应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

# 圆筒在内外压力作用下的有限位移问题*

黄 择 言

（武汉地质学院物理教研室，1983年5月6日收到）

**摘 要**

本文用逐次逼近法求得这个边值问题的一次解和二次解，从而获致位移场、应变场和应力场的二级近似公式．我们的结果还表明：在变形后，(i) 圆筒任一截面必位移至另一仍与筒轴垂直的平面上；(ii) 应变分量$E^{(2)R}{}_R$与$E^{(2)\Phi}{}_\Phi$之和以及应力分量$\Sigma^{(2)R}{}_R$与$\Sigma^{(2)\Phi}{}_\Phi$之和在整个圆筒内均不保持恒定．后一效应是经典弹性理论里所没有的，它对$\Sigma^{(2)Z}{}_Z$的产生承担责任，此外，$\Sigma^{(2)Z}{}_Z$与（$\Sigma^{(2)R}{}_R+\Sigma^{(2)\Phi}{}_\Phi$）之间呈现线性关系，其比例系数仅与圆筒的材料有关．

考虑一个受到均匀内外压力作用的各向同性圆筒．如果所产生的位移是微小的，那么这个问题便是经典线性弹性理论里有名的Lamé问题[1]．现在，让我们来探讨有限位移的情形．

## 一、基 本 方 程

如所周知，在处理非线性弹性问题时，可以或者用物质描述法（亦称 Lagrange 描述法）或者用空间描述法（亦称Euler描述法）．

设 **R** 为质点在自然态（未变形态）的位置矢量，**r** 为该质点在终态（已变形态）的位置矢量，我们取物质坐标系（柱坐标）$X^K$（$K=1,\ 2,\ 3$）：

$$X^1=R,\ X^2=\Phi,\ X^3=Z \tag{1.1a}$$

它的三个基矢是

$$\mathbf{G}^K=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X^K} \tag{1.1b}$$

取空间坐标系（柱坐标）$x^k$（$k=1,\ 2,\ 3$）：

$$x^1=r,\qquad x^2=\varphi,\qquad x^3=z \tag{1.2a}$$

它的三个基矢是

$$\mathbf{g}^k=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} \tag{1.2b}$$

* 钱伟长推荐．

在这篇文章里，我们采用物质描述法，于是有下列基本方程或公式[2,3,4,8]：

1． 物质描述法的平衡方程（为简单计，略去体力）

$$\nabla_R \boldsymbol{\Sigma}\cdot = 0 \tag{1.3}$$

2． Kelvin-Cosserat 形式的应力-应变关系

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\,\mathbf{E} + \frac{1}{2}(\mathbf{C}_{(3)}\cdot\cdot\,\mathbf{E})\cdot\cdot\,\mathbf{E} \tag{1.4}$$

3． $\boldsymbol{\Sigma}$与$\boldsymbol{\tau}$之间的关系式

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{A}^T \qquad \text{（上角的“}T\text{”表示转置）} \tag{1.5}$$

4． Lagrange 应变张量

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}[\nabla_R\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla_R + (\nabla_R\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla_R)] \tag{1.6}$$

其中$\boldsymbol{\Sigma}$，$\boldsymbol{\tau}$分别为第一、第二类Piola-Kirchhoff 应力张量，$\mathbf{u}$为位移矢量，$\mathbf{A}$为变形梯度，算符$\nabla_R$（下角的“R”用以强调这是对物质坐标系而言）为

$$\nabla_R = \mathbf{G}^K\frac{\partial}{\partial X^K} \qquad \text{（求和约定！）} \tag{1.7}$$

$W(\mathbf{E})$为应变能函数[4,7,8]：

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{2!}(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\,\mathbf{E})\cdot\cdot\,\mathbf{E} + \frac{1}{3!}[(\mathbf{C}_{(3)}\cdot\cdot\,\mathbf{E})\cdot\cdot\,\mathbf{E}]\cdot\cdot\,\mathbf{E} + \cdots \tag{1.8}$$

$\mathbf{C}_{(2)}$和$\mathbf{C}_{(3)}$分别叫做二阶、三阶弹性常数张量（它们分别为$W$对$\mathbf{E}$的二阶、三阶导数）．倘若材料是各向同性的，则$\mathbf{C}_{(2)}$，$\mathbf{C}_{(3)}$的分量中只有下面五个是独立的：

$$\left.\begin{aligned} &C^{(2)}_{1122} = \lambda, \quad C^{(2)}_{2323} = \mu \\ &C^{(3)}_{112233} = \nu_1, \quad C^{(3)}_{112323} = \nu_2, \quad C^{(3)}_{231312} = \nu_3 \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

此中的$\lambda$，$\mu$叫做二阶Lamé常数，$\nu_1$，$\nu_2$，$\nu_3$叫做三阶Lamé常数[7]。

为了获得方程(1.3)的唯一解，尚须补充以适当的边界条件：

$$\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{T} \qquad \text{（在表面上）} \tag{1.10}$$

$\mathbf{N}$为表面的外向法线单位矢量，$\mathbf{T}$为应力矢量（表面面力）．

又若引进定义如下的微小应变张量$\tilde{\mathbf{E}}$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla_R\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla_R) \tag{1.11}$$

则Lagrange应变张量$\mathbf{E}$可表示为

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{2}(\nabla_R\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla_R) \tag{1.12}$$

## 二、逐次逼近解法

现在让我们用逐次逼近法[4,5,6,8]来求解本问题．注意在下面的计算里，我们将使用物理标架[2]，并对每个张量（包括矢量）一律取其物理分量．在这种情况下，把物质坐标系的三个基矢（如今皆单位矢量！）记作$\mathbf{G}_R$，$\mathbf{G}_\Phi$，$\mathbf{G}_Z$，而算符$\nabla_R$则变成

$$\nabla_R = \mathbf{G}_R \frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{G}_\Phi \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \Phi} + \mathbf{G}_Z \frac{\partial}{\partial Z} \tag{2.1}$$

按照上面所引文献，我们假定位移矢量$\mathbf{u}$可表示为小参数$\varepsilon$的渐近幂级数

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{u}_{(n)}(\mathbf{R}) \tag{2.2}$$

