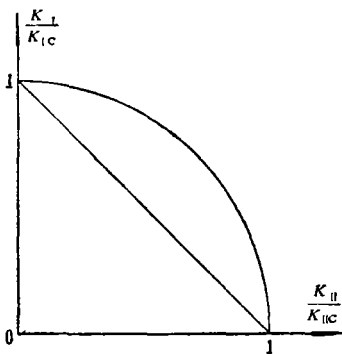


图 5 断裂时 K_I/K_{I0} 与 K_{II}/K_{II0} 之间的关系

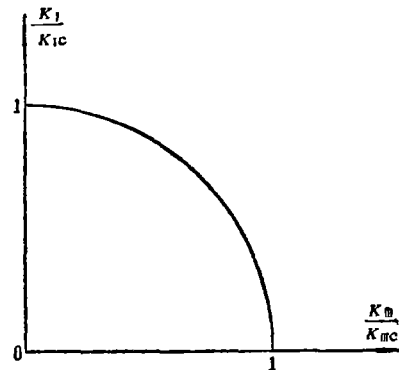


图 6 断裂时 K_I/K_{I0} 与 K_{III}/K_{III0} 之间的关系

为了检验复合型断裂判据(3.7)和(3.8), 我们作出图 7 (文献[4], 图 6)。由图 7 看到, 断裂判据(3.7)位于全部实验点分散带中间, 而断裂判据(3.8)则与 Shah^[4] 所得实验判据: $K_I/K_{I0} + K_{II}/K_{II0} = 1$ 完全一致。

Awaji 等^[10] 得到实验断裂判据为: $(K_I/K_{I0})^n + (K_{II}/K_{II0})^n = 1$, 其中 $n=1.6, 2$ (文献[10], 图 8)。前者 ($n=1.6$) 位于所有实验点分散带中间, 后者即 $n=2$ 情形稍有偏离, 但是二者却非常接近。这表明断裂判据(3.7)与实验数据非常一致。

为了检验 I - III 复合型断裂判据 (3.9), 我们作出图 8 (文献[4], 图 17)。由图 8 看到, 断裂判据(3.9)就是实验断裂判据的下限: $(K_I/K_{I0})^2 + (K_{III}/K_{III0})^2 = 1$, 而概率断裂判据(位于全部实验点分散带中间) 则是: $(K_I/K_{I0})^2 + (K_{III}/K_{III0})^{4.75} = 1$, 但是两者却非常接近。这就表明断裂判据(3.9)与实验数据非常一致。

记号	材料	厚度(in)	K_{Ic} (Ksi-in ^{1/2})	K_{IIc} (Ksi-in ^{1/2})
●	Shah[4] 4340钢($\sigma_y=225$, $\sigma_b=295$, -200°F)	0.25	41.6	45.2
◇	Liu[6] 7075-T7651铝	0.30	81.2	81.2
■	Boeing[7] 7075-T651铝	0.30	63.7	63.7
◆	Liu[6] 2024-T3铝	0.312	90.5	67.5

