

# 模具与工件之间摩擦过程的一个模型\*

罗子健 唐才荣

(中国西北工业大学材料工程系)

B. 阿维楚 C. J. 范 泰

(美国利哈伊大学金属压力加工研究所)

(钱伟长推荐, 1983年6月6日收到)

## 摘 要

本文中以刚性微凸体与可变形微凸体的相互作用模拟金属压力加工过程中模具与工件之间的摩擦过程, 并用上限法分析所提出的模型。将数学模型进行多变量最优化处理后发现, 金属压力加工过程中, 除了可能发生工件上的微凸体与模具上的微凸体相互粘结、撕裂和犁沟等现象外, 工件上的微凸体可能沿工件表面波浪式前进, 形成塑性波, 也可能被辗平而消失。在形成塑性波条件下, 摩擦系数与微凸体几何形状有关, 但微凸体的连结强度对摩擦系数影响不大。微凸体的几何形状对工件表面下的塑性变形层的深度有显著的影响。实验结果证实了本文所提出的模型的前提的正确性以及部分理论分析结果。

## 一、引 言

最近几十年内, 电子计算机得到广泛使用, 为有限元、极限分析等方法在金属压力加工领域中的应用创造了条件, 因而金属压力加工理论水平有了很大的提高。但是, 至今对于金属压力加工过程中的摩擦现象的了解仍然是十分有限的。这是因为工件与模具之间的摩擦是涉及到机械、冶金、力学、物理以及化学等方面的极为复杂的过程。目前, 在分析金属压力加工过程时, 由于对摩擦现象的知识水平低, 一般还是采用库仑定律或假定摩擦应力为常数等方法处理有关问题。这种情况与现代金属压力加工的理论水平是极不相称的。因此, 金属压力加工过程中的摩擦问题, 不仅成为金属压力加工专业人员关注的问题, 而且已成为近十多年新兴起来的摩擦学中的一个重要方面。

研究摩擦现象的方法之一是, 分析两个物体上相互作用的微凸体的塑性变形过程。Bowden和Tabor基于这种方法提出了粘着摩擦理论<sup>[1]</sup>。之后, Green, Edwards以及Halling等先后用滑移线法和上限法分析两物体相对滑动时, 物体上单个微凸体的塑性变形过程。他们通过理论分析和实验研究, 揭示了微凸体几何形状以及接触面连结强度对摩擦系数的影

\* 这是中国西北工业大学材料工程系和美国利哈伊大学金属压力加工研究所科研合作协议中的一个项目。

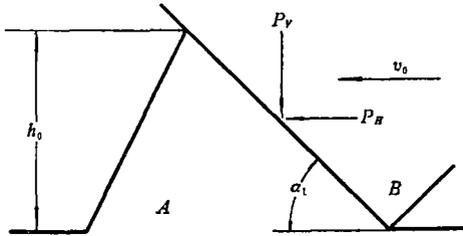
响<sup>[2]</sup>。上述研究结果有助于了解金属压力加工过程中的摩擦现象。

Wanheim进一步用滑移线法和上限法研究坚硬物体对比较软而粗糙的物体相对滑动时的摩擦现象<sup>[3]</sup>。这种情况基本上反映了金属压力加工过程中模具和工件之间的摩擦特点。Wanheim的研究基于这样的事实,即在上述条件下较软物体上的微凸体沿表面作起伏运动,形成塑性波,从而在较软物体的表面下形成塑性变形薄层。

作者在Wanheim研究结果的启发下,以刚性微凸体与可变形的微凸体的相互作用模拟金属压力加工过程中模具与工件之间的摩擦过程,并用上限法分析这种过程。在对所建立的数学模型进行最优化处理的基础上,探讨了微凸体的几何形状以及接触面连结强度对摩擦系数和较软材料表面下塑性变形层深度的影响。同时,理论分析结果表明,在一定条件下,可变形微凸体可能被坚硬的微凸体辗平而消失。理论分析的基本前提以及某些结论得到了实验证实。

## 二、速度场

假设A为工件上的一个微凸体,系刚塑性体。B为模具上的微凸体,系刚体(图1)。如



工件固定不动,模具以速度 $v_0$ 沿工件表面移动,微凸体A将受到垂直压力 $P_v$ 和水平推力 $P_H$ 的作用而发生塑性变形。变形前,沿宽度 $b_0$ 方向微凸体A各截面相同,均为三角形,其高度为 $h_0$ ,底边长度为 $l_0$ ,与微凸体B接触一边的角度为 $\alpha_1$ 。进行分析时,假定对于不同的 $\alpha_1$ ,微凸体A的体积 $V$ 和原始高度 $h_0$ 保持不变。同时,假定变形过程中微凸体的宽度保持不变,即所研究的是平面变形过程。在上述条件下,微凸体A的原始底面积为