从而

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla_R \mathbf{u} = \nabla_R(\varepsilon \mathbf{u}_{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{u}_{(2)} + \cdots) = \varepsilon \nabla_R \mathbf{u}_{(1)} + \varepsilon^2 \nabla_R \mathbf{u}_{(2)} + \cdots \\
&\mathbf{u}\nabla_R = (\nabla_R \mathbf{u})^T = \varepsilon \mathbf{u}_{(1)}\nabla_R + \varepsilon^2 \mathbf{u}_{(2)}\nabla_R + \cdots \\
&(\nabla_R \mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla_R) = \varepsilon^2(\nabla_R \mathbf{u}_{(1)})\cdot(\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R) + \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

于是有

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\nabla_R \mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla_R) = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}_{(1)} + \varepsilon^2 \tilde{\mathbf{E}}_{(2)} + \cdots \tag{2.4}$$

其中

$$\tilde{\mathbf{E}}_{(1)} = \frac{1}{2}(\nabla_R \mathbf{u}_{(1)} + \mathbf{u}_{(1)}\nabla_R), \quad \tilde{\mathbf{E}}_{(2)} = \frac{1}{2}(\nabla_R \mathbf{u}_{(2)} + \mathbf{u}_{(2)}\nabla_R) \tag{2.5}$$

若将$\mathbf{E}$也表示为

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{E}_{(n)} = \varepsilon \mathbf{E}_{(1)} + \varepsilon^2 \mathbf{E}_{(2)} + \cdots \tag{2.6}$$

又因，根据(1.12)，

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{2}(\nabla_R \mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla_R) = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}_{(1)} + \varepsilon^2\left[\tilde{\mathbf{E}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\nabla_R \mathbf{u}_{(1)})\cdot(\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R)\right] + \cdots \tag{2.7}$$

则比较(2.6)和(2.7)，给出

$$\mathbf{E}_{(1)} = \tilde{\mathbf{E}}_{(1)} \tag{2.8a}$$

$$\mathbf{E}_{(2)} = \tilde{\mathbf{E}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\nabla_R \mathbf{u}_{(1)})\cdot(\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R) \tag{2.8b}$$

此外，变形梯度$\mathbf{A}$可表示为[4]

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla_R = \mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{u}_{(1)}\nabla_R + \varepsilon^2 \mathbf{u}_{(2)}\nabla_R + \cdots \\
&\mathbf{A}^T = (\mathbf{I} + \mathbf{u}\nabla_R)^T = \mathbf{I} + \varepsilon \nabla_R \mathbf{u}_{(1)} + \varepsilon^2 \nabla_R \mathbf{u}_{(2)} + \cdots
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

其中$\mathbf{I}$为单位张量，即

$$\mathbf{I} = \mathbf{G}_R\mathbf{G}_R + \mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi + \mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z \tag{2.10}$$

将(2.7)、(2.9)代入(1.4)、(1.5)，便得$\boldsymbol{\tau}$和$\boldsymbol{\Sigma}$的级数形式的表达式如下：

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \boldsymbol{\tau}_{(n)} = \varepsilon \boldsymbol{\tau}_{(1)} + \varepsilon^2 \boldsymbol{\tau}_{(2)} + \cdots \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \boldsymbol{\Sigma}_{(n)} = \varepsilon \boldsymbol{\Sigma}_{(1)} + \varepsilon^2 \boldsymbol{\Sigma}_{(2)} + \cdots \tag{2.12}$$

它们的第$n$项可写成如下形式：

$$\boldsymbol{\tau}_{(n)} = \mathbf{C}_{(2)} \cdot\cdot\, \tilde{\mathbf{E}}_{(n)} + \boldsymbol{\tau}^*_{(n)} \tag{2.13}$$

$$\Sigma_{(n)}=\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(n)}+\Sigma^*_{(n)} \tag{2.14}$$

其中$\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}$，$\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}$已由(2.5)给出，而

$$\tau^*_{(1)}=0,\ \tau^*_{(2)}=\frac{1}{2}\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot[(\nabla_R\mathbf{u}_{(1)})\cdot(\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R)]+\frac{1}{2}(\mathbf{C}_{(3)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(1)} \tag{2.15}$$

$$\Sigma^*_{(1)}=0,\ \Sigma^*_{(2)}=\tau^*_{(2)}+(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})\cdot(\nabla_R\mathbf{u}_{(1)}) \tag{2.16}$$

我们还假定表面面力$\mathbf{T}$乃是位置矢量$\mathbf{R}$的函数[即 $\mathbf{T}=\mathbf{T}(\mathbf{R})$]，并按 Signorini 的方案[4]将其表示为：

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{T}=\varepsilon\mathbf{T}_{(1)}\\ \mathbf{T}_{(n)}=0\qquad(\text{当}n\geqslant 2)\end{array}\right\} \tag{2.17}$$

将(2.12)、(2.17)代入平衡方程(1.3)和边界条件(1.10)，便得逐次微分方程和边界条件如下：

$$\nabla_R\cdot\Sigma_{(n)}=0\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{2.18a}$$

$$\mathbf{N}\cdot\Sigma_{(n)}=\mathbf{T}_{(n)}\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{2.18b}$$

于是，考虑到(2.14)、(2.16)及(2.17)，我们有：

当$n=1$时，

$$\nabla_R\cdot\Sigma_{(1)}=\nabla_R\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})=0 \tag{2.19a}$$

$$\mathbf{N}\cdot\Sigma_{(1)}=\mathbf{N}\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})=\mathbf{T}_{(1)} \tag{2.19b}$$

当$n=2$时，

$$\nabla_R\cdot\Sigma_{(2)}=\nabla_R\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}+\Sigma^*_{(2)})=0 \tag{2.20a}$$

$$\mathbf{N}\cdot\Sigma_{(2)}=\mathbf{N}\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}+\Sigma^*_{(2)})=0 \tag{2.20b}$$

至于上述边值问题解答的存在性和唯一性，Signorini以及Stoppelli等人已作了详细的阐述或证明[4,5,6,8]，这里就不赘述了．

## 三、一 次 解

我们考虑一个两端自由并承受均匀的内压力$p$和外压力$q$的各向同性圆筒，它在终态（已变形态）的内外半径分别为$a$和$b$（图1）．我们假定$p$和$q$均可展成小参数$\varepsilon$的幂级数．为了与公式(2.17)一致，令

$$\left.\begin{array}{l}p=\varepsilon p_{(1)},\quad q=\varepsilon q_{(1)}\\ p_{(n)}=q_{(n)}=0\qquad(\text{当}n\geqslant 2)\end{array}\right\} \tag{3.1}$$