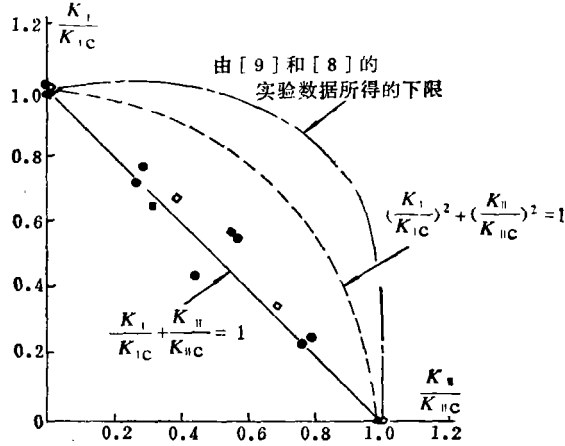


图7 断裂时 K_I/K_{Ic} 与 K_{II}/K_{IIc} 之间的关系

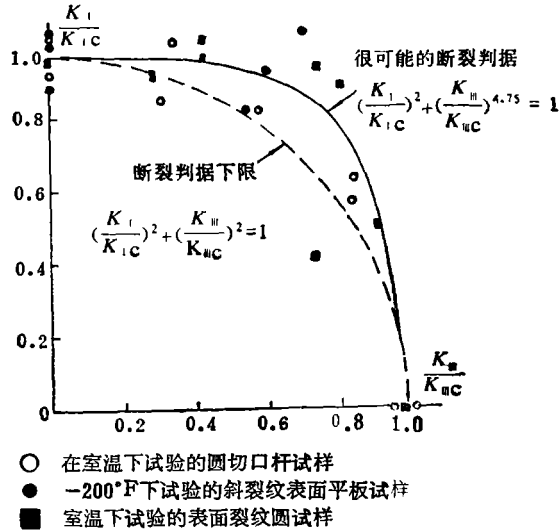


图8 4340钢圆切口杆试样、斜表面裂纹平板试样及表面裂纹圆试样断裂时的 K_I/K_{Ic} 与 K_{II}/K_{IIc} 之间的关系

四、结 论

根据以上所述, 我们可以得到下列结论:

- 1 计算开裂角的公式(2.1)与实验结果相当一致, 特别是对于含单边斜裂纹和中心斜裂纹的有限宽平板试样单向拉伸情形。

2. 断裂判据 $(K_I/K_{Ic})^2 + (K_{II}/K_{Ic})^2 = 1$ 和 $(K_I/K_{Ic})^2 + (K_{III}/K_{Ic})^2 = 1$ 与实验数据非常符合。

3. 断裂判据 $K_I/K_{Ic} + K_{II}/K_{Ic} = 1$ 与 Shah^[4] 的实验断裂判据完全相同。

4. 由图 7 和文献[10]图8看出, 文献[4]、[6]、[7]及[10]等的全部实验点几乎都落在圆弧 $(K_I/K_{Ic})^2 + (K_{II}/K_{Ic})^2 = 1$ 与弦 $K_I/K_{Ic} + K_{II}/K_{Ic} = 1$ (图5) 之间。这表明经验 I-II 复合型断裂判据应该是: $(K_I/K_{Ic})^m + (K_{II}/K_{Ic})^n = 1$, $1 \leq \frac{m}{n} \leq 2$ 。所以, 判据 (3.7) 可以作为经验判据的最低上限, 而判据 (3.8) 可以作为经验判据的最高下限。Lee 等^[11] 的理论判据和 Wu^[12] 的实验判据都是—— $K_I/K_{Ic} + (K_{II}/K_{Ic})^2 = 1$; 该判据可以由经验判据 $(K_I/K_{Ic})^m + (K_{II}/K_{Ic})^n = 1$ 中取 $m=1$ 和 $n=2$ 来得到。

参 考 文 献

- [1] Erdogan, F. and G. C. Sih, *J. Basic Engng.*, 85D(1963), 519.
- [2] Chang, K. J., *Engng. Fracture Mech.*, 14(1981), 107.
- [3] Chang, K. J., *Engng. Fracture Mech.*, 14(1981), 125.
- [4] Shah, R. C., *Fracture Analysis*, ASTM STP 560(1974), 29.
- [5] Ewing, P. D., J. L. Swedlow and J. G. William, *Int. J. of Fracture*, 12(1976), 85.
- [6] Liu, A. F., AIAA 73-253, 11th Aerospace Sciences Meeting, Washington, D. C., Jan. (1973).
- [7] Unpublished Data, Boeing Aerospace Co., Seattle, Wash.
- [8] Wilson, W. K., Research Report 69-LE7-FMECHRI, Westinghouse Research Laboratories, June(1969).
- [9] Pook, L. P., *Engng Fracture Mech.*, 3 (1971), 205.
- [10] Awaji, H. and S. SaTo, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 100(1978), 175.
- [11] Lee, K. Y. and S. H. Advani, *Engng. Fracture Mech.*, 16(1982), 257.
- [12] Wu, E. M., *J. Appl. Mech.*, 34(1969), 967.

The Strain Energy Criterion of Mixed-Mode Brittle Fracture

Lin Bai-song

(Central-South Institute of Mining and Metallurgy Changsha)

Abstract

In this paper, we proposed a new criterion of mixed-mode brittle fracture, i. e. the strain energy criterion, which can be stated as $(K_I/K_{Ic})^2 + (K_{II}/K_{Ic})^2 + (K_{III}/K_{Ic})^2 = 1$. This criterion is shown to be in good agreement with known experimental data.

In this paper, an experimental criterion:

$$(K_I/K_{Ic})^m + (K_{II}/K_{Ic})^n = 1 \quad 1 \leq \frac{m}{n} \leq 2$$

is also proposed.