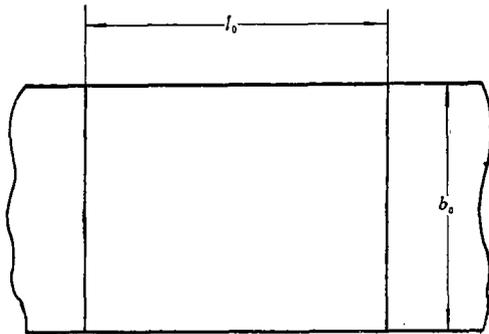
$$A_0 = b_0 l_0 = \frac{2V}{h_0} = \text{常数} \quad (2.1)$$

其中 $A_0$ 为微凸体A的原始底面积。

适于上述情况的运动学容许的速度场如图2所示。工件上的微凸体是已经变形而且处于稳定态状。假定其截面仍为三角形,但高度已由 $h_0$ 变为 $h_1$ 。由于体积不变条件,其底面的长度也由 $l_0$ 变为 $\overline{AC}$ 。同时,工件表面下形成一个深度为 $h_2$ 的塑性变形层。将工件上的微凸体

及其下面的塑性变形层所构成的区域划分为两个区域:区域I和区域II。为了简化计算,认为这两个区域均为刚体,因而塑性变形是这两个区域沿速度不连续表面 $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ 和 $\Gamma_4$ 相对滑动的结果。区域III为模具上的微凸体,也认为是刚体。在区域III的作用下,区域II以速度 $v_1$ 沿表面 $\Gamma_2$ 滑动,而区域II推动区域I以速度 $v_1$ 沿表面 $\Gamma_3$ 滑动,从而使工件上的微凸体沿工件表面波浪式前进(图2)。

如微凸体为单位宽度,根据体积不变条件,



A——工件上的微凸体  
B——模具上的微凸体  
图1 微凸体的相互作用

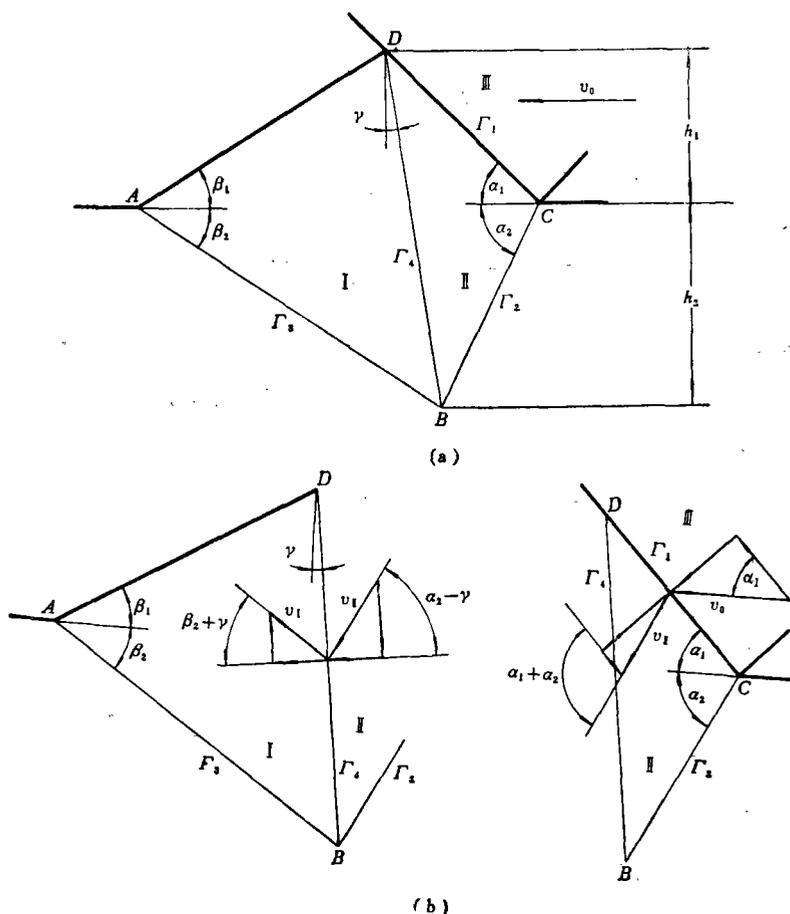


图 2 速度场

$$\operatorname{ctg} \beta_1 = \frac{2V}{h_1^2} - \operatorname{ctg} \alpha_1 \quad (2.2)$$