现在，让我们来求解一次($n=1$)边值问题(2.19)．

首先，我们对位移矢量$\mathbf{u}$作一分析．鉴于问题的对称性，$\mathbf{u}$的各个分量必定都与角坐标$\Phi$无关．还有，角向分量$U_\Phi$必为零，而且径向分量$U_R$必与$Z$坐标无关．轴向分量$U_Z$在经典弹性理论所考虑的微小位移情形，它至多是$Z$的函数；至于在我们现在所要考虑的有限位移情形，$U_Z$是否也与$R$坐标无关还不甚清楚．为此，不妨暂且假定它与$Z$和$R$都有关．综上所述，我们把这些对称性要求概括为

$$U_R=U_R(R),\ U_\Phi=0,\ U_Z=U_Z(R,Z) \tag{3.2a}$$

或者，写成矢量形式，

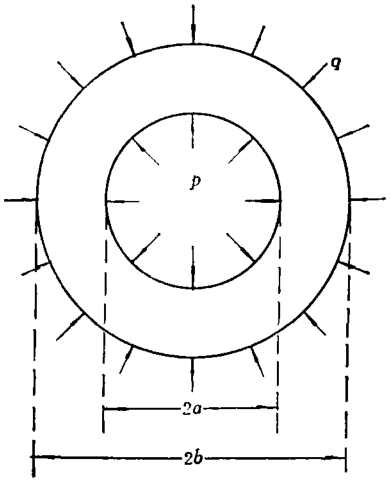


图1 圆筒截面

$$\mathbf{u}=U_R(R)\mathbf{G}_R+U_Z(R,\ Z)\mathbf{G}_Z \tag{3.2b}$$

现设

$$\mathbf{u}_{(1)}=U_R^{(1)}(R)\,\mathbf{G}_R+U_Z^{(1)}(R,\ Z)\mathbf{G}_Z \tag{3.3}$$

从而算出

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}&=\frac{1}{2}(\nabla_R\mathbf{u}_{(1)}+\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R)\\&=\frac{dU_R^{(1)}}{dR}\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R+\frac{U_R^{(1)}}{R}\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi+\frac{\partial U_Z^{(1)}}{\partial Z}\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial U_Z^{(1)}}{\partial R}(\mathbf{G}_R\mathbf{G}_Z+\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_R)\end{aligned} \tag{3.4}$$

对于各向同性材料，我们有

$$\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}=\lambda(\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})\mathbf{I}+2\mu\tilde{\mathbf{E}}_{(1)} \tag{3.5}$$

将(3.4)代入(3.5)，并忆及(2.14)和(2.16)，得

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{(1)}=&\left[(\lambda+2\mu)\frac{dU_R^{(1)}}{dR}+\lambda\left(\frac{U_R^{(1)}}{R}+\frac{\partial U_Z^{(1)}}{\partial Z}\right)\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R\\&+\left[(\lambda+2\mu)\frac{U_R^{(1)}}{R}+\lambda\left(\frac{dU_R^{(1)}}{dR}+\frac{\partial U_Z^{(1)}}{\partial Z}\right)\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi\\&+\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial U_Z^{(1)}}{\partial Z}+\lambda\left(\frac{dU_R^{(1)}}{dR}+\frac{U_R^{(1)}}{R}\right)\right]\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z\\&+\mu\frac{\partial U_Z^{(1)}}{\partial R}(\mathbf{G}_R\mathbf{G}_Z+\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_R)\end{aligned} \tag{3.6}$$

由此，

$$\begin{aligned}\nabla_R\cdot\mathbf{\Sigma}_{(1)}=&\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2U_R^{(1)}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dU_R^{(1)}}{dR}-\frac{U_R^{(1)}}{R^2}\right)+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2U_Z^{(1)}}{\partial R\partial Z}\right]\mathbf{G}_R\\&+\left[\mu\left(\frac{\partial^2U_Z^{(1)}}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial U_Z^{(1)}}{\partial R}\right)+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2U_Z^{(1)}}{\partial Z^2}\right]\mathbf{G}_Z\end{aligned} \tag{3.7}$$

于是，(2.19a)化为下列两个方程：

$$\frac{d^2U_R^{(1)}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dU_R^{(1)}}{dR}-\frac{U_R^{(1)}}{R^2}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2U_Z^{(1)}}{\partial R\partial Z} \tag{3.8a}$$

$$\frac{\partial^2U_Z^{(1)}}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial U_Z^{(1)}}{\partial R}=-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial^2U_Z^{(1)}}{\partial Z^2} \tag{3.8b}$$

因为方程(3.8a)的左边是$R$的函数，故右边一定也是$R$的函数，可见必有

$$\frac{\partial U_Z^{(1)}}{\partial Z}=f(R),\quad\frac{\partial^2U_Z^{(1)}}{\partial Z^2}=0 \tag{3.9a,b}$$

从而(3.8b)化为

$$\frac{\partial^2U_Z^{(1)}}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial U_Z^{(1)}}{\partial R}=0 \tag{3.10}$$

(3.9a)积分后给出

$$U_Z^{(1)}=f(R)Z \tag{3.11a}$$

把它代入(3.10)，解之得

$$f(R)=m+m'\ln R, \qquad U_Z^{(1)}=(m+m'\ln R)Z \tag{3.11b,c}$$

式中$m$，$m'$为待定常数。这样，(3.8a)变成

$$\frac{d^2U_R^{(1)}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dU_R^{(1)}}{dR}-\frac{U_R^{(1)}}{R^2}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{m'}{R} \tag{3.12}$$

由(3.6)，并考虑到(3.11c)，我们有

$$\mathbf{G}_R\cdot\mathbf{\Sigma}_{(1)}=\left[(\lambda+2\mu)\frac{dU_R^{(1)}}{dR}+\lambda\left(\frac{U_R^{(1)}}{R}+m+m'\ln R\right)\right]\mathbf{G}_R+\mu\frac{m'}{R}Z\mathbf{G}_Z \tag{3.13}$$

借助于(2.17)和(3.1)，边界条件(2.19b)可写成

$$-\mathbf{G}_R\cdot\mathbf{\Sigma}_{(1)}=p_{(1)}\mathbf{G}_R \qquad \text{在内壁面}(R=a) \tag{3.14a}$$

$$+\mathbf{G}_R\cdot\mathbf{\Sigma}_{(1)}=-q_{(1)}\mathbf{G}_R \qquad \text{在外壁面}(R=b) \tag{3.14b}$$