其中,  $\beta_1$  为工件上微凸体的自由表面与水平面的夹角。

根据几何关系 (图2a),

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{h_2}{h_1(\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_1) - h_2 \operatorname{ctg} \alpha_2} \quad (2.3)$$

其中,  $\beta_1$  根据式(2.2)确定。

由于存在上述关系[式(2.2)和式(2.3)], 区域 I 和区域 II 的边界只取决于  $h_1$ ,  $h_2$  和  $\alpha_2$  三个变量。

根据体积不变条件 (图2b),

$$v_1 \cos(\beta_2 + \gamma) = v_2 \cos(\alpha_2 - \gamma) \quad (2.4)$$

$$v_1 \sin[\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)] = v_0 \sin \alpha_1 \quad (2.5)$$

其中,  $v_1$ ,  $v_2$  分别为区域 I 和区域 II 的速度。

由式(2.5)可得,

$$v_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} v_0 \quad (2.6)$$

将式(2.6)代入式(2.4)可得

$$v_1 = \frac{\sin \alpha_1 \cos(\alpha_2 - \gamma)}{\cos(\beta_2 + \gamma) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} v_0 \quad (2.7)$$

其中,  $\gamma$ 可根据图2a上的几何关系确定如下:

$$\gamma = \arctg \frac{h_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - h_2 \operatorname{ctg} \alpha_1}{h_1 + h_2} \quad (2.8)$$

### 三、功率计算

因所有区域均为刚体, 所以只需计算沿各速度不连续表面摩擦或剪切引起的功率损失。

表面 $\Gamma_1$ 为工件上微凸体和模具上微凸体的接触面。根据图2b, 区域Ⅰ和区域Ⅲ沿表面 $\Gamma_1$ 的相对滑动速度为

$$\Delta v_1 = \left[ \cos \alpha_1 - \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] v_0 \quad (3.1)$$

其中,  $\Delta v_1$ 为区域Ⅰ和区域Ⅲ沿表面 $\Gamma_1$ 的相对滑动速度。

按照参考文献[4], 表面 $\Gamma_1$ 上的摩擦应力为

$$\tau_1 = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (3.2)$$

其中,  $\tau_1$ 为表面 $\Gamma_1$ 上的摩擦应力;  $\sigma_0$ 为工件的屈服极限;  $m$ 为表征接触面上两微凸体的连接强度的系数, 其值在 $0 \leq m \leq 1$ 范围之内。

设工件上微凸体为单位宽度, 则表面 $\Gamma_1$ 的面积为

$$S_1 = \frac{h_1}{\sin \alpha_1} \quad (3.3)$$

其中,  $S_1$ 为表面 $\Gamma_1$ 的面积。

沿表面 $\Gamma_1$ 摩擦而引起的功率损失为

$$\dot{W}_{f1} = \tau_1 \Delta v_1 S_1 = \frac{m \sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \left[ \cos \alpha_1 - \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] \frac{h_1}{\sin \alpha_1} \quad (3.4)$$

其中,  $\dot{W}_{f1}$ 为沿表面 $\Gamma_1$ 摩擦而引起的功率损失。

根据图2b可得

$$\Delta v_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} v_0 \quad (3.5)$$

$$\Delta v_3 = \frac{\sin \alpha_1 \cos(\alpha_2 - \gamma)}{\cos(\beta_2 + \gamma) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} v_0 \quad (3.6)$$

$$\Delta v_4 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} [\sin(\alpha_2 - \gamma) + \cos(\alpha_2 - \gamma) \operatorname{tg}(\beta_2 + \gamma)] v_0 \quad (3.7)$$

式(3.5)到式(3.7)中,  $\Delta v_2$ 为区域Ⅱ沿表面 $\Gamma_2$ 的滑动速度,  $\Delta v_3$ 为区域Ⅰ沿表面 $\Gamma_3$ 的滑动速度,  $\Delta v_4$ 为区域Ⅰ和区域Ⅱ沿表面 $\Gamma_4$ 的相对滑动速度。

沿表面 $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ 和 $\Gamma_4$ 的剪切应力均为

$$\tau_i = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (i=2, 3, 4) \quad (3.8)$$

其中,  $\tau_i$ 为沿表面 $\Gamma_i$ 的剪切应力。

对于单位宽度的微凸体, 根据图2a, 表面 $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ 和 $\Gamma_4$ 的面积分别为

$$S_2 = \frac{h_2}{\sin \alpha_2} \quad (3.9)$$

$$S_3 = \frac{h_2}{\sin \beta_2} \quad (3.10)$$

$$S_4 = \frac{h_1 + h_2}{\cos \gamma} \quad (3.11)$$

式(3.9)到式(3.11)中,  $S_2$ ,  $S_3$ 和 $S_4$ 分别为表面 $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ 和 $\Gamma_4$ 的面积。

沿表面 $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ 和 $\Gamma_4$ 剪切而引起的功率损失可按下列公式确定:

$$\dot{W}_{s_2} = \tau_2 \Delta v_2 S_2 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{h_2}{\sin \alpha_2} \quad (3.12)$$

$$\dot{W}_{s_3} = \tau_3 \Delta v_3 S_3 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \frac{\sin \alpha_1 \cos(\alpha_2 - \gamma)}{\cos(\beta_2 + \gamma) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{h_2}{\sin \beta_2} \quad (3.13)$$

$$\dot{W}_{s_4} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} [\sin(\alpha_2 - \gamma) + \cos(\alpha_2 - \gamma) \operatorname{tg}(\beta_2 + \gamma)] \frac{h_1 + h_2}{\cos \gamma} \quad (3.14)$$

式(3.12)到(3.14)中,  $\dot{W}_{s_2}$ ,  $\dot{W}_{s_3}$ 和 $\dot{W}_{s_4}$ 分别为沿表面 $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$ 和 $\Gamma_4$ 剪切而引起的功率损失使工件上微凸体变形总共需要的功率为

$$J^* = \dot{W}_{s_1} + \dot{W}_{s_2} + \dot{W}_{s_3} + \dot{W}_{s_4} \quad (3.15)$$

其中  $J^*$ 为变形所需总功率。

将式(3.4)和(3.12)~(3.14)代入式(3.15), 经整理后可得

$$\begin{aligned} J^* = & \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \left\{ \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{h_2}{\sin \alpha_2} + \frac{\sin \alpha_1 \cos(\alpha_2 - \gamma)}{\cos(\beta_2 + \gamma) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{h_2}{\sin \beta_2} \right. \\ & + \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} [\sin(\alpha_2 - \gamma) + \cos(\alpha_2 - \gamma) \operatorname{tg}(\beta_2 + \gamma)] \frac{h_1 + h_2}{\cos \gamma} \\ & \left. + m \left[ \cos \alpha_1 - \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2)} \right] \frac{h_1}{\sin \alpha_1} \right\} \quad (3.16) \end{aligned}$$

其中

$$\beta_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{h_1^2}{2V - h_1^2 \operatorname{ctg} \alpha_1}$$

$$\beta_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{h_2}{h_1 (\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_1) - h_2 \operatorname{ctg} \alpha_2}$$

$$\gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{h_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - h_2 \operatorname{ctg} \alpha_2}{h_1 + h_2}$$

式(3.16)中的 $h_1$ ,  $h_2$ 和 $\alpha_2$ 三个变量, 要用最优化方法确定, 使在一定条件下变形所需功率最少。

当工件上微凸体的高度 $h_1 \rightarrow 0$ 时, 变形所需总功率按下式计算:

$$\begin{aligned} J^* = & \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \left\{ \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{h_2}{\sin \alpha_2} + \frac{\sin \alpha_2 (\cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \gamma)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{2V}{h_2} \right. \\ & \left. + \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} [\sin(\alpha_2 - \gamma) + \cos(\alpha_2 - \gamma) \operatorname{tg} \gamma] \frac{h_2}{\cos \gamma} \right\} \quad (3.17) \end{aligned}$$