结合(3.13)和(3.14)，给出

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\frac{dU_R^{(1)}}{dR}+\lambda\left(\frac{U_R^{(1)}}{R}+m+m'\ln R\right)=-p_{(1)}\\&\mu\frac{m'}{R}Z=0\end{aligned}\right\}\text{在}R=a \tag{3.15a}$$

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda+2\mu)\frac{dU_R^{(1)}}{dR}+\lambda\left(\frac{U_R^{(1)}}{R}+m+m'\ln R\right)=-q_{(1)}\\&\mu\frac{m'}{R}Z=0\end{aligned}\right\}\text{在}R=b \tag{3.15b}$$

由此可见

$$m'=0 \tag{3.16}$$

因此，$U_Z^{(1)}$的表达式(3.11c)应为

$$U_Z^{(1)}=mZ \tag{3.17}$$

而方程(3.12)及边界条件(3.15)则分别化为

$$\frac{d^2U_R^{(1)}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dU_R^{(1)}}{dR}-\frac{U_R^{(1)}}{R^2}=0 \tag{3.18}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{dU_R^{(1)}}{dR}+\lambda\left(\frac{U_R^{(1)}}{R}+m\right)=\begin{cases}-p_{(1)} & \text{在}R=a \quad (3.19\text{a})\\ -q_{(1)} & \text{在}R=b \quad (3.19\text{b})\end{cases}$$

(3.17)表明，质点的轴向位移$U_Z^{(1)}$与$R$无关，原在同一截面$Z=\text{const}$上的各质点，变形后一道移至另一与之平行的平面上。

微分方程(3.18)的通解是

$$U_R^{(1)}=kR+\frac{l}{R} \tag{3.20}$$

式中$k$，$l$为待定常数．因此，边界条件(3.19)又可改写为

$$2(\lambda+\mu)k-\frac{2\mu}{a^2}l+\lambda m=-p_{(1)} \tag{3.21a}$$

$$2(\lambda+\mu)k-\frac{2\mu}{b^2}l+\lambda m=-q_{(1)} \tag{3.21b}$$

上二式相减，得

$$l=\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^2b^2}{2\mu(b^2-a^2)} \tag{3.22}$$

将$l$之值代入(3.21)中的任一式，得

$$2(\lambda+\mu)k+\lambda m=\frac{p_{(1)}a^2-q_{(1)}b^2}{b^2-a^2} \tag{3.23}$$

为了确定常数$k$，$m$之值，尚须补充一个方程。

借助于(3.17)和(3.20)，我们把$\mathbf{\Sigma}_{(1)}$的表达式(3.6)改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}_{(1)}=&\left[2(\lambda+\mu)k+\lambda m-\frac{2\mu l}{R^2}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R\\&+\left[2(\lambda+\mu)k+\lambda m+\frac{2\mu l}{R^2}\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi\\&+[2\lambda k+(\lambda+2\mu)m]\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z\end{aligned} \tag{3.24}$$

显而易见，应力张量$\mathbf{\Sigma}_{(1)}$的分量$\Sigma^{(1)}_{ZZ}$（任一截面$Z=$const 上的法应力）乃是一个常数。与此相对应，变形后截面的单位面积上有一常力$[2\lambda k+(\lambda+2\mu)m]\mathbf{G}_Z$。按假设，圆筒两端无载荷，因而在端面我们有$\Sigma_{ZZ}S$等于零（$S$为端面面积），亦即

$$2\lambda k+(\lambda+2\mu)m=0 \tag{3.25}$$

这就是所需的补充方程。联立解(3.23)和(3.25)，得

$$k=\frac{(\lambda+2\mu)(p_{(1)}a^2-q_{(1)}b^2)}{2\mu(3\lambda+2\mu)(b^2-a^2)},\quad m=-\frac{\lambda(p_{(1)}a^2-q_{(1)}b^2)}{\mu(3\lambda+2\mu)(b^2-a^2)} \tag{3.26a,b}$$

既然$k$，$l$，$m$之值已经确定，我们便有下列一次解[1)]：

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{(1)}=&\left(kR+\frac{l}{R}\right)\mathbf{G}_R+mZ\mathbf{G}_Z\\=&\left[\frac{(\lambda+2\mu)(p_{(1)}a^2-q_{(1)}b^2)}{2\mu(3\lambda+2\mu)(b^2-a^2)}R+\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^2b^2}{2\mu(b^2-a^2)}\frac{1}{R}\right]\mathbf{G}_R\\&-\frac{\lambda(p_{(1)}a^2-q_{(1)}b^2)}{\mu(3\lambda+2\mu)(b^2-a^2)}Z\mathbf{G}_Z\end{aligned} \tag{3.27a}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(1)}=\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}=&\left(k-\frac{l}{R^2}\right)\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R+\left(k+\frac{l}{R^2}\right)\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi+m\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z\\=&\left[\frac{(\lambda+2\mu)(p_{(1)}a^2-q_{(1)}b^2)}{2\mu(3\lambda+2\mu)(b^2-a^2)}-\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^2b^2}{2\mu(b^2-a^2)}\frac{1}{R^2}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R\\&+\left[\frac{(\lambda+2\mu)(p_{(1)}a^2-q_{(1)}b^2)}{2\mu(3\lambda+2\mu)(b^2-a^2)}+\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^2b^2}{2\mu(b^2-a^2)}\frac{1}{R^2}\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi\\&-\frac{\lambda(p_{(1)}a^2-q_{(1)}b^2)}{\mu(3\lambda+2\mu)(b^2-a^2)}\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z\end{aligned} \tag{3.27b}$$

1) 我们特意在(3.27a, b)中保留了用$k$，$l$，$m$表示的表达式，它们将在下节用到。

$$\mathbf{\Sigma}_{(1)}=\left[\frac{p_{(1)}a^2-q_{(1)}b^2}{b^2-a^2}-\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{1}{R^2}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$
$$+\left[\frac{p_{(1)}a^2-q_{(1)}b^2}{b^2-a^2}+\frac{(p_{(1)}-q_{(1)})a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{1}{R^2}\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi \tag{3.27c}$$