其中

$$\gamma = \arctan(-\operatorname{ctg} \alpha_2)$$

式(3.17)的推导过程参见附录。

#### 四、确定摩擦系数

模具沿工件表面相对滑动时, 达到稳定阶段后, 模具表面上微凸体的受力情况如图3所示。

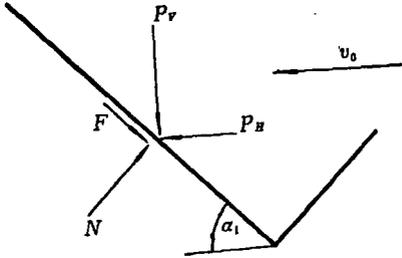


图3 模具表面上微凸体的受力情况

由于模具以速度  $v_0$  沿水平方向运动,

$$P_H = \frac{J^*}{v_0} \quad (4.1)$$

其中,  $P_H$  为外界施加于模具的水平推力。

根据平衡条件,

$$P_v = N \cos \alpha_1 - F \sin \alpha_1 \quad (4.2)$$

$$P_H = F \cos \alpha_1 + N \sin \alpha_1 \quad (4.3)$$

式(4.2)和(4.3)中,  $P_v$  为外界施加于模具的垂直压力,  $N$  和  $F$  分别为工件上微凸体作用在模具表面微凸体上的正压力和摩擦阻力。

由式(4.3),

$$N = \frac{P_H - F \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} \quad (4.4)$$

将式(4.4)代入式(4.2),

$$P_v = P_H \operatorname{ctg} \alpha_1 - \frac{F}{\sin \alpha_1} \quad (4.5)$$

如微凸体为单位宽度, 则按式(3.2)和图2a, 摩擦阻力为

$$F = m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{h_1}{\sin \alpha_1} \quad (4.6)$$

将式(4.1)和(4.6)代入式(4.5),

$$P_v = \frac{J^*}{v_0} \operatorname{ctg} \alpha_1 - m \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{h_1}{\sin^2 \alpha_1} \quad (4.7)$$

模具沿工件表面相对滑动时的摩擦系数为

$$\mu = \frac{P_H}{P_v} \quad (4.8)$$

将式(4.1)和(4.7)代入式(4.8),

$$\mu = \frac{J^*}{J^* \operatorname{ctg} \alpha_1 - m (\sigma_0 / \sqrt{3}) v_0 (h_1 / \sin^2 \alpha_1)} \quad (4.9)$$

其中,  $\mu$  为摩擦系数,  $J^*$  由式(3.16)确定。

由式(4.9)可知, 当  $m=0$  或  $h_1 \rightarrow 0$  时,

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (4.10)$$

### 五、计算结果与讨论

图4系根据式(3.16)和(3.17)计算所得的结果,表示变形所需功率与微凸体几何形状之间的关系。其中,以表征微凸体的连接强度的系数 $m$ 为参数。从图4可以看出,变形所需功率随 $\alpha_1$ 增大而增大。两微凸体在接触面上连结越牢固,即 $m$ 值越大,变形所需功率越大。值得指出的是,当 $m$ 值一定时,微凸体的 $\alpha_1$ 减小到一定数值时,工件上的微凸体就被辗平而消失。以 $\alpha_{1,cr}$ 表示一定条件下刚出现这种现象时的 $\alpha_1$ 值。 $\alpha_{1,cr}$ 与 $m$ 值之间的关系如图5所示。 $\alpha_{1,cr}$ 随 $m$ 值增大而增大,即两微凸体连结越牢固,开始出现微凸体被辗平而消失现象的 $\alpha_1$ 值越大。Tabor等摩擦学专家普遍认为,两微凸体相互作用而发生塑性变形的结果是,发生粘着、撕