这些解对应于经典线性理论的解。

最后，我们获得位移场、应变场和应力场的一级近似公式：

$$\mathbf{u}^{\mathrm{I}}=\varepsilon\mathbf{u}_{(1)},\ \mathbf{E}^{\mathrm{I}}=\varepsilon\mathbf{E}_{(1)},\ \mathbf{\Sigma}^{\mathrm{I}}=\varepsilon\mathbf{\Sigma}_{(1)} \tag{3.28}$$

它们应该就是经典线性理论的结果。

因为在$\mathbf{u}_{(1)}$，$\mathbf{E}_{(1)}$，$\mathbf{\Sigma}_{(1)}$的表达式中，每一项均为$p_{(1)}$，$q_{(1)}$的一次项，故乘以$\varepsilon$后，考虑到(3.1)，亦即$\varepsilon p_{(1)}=p$和$\varepsilon q_{(1)}=q$，便使参数$\varepsilon$在$\mathbf{u}^{\mathrm{I}}$，$\mathbf{E}^{\mathrm{I}}$和$\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{I}}$的最终表达式中消失。例如

$$\mathbf{\Sigma}^{\mathrm{I}}=\varepsilon\mathbf{\Sigma}_{(1)}=\left[\frac{pa^2-qb^2}{b^2-a^2}-\frac{(p-q)a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{1}{R^2}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$
$$+\left[\frac{pa^2-qb^2}{b^2-a^2}+\frac{(p-q)a^2b^2}{b^2-a^2}\frac{1}{R^2}\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi \tag{3.29}$$

如所预期，上式正是经典线性弹性理论里熟知的Lamé公式[1]。

## 四、二 次 解

现在，我们进而求解二次($n=2$)边值问题(2.20)。

对于各向同性材料[4]，我们有

$$\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}=\lambda(\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{E}}_{(2)})\mathbf{I}+2\mu\tilde{\mathbf{E}}_{(2)} \tag{4.1}$$

此外还利用(1.9)和(2.15)、(2.16)求得

$$\mathbf{\Sigma}^*_{(2)}=\left\{\frac{\lambda}{2}\mathrm{tr}[(\nabla_R\mathbf{u}_{(1)})\cdot(\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R)]+\frac{\nu_1}{2}(\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})^2+\nu_2\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{E}}^2_{(1)}\right\}\mathbf{I}$$
$$+\lambda(\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})\nabla_R\mathbf{u}_{(1)}+\mu(\nabla_R\mathbf{u}_{(1)})\cdot(\mathbf{u}_{(1)}\nabla_R)$$
$$+2\mu\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}\cdot(\nabla_R\mathbf{u}_{(1)})+2\nu_2(\mathrm{tr}\tilde{\mathbf{E}}_{(1)})\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}+4\nu_3\tilde{\mathbf{E}}^2_{(1)} \tag{4.2}$$

首先，我们计算$\mathbf{\Sigma}^*_{(2)}$。

将$\mathbf{u}_{(1)}$及$\tilde{\mathbf{E}}_{(1)}$的用$k$，$l$，$m$表示的表达式(3.27a,b)代入(4.2)，经简化后可得

$$\mathbf{\Sigma}^*_{(2)}=\left[A-\frac{B}{R^2}+(\lambda+2\mu)\frac{2\Omega l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$
$$+\left[A+\frac{B}{R^2}+(\lambda+2\mu)\frac{2\Omega l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi$$
$$+\left[C+(\lambda+2\nu_2)\frac{l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z \tag{4.3}$$

其中

$$\Omega=\frac{\lambda+3\mu+2\nu_2+4\nu_3}{2(\lambda+2\mu)} \tag{4.4a}$$

$$A=2\Omega(\lambda+2\mu)k^2+(\lambda+2\nu_2)\left[k(2k+m)+\frac{m^2}{2}\right]+\frac{\nu_1}{2}(2k+m)^2 \tag{4.4b}$$

$$B=4\Omega(\lambda+2\mu)kl+(\lambda+2\nu_2)lm \tag{4.4c}$$

$$C=2\Omega(\lambda+2\mu)m^2+(\lambda+2\nu_2)\left(k^2+2km+\frac{m^2}{2}\right)+\frac{\nu_1}{2}(2k+m)^2 \tag{4.4d}$$

再由(4.3)算出

$$\nabla_R\cdot\boldsymbol{\Sigma}^*_{(2)}=-(\lambda+2\mu)\frac{8\Omega l^2}{R^5}\mathbf{G}_R \tag{4.5}$$

其次，我们计算$\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}$。

假设$\mathbf{u}_{(2)}$具有形式[1]

$$\mathbf{u}_{(2)}=U_R^{(2)}(R)\mathbf{G}_R+U_Z^{(2)}(R,\ Z)\mathbf{G}_Z \tag{4.6}$$

由此，

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}&=\frac{1}{2}(\nabla_R\mathbf{u}_{(2)}+\mathbf{u}_{(2)}\nabla_R)\\&=\frac{dU_R^{(2)}}{dR}\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R+\frac{U_R^{(2)}}{R}\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi+\frac{\partial U_Z^{(2)}}{\partial Z}\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z+\frac{1}{2}\frac{\partial U_Z^{(2)}}{\partial R}(\mathbf{G}_R\mathbf{G}_Z+\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_R)\end{aligned} \tag{4.7}$$

于是，按照(4.1)，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}=&\left[(\lambda+2\mu)\frac{dU_R^{(2)}}{dR}+\lambda\left(\frac{U_R^{(2)}}{R}+\frac{\partial U_Z^{(2)}}{\partial Z}\right)\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R\\&+\left[(\lambda+2\mu)\frac{U_R^{(2)}}{R}+\lambda\left(\frac{dU_R^{(2)}}{dR}+\frac{\partial U_Z^{(2)}}{\partial Z}\right)\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi\\&+\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial U_Z^{(2)}}{\partial Z}+\lambda\left(\frac{dU_R^{(2)}}{dR}+\frac{U_R^{(2)}}{R}\right)\right]\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z\\&+\mu\frac{\partial U_Z^{(2)}}{\partial R}(\mathbf{G}_R\mathbf{G}_Z+\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_R)\end{aligned} \tag{4.8}$$