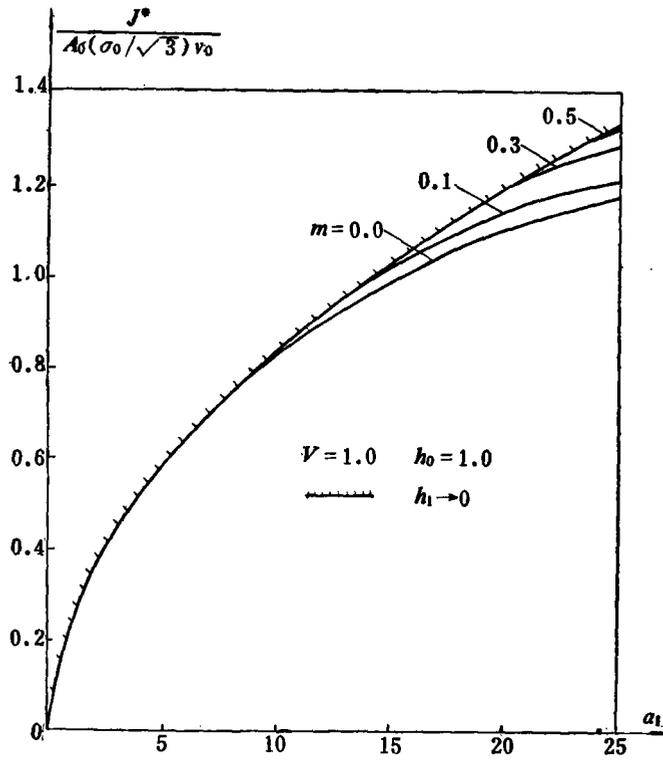


图4 相对变形功率与微凸体几何形状的关系

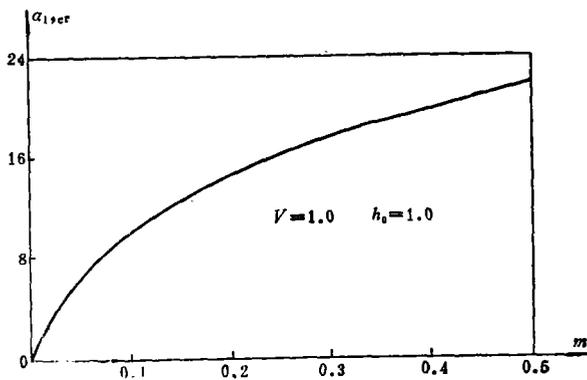


图5  $\alpha_{1,cr}$ 与 $m$ 值的关系

裂或犁沟现象。Wanheim指出，在一定条件下微凸体可能沿一物体表面作波浪运动，他们都没有提到过微凸体消失的现象。

模具沿工件表面相对滑动时，达到稳定阶段后， $\alpha_1$ 对水平推力的影响不大，而对垂直压力的影响很大(图6)。垂直压力随 $\alpha_1$ 增大而减小。这是因为微凸体的接触面积随 $\alpha_1$ 增大而减小的缘故。微凸体的连结强度对垂直压力和水平推力的影响都不大(图7)。

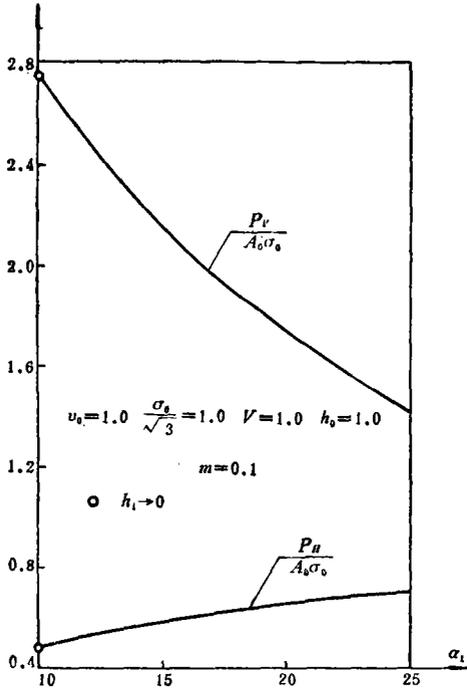


图6 相对垂直压力和水平推力与微凸体几何形状的关系

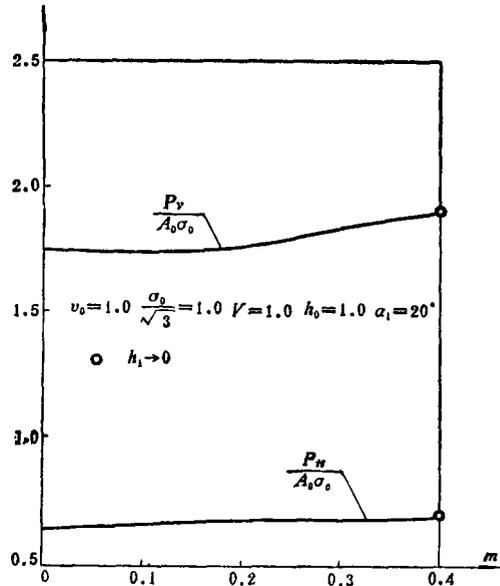


图7 相对垂直压力和水平推力与微凸体连结强度的关系

根据式(4.9)可计算出各种条件下两微凸体相对滑动时的摩擦系数值(图8,9)。摩擦系数 $\mu$ 随 $\alpha_1$ 增大而增大(图8)。但 $m$ 值，也就是微凸体的连结强度对摩擦系数 $\mu$ 几乎没有影响(图9)。

将式(3.16)对 $h_1$ 、 $h_2$ 和 $\alpha_2$ 三个变量进行最优化，可以确定在一定条件工件表面下塑性变形层的深度 $h_2$ 与角度 $\alpha_1$ 和表征微凸体在接触面上连结强度的系数 $m$ 之间的关系(图10,11)。塑性变形层的深度 $h_2$ 随 $\alpha_1$ 增大而减小(图10)。这是因为在微凸体的体积一定的条件下，角度

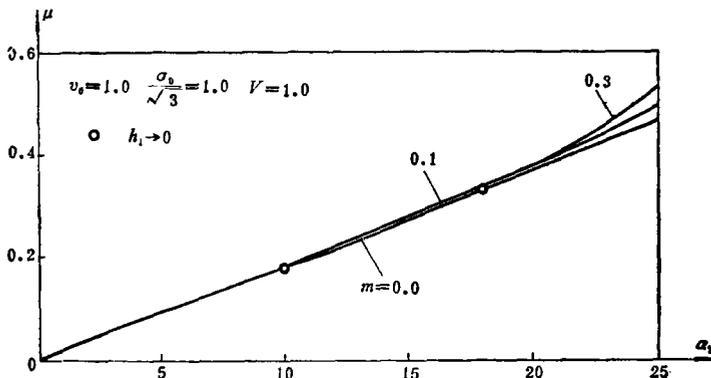


图8 摩擦系数与微凸体几何形状的关系

$\alpha_1$ 小时，微凸体的接触面积大，因而塑性变容易深入到工件表层下面的缘故。微凸体的连结强度对塑性变形层深度的影响不大（图11）。

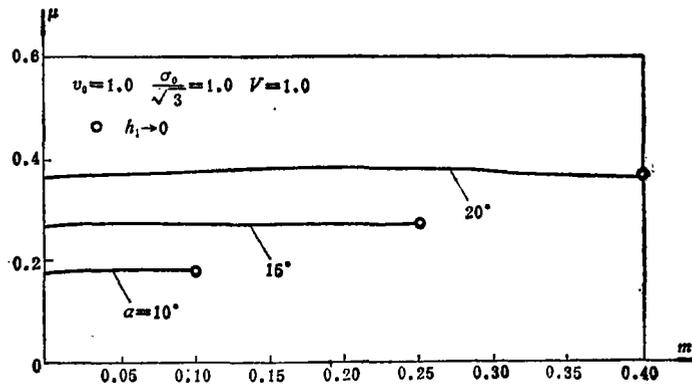


图9 摩擦系数与微凸体连结强度的关系

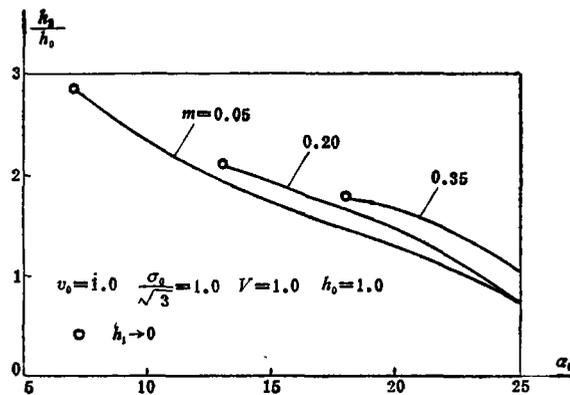


图10 相对塑性变形层深度与微凸体几何形状的关系

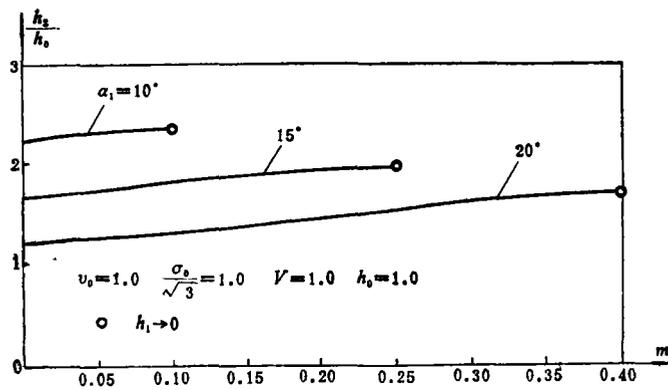


图11 相对塑性变形层深度与微凸体连结强度的关系

## 六、实验结果

实验的目的,是为了证实当坚硬的物体沿比较软的物体相对滑动时,较软物体上的微凸体可能沿表面作波浪运动以及在一定条件下可能被辗平而消失。

实验所用试件如图12所示。材料为L6R工业纯铝。所有试件的凸台体积和高度相同,但角度 $\alpha_1$ 不同:  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $25^\circ$ 。每种角度两个试件。确定试件尺寸的原则是,保证试件挤压时不发生塑性失稳。挤压凹模用高碳工具钢制造。挤压在油压机上进行(图13)。挤压时,用洗衣粉作润滑剂。