因而

$$\begin{aligned}\nabla_R\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\tilde{\mathbf{E}}_{(2)})=&\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{d^2U_R^{(2)}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dU_R^{(2)}}{dR}-\frac{U_R^{(2)}}{R^2}\right)+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2U_Z^{(2)}}{\partial R\partial Z}\right]\mathbf{G}_R\\&+\left[\mu\left(\frac{\partial^2U_Z^{(2)}}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial U_Z^{(2)}}{\partial R}\right)+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2U_Z^{(2)}}{\partial Z^2}\right]\mathbf{G}_Z\end{aligned} \tag{4.9}$$

将(4.5)、(4.9)代入(2.20a)，得到下面两个方程：

$$\frac{d^2U_R^{(2)}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dU_R^{(2)}}{dR}-\frac{U_R^{(2)}}{R^2}-\frac{8\Omega l^2}{R^5}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2U_Z^{(2)}}{\partial R\partial Z} \tag{4.10a}$$

$$\frac{\partial^2U_Z^{(2)}}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial U_Z^{(2)}}{\partial R}=-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial^2U_Z^{(2)}}{\partial Z^2} \tag{4.10b}$$

我们看到，方程组(4.10)与上节中的方程组(3.8)具有同样形式。按照求解(3.8)的论据，我们得到

$$U_Z^{(2)}=(\gamma+\gamma'\ln R)Z \tag{4.11}$$

式中$\gamma$，$\gamma'$为待定常数。这样，(4.10)化为

---

1) 由于问题的对称性，质点的轴向位移分量$U_Z^{(2)}$很可能也像$U_Z^{(1)}$那样与$R$无关．但在弄清这一点之前，不妨仍先假定$U_Z^{(2)}=U_Z^{(2)}(R,\ Z)$。

$$\frac{d^2U_R^{(2)}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dU_R^{(2)}}{dR}-\frac{U_R^{(2)}}{R^2}=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\gamma'}{R}+\frac{8\Omega l^2}{R^5} \tag{4.12}$$

由(4.3)和(4.8)，并考虑到(4.11)，我们有

$$\mathbf{G}_R\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\overline{\mathbf{E}}_{(2)}+\mathbf{\Sigma}^*_{(2)})=\left[(\lambda+2\mu)\frac{dU_R^{(2)}}{dR}+\lambda\left(\frac{U_R^{(2)}}{R}+\gamma+\gamma'\ln R\right)\right.$$
$$\left.+A-\frac{B}{R^2}+(\lambda+2\mu)\frac{2\Omega l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_R+\mu\frac{\gamma'}{R}Z\mathbf{G}_Z \tag{4.13}$$

根据边界条件(2.20b)，我们有

$$\mathbf{G}_R\cdot(\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\overline{\mathbf{E}}_{(2)}+\mathbf{\Sigma}^*_{(2)})=0 \quad 在\ R=a,b \tag{4.14}$$

从而

$$\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{dU_R^{(2)}}{dR}+\frac{2\Omega l^2}{R^4}\right)+\lambda\left(\frac{U_R^{(2)}}{R}+\gamma+\gamma'\ln R\right)+A-\frac{B}{R^2}\right]_{R=a,b}=0 \tag{4.15a}$$

$$\mu\frac{\gamma'}{R}Z\Big|_{R=a,b}=0,\ 即\ \gamma'=0 \tag{4.15b}$$

于是(4.11)、(4.12)、(4.15a)分别化为

$$U_Z^{(2)}=\gamma Z \tag{4.16}$$

$$\frac{d^2U_R^{(2)}}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dU_R^{(2)}}{dR}-\frac{U_R^{(2)}}{R^2}=\frac{8\Omega l^2}{R^5} \tag{4.17}$$

$$\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{dU_R^{(2)}}{dR}+\frac{2\Omega l^2}{R^4}\right)+\lambda\left(\frac{U_R^{(2)}}{R}+\gamma\right)+A-\frac{B}{R^2}\right]_{R=a,b}=0 \tag{4.18}$$

(4.16)表明，同$U_Z^{(1)}$一样，$U_Z^{(2)}$也与$R$无关．故圆筒截面在变形后移到仍与$Z$轴垂直的一个平面上．

鉴于微分方程(4.17)具有通解

$$U_R^{(2)}=\alpha R+\frac{\beta}{R}+\frac{\Omega l^2}{R^3} \tag{4.19}$$

边界条件(4.18)化为

$$2(\lambda+\mu)\alpha-\frac{2\mu}{a^2}\beta+\lambda\gamma+A-\frac{B}{a^2}-\frac{2\Omega\mu l^2}{a^4}=0 \tag{4.20a}$$

$$2(\lambda+\mu)\alpha-\frac{2\mu}{b^2}\beta+\lambda\gamma+A-\frac{B}{b^2}-\frac{2\Omega\mu l^2}{b^4}=0 \tag{4.20b}$$

但这两个方程还不足以确定三个未知量$\alpha$，$\beta$和$\gamma$．与第三节中的情形相类似，需要再补充一个方程．

将(4.16)、(4.19)代入(4.8)，得

$$\mathbf{C}_{(2)}\cdot\cdot\overline{\mathbf{E}}_{(2)}=\left[2(\lambda+\mu)\alpha+\lambda\gamma-\frac{2\mu\beta}{R^2}-(\lambda+3\mu)\frac{2\Omega l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$
$$+\left[2(\lambda+\mu)\alpha+\lambda\gamma+\frac{2\mu\beta}{R^2}-(\lambda-\mu)\frac{2\Omega l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi$$
$$+\left[2\lambda\alpha+(\lambda+2\mu)\gamma-\lambda\frac{2\Omega l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z \tag{4.21}$$

(4.21)与(4.3)相加，给出

$$\Sigma_{(2)}=\left[2(\lambda+\mu)\alpha+\lambda\gamma+A-\frac{2\mu\beta+B}{R^2}-\frac{2\Omega\mu l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$

$$+\left[2(\lambda+\mu)\alpha+\lambda\gamma+A+\frac{2\mu\beta+B}{R^2}+\frac{6\Omega\mu l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi$$

$$+\left[2\lambda\alpha+(\lambda+2\mu)\gamma+C-(2\Omega\lambda-\lambda-2\nu_2)\frac{l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z \tag{4.22}$$

从上式看出，应力分量$\Sigma_{ZZ}^{(2)}$乃是$R$的函数，因此在圆筒截面上的$R$处相应地每单位面积有面力$\left[2\lambda\alpha+(\lambda+2\mu)\gamma+C-(2\Omega\lambda-\lambda-2\nu_2)\frac{l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_Z$。因为，按假设，圆筒的两端为自由面（无载荷），故在端面我们有

$$\int_a^b\left[2\lambda\alpha+(\lambda+2\mu)\gamma+C-(2\Omega\lambda-\lambda-2\nu_2)\frac{l^2}{R^4}\right]2\pi R dR=0 \tag{4.23a}$$

或

$$2\lambda\alpha+(\lambda+2\mu)\gamma+C-(2\Omega\lambda-\lambda-2\nu_2)\frac{l^2}{a^2b^2}=0 \tag{4.23b}$$

联立解(4.20a,b)及(4.23b)，得

$$\alpha=-\frac{1}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\left\{(\lambda+2\mu)\left(A+\frac{2\Omega\mu l^2}{a^2b^2}\right)-\lambda\left[C-(2\Omega\lambda-\lambda-2\nu_2)\frac{l^2}{a^2b^2}\right]\right\} \tag{4.24a}$$

$$\beta=-\frac{1}{2\mu}\left[B+(a^2+b^2)\frac{2\Omega\mu l^2}{a^2b^2}\right] \tag{4.24b}$$

$$\gamma=\frac{1}{\mu(3\lambda+2\mu)}\left\{\lambda\left(A+\frac{2\Omega\mu l^2}{a^2b^2}\right)-(\lambda+\mu)\left[C-(2\Omega\lambda-\lambda-2\nu_2)\frac{l^2}{a^2b^2}\right]\right\} \tag{4.24c}$$

并在求解过程获得下面就要用到的关系式

$$2(\lambda+\mu)\alpha+\lambda\gamma+A=-\frac{2\Omega\mu l^2}{a^2b^2} \tag{4.24d}$$

既经确定了常数$\alpha,\beta,\gamma$之值，$\mathbf{u}_{(2)}$也就随之确定了：

$$\mathbf{u}_{(2)}=\left(\alpha R+\frac{\beta}{R}+\frac{\Omega l^2}{R^3}\right)\mathbf{G}_R+\gamma Z\mathbf{G}_Z \tag{4.25}$$

于是(4.7)及(2.8b)分别给出

$$\tilde{\mathbf{E}}_{(2)}=\left(\alpha-\frac{\beta}{R^2}-\frac{3\Omega l^2}{R^4}\right)\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R+\left(\alpha+\frac{\beta}{R^2}+\frac{\Omega l^2}{R^4}\right)\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi+\gamma\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z \tag{4.26}$$

$$\mathbf{E}_{(2)}=\left[\alpha+\frac{k^2}{2}-(\beta+kl)\frac{1}{R^2}-\frac{1}{2}(6\Omega-1)\frac{l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$

$$+\left[\alpha+\frac{k^2}{2}+(\beta+kl)\frac{1}{R^2}+\frac{1}{2}(2\Omega+1)\frac{l^2}{R^4}\right]\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi$$

$$+\left(\gamma+\frac{m^2}{2}\right)\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z \tag{4.27}$$

再从(4.22)，并利用(4.23b)和(4.24b,d)，得到

$$\Sigma_{(2)}=-\frac{2\Omega\mu l^2}{a^2b^2}\left(1-\frac{a^2+b^2}{R^2}+\frac{a^2b^2}{R^4}\right)\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$

$$-\frac{2\Omega\mu l^2}{a^2b^2}\left(1+\frac{a^2+b^2}{R^2}-\frac{3a^2b^2}{R^4}\right)\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi$$

$$+\frac{(2\Omega\lambda-\lambda-2\nu_2)l^2}{a^2b^2}\left(1-\frac{a^2b^2}{R^4}\right)\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z \tag{4.28}$$

其中，考虑到$l$和$\Omega$的表达式(3.22)和(4.4a),

$$\frac{2\Omega\mu l^2}{a^2b^2}=\frac{(\lambda+3\mu+2\nu_2+4\nu_3)(p_{(1)}-q_{(1)})^2a^2b^2}{4\mu(\lambda+2\mu)(b^2-a^2)^2} \tag{4.29a}$$

$$\frac{(2\Omega\lambda-\lambda-2\nu_2)l^2}{a^2b^2}=\frac{(\lambda\mu+4\lambda\nu_3-4\mu\nu_2)(p_{(1)}-q_{(1)})^2a^2b^2}{4\mu^2(\lambda+2\mu)(b^2-a^2)^2} \tag{4.29b}$$

以上的(4.25)、(4.27)和(4.28)便是所欲求的二次解．这样，我们便获得位移场、应变场和应力场的二级近似公式如下：

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}^{\mathrm{I}}&=\varepsilon\mathbf{u}_{(1)}+\varepsilon^2\mathbf{u}_{(2)}=\mathbf{u}^{\mathrm{I}}+\varepsilon^2\mathbf{u}_{(2)}\\ \mathbf{E}^{\mathrm{I}}&=\varepsilon\mathbf{E}_{(1)}+\varepsilon^2\mathbf{E}_{(2)}=\mathbf{E}^{\mathrm{I}}+\varepsilon^2\mathbf{E}_{(2)}\\ \Sigma^{\mathrm{I}}&=\varepsilon\Sigma_{(1)}+\varepsilon^2\Sigma_{(2)}=\Sigma^{\mathrm{I}}+\varepsilon^2\Sigma_{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

我们已在第三节末指出，在$\mathbf{u}^{\mathrm{I}}$,$\mathbf{E}^{\mathrm{I}}$，$\Sigma^{\mathrm{I}}$的最终表达式中，参数$\varepsilon$消失。鉴于在$\mathbf{u}_{(2)}$,$\mathbf{E}_{(2)}$,$\Sigma_{(2)}$的表达式(4.25)、(4.27)、(4.28)中，每一项均为关于$p_{(1)}$,$q_{(1)}$的二次项，从而乘以$\varepsilon^2$后，根据(3.1)，它们便化为关于$p$，$q$的二次项，参数$\varepsilon$也就消失了．这样，在$\mathbf{u}^{\mathrm{I}}$，$\mathbf{E}^{\mathrm{I}}$，$\Sigma^{\mathrm{I}}$的最终结果里，$\varepsilon$是不存在的．我们仍以应力场为例，写出它的二级近似公式如下：

$$\Sigma^{\mathrm{I}}=\left\{\frac{1}{b^2-a^2}\left[pa^2-qb^2-\frac{(p-q)a^2b^2}{R^2}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{(\lambda+3\mu+2\nu_2+4\nu_3)(p-q)^2a^2b^2}{4\mu(\lambda+2\mu)(b^2-a^2)^2}\left[1-\frac{a^2+b^2}{R^2}+\frac{a^2b^2}{R^4}\right]\right\}\mathbf{G}_R\mathbf{G}_R$$

$$+\left\{\frac{1}{b^2-a^2}\left[pa^2-qb^2+\frac{(p-q)a^2b^2}{R^2}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{(\lambda+3\mu+2\nu_2+4\nu_3)(p-q)^2a^2b^2}{4\mu(\lambda+2\mu)(b^2-a^2)^2}\left[1+\frac{a^2+b^2}{R^2}-\frac{3a^2b^2}{R^4}\right]\right\}\mathbf{G}_\Phi\mathbf{G}_\Phi$$

$$+\frac{(\lambda\mu+4\lambda\nu_3-4\mu\nu_2)(p-q)^2a^2b^2}{4\mu^2(\lambda+2\mu)(b^2-a^2)^2}\left(1-\frac{a^2b^2}{R^4}\right)\mathbf{G}_Z\mathbf{G}_Z \tag{4.31}$$

## 五、结 束 语

前已指出，因为$U_Z^{(1)}$和$U_Z^{(2)}$均与$R$无关，故圆筒的任一截面$Z=\text{const}$上的所有质点将全部移至另一仍与$Z$轴垂直的平面上．另一方面，这一点也可从$E_{ZZ}^{(1)}=\text{const}$和$E_{ZZ}^{(2)}=\text{const}$这个结果而有所察觉．

此外，在一次理论里，我们看到

$$\left.\begin{array}{l} E_{RR}^{(1)}+E_{\Phi\Phi}^{(1)}=\text{const} \\ \Sigma_{ZZ}^{(1)}=0, \quad \Sigma_{RR}^{(1)}+\Sigma_{\Phi\Phi}^{(1)}=\text{const} \end{array}\right\} \tag{5.1}$$

这是经典弹性理论里众所周知的结果[1]．然而在二次理论里，我们注意到

$$\left.\begin{array}{l} E_{RR}^{(2)}+E_{\Phi\Phi}^{(2)}=2\alpha+k^2-(2\Omega-1)\dfrac{l^2}{R^4} \\ \Sigma_{RR}^{(2)}+\Sigma_{\Phi\Phi}^{(2)}=-\dfrac{2\Omega\mu l^2}{a^2b^2}\cdot 2\left(1-\dfrac{a^2b^2}{R^4}\right) \end{array}\right\} \tag{5.2a, b}$$

可见，跟一次理论的结果形成鲜明的对照，$E_{RR}^{(2)}$与$E_{\Phi\Phi}^{(2)}$之和以及$\Sigma_{RR}^{(2)}$与$\Sigma_{\Phi\Phi}^{(2)}$之和在整个圆筒内均已不再保持恒定．这一因有限位移而产生的效应，当然是线性近似或经典理论里所完全没有的．随之发生的是，不同于一次理论的情形($\Sigma_{ZZ}^{(1)}=0$)，

$$\Sigma_{ZZ}^{(2)}=\frac{(2\Omega\lambda-\lambda-2\nu_2)l^2}{a^2b^2}\left(1-\frac{a^2b^2}{R^4}\right) \tag{5.3}$$

合并(5.2b)和(5.3)，同时考虑到(4.29)，我们便得关系式

$$\Sigma_{ZZ}^{(2)}=-\frac{\lambda\mu+4\lambda\nu_3-4\mu\nu_2}{2\mu(\lambda+3\mu+2\nu_2+4\nu_3)}(\Sigma_{RR}^{(2)}+\Sigma_{\Phi\Phi}^{(2)}) \tag{5.4}$$

由此可见，$\Sigma_{ZZ}^{(2)}$的出现正是由于$\Sigma_{RR}^{(2)}$与$\Sigma_{\Phi\Phi}^{(2)}$之和不为常数而引起的，而且$\Sigma_{ZZ}^{(2)}$与$(\Sigma_{RR}^{(2)}+\Sigma_{\Phi\Phi}^{(2)})$之间呈现线性关系，其比例系数之值取决于圆筒的材料，而与圆筒的内外半径以及它所遭受的内外压力的大小无关．

## 参 考 文 献


[1] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，(1956)．

[2] 郭仲衡，《非线性弹性理论》，科学出版社，(1980)．

[3] Eringen, A. C., *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill, New York (1962).

[4] Gairola, B. K. D., Nonlinear elastic problems, in F. R. N. Nabarro, (ed.), *Dislocations in Solids*, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam(1979), 223—342.

[5] Green, A. E. and J. E. Adkins, *Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics*, The Clarendon Press, Oxford (1960).

[6] Grioli, G., *Mathematical Theory of Elastic Equilibrium* (Recent Results), Springer, Berlin (1962).

[7] Toupin, R. A. and B. Bernstein, Sound waves in deformed perfectly elastic materials, Acoustoelastic effect, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 33 (1961), 216—225.

[8] Truesdell, C. and W. Noll, The non-linear field theories of mechanics, *Handbuch der Physik*, Bd. Ⅲ/3, Springer, Berlin (1965).

# On the Finite Displacement Problem of a Hollow Cylinder under Internal and External Pressures

Huang Ze-yan

*(Wuhan College of Geology, Wuhan)*

**Abstract**

Using the method of successive approximations we find for this boundary-value problem the first- and second-order solutions. And then we obtain the formulae in the second approximation for the displacement, strain, and stress fields. Also, our results show that after deformation (i) a cross section of the cylinder must be displaced into a plane section perpendicular to the central axis of the cylinder; and (ii) neither the sum of the strain components $E^{(2)}_{RR}$ and $E^{(2)}_{\Phi\Phi}$ nor the sum of the stress components $\Sigma^{(2)}_{RR}$ and $\Sigma^{(2)}_{\Phi\Phi}$ maintains constant throughout the cylinder. The latter effect, which is absent from classical elasticity, bears responsibility for the presence of the $\Sigma^{(2)}_{ZZ}$. Moreover, there exhibits a linear relation between $\Sigma^{(2)}_{ZZ}$ and $(\Sigma^{(2)}_{RR}+\Sigma^{(2)}_{\Phi\Phi})$, with the proportionality coefficient depending only on the material of the cylinder.