试验结果表明,在上述条件下, $\alpha_1=5^\circ$ 和 $10^\circ$ 的试件挤压后,凸台消失(图14a)。 $\alpha_1 \geq 15^\circ$ 的试件,挤压后凸台逆着挤压方向从一端向另一端移动(图14b)。因此,实验结果证实,本文所进行的理论分析的前提以及在一定条件下微凸体将被辗平而消失的结论是正确的。

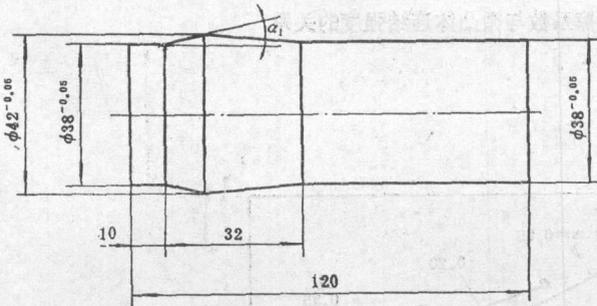


图12 试验所用试件

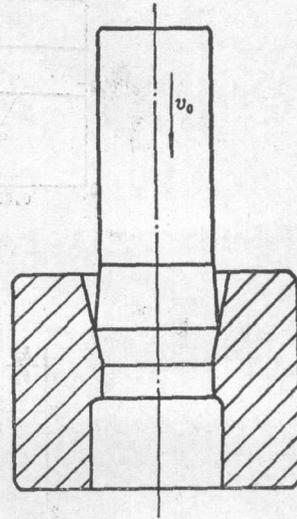
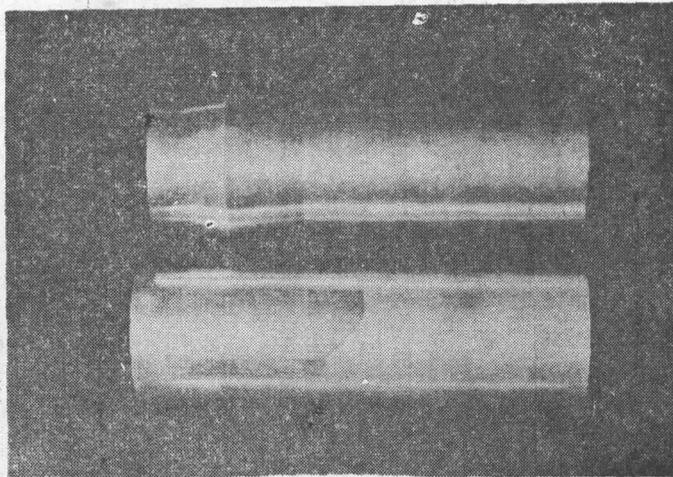
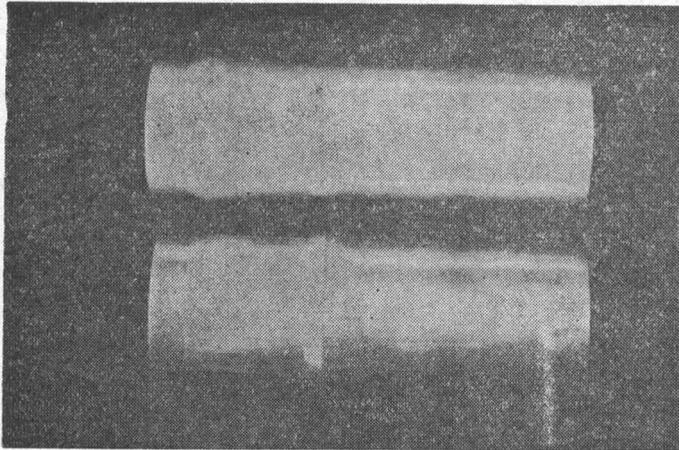


图13 试件挤压过程



(a)  $\alpha_1=10^\circ$



(b)  $\alpha_1 = 20^\circ$

图14 挤压前后的试件

### 七、结 论

1. 金属压力加工过程中, 工件与模具之间的摩擦是它们相对滑动时微凸体相互作用的结果。除了发生相互粘着、撕裂和犁沟等现象之外, 在模具上坚硬的微凸体的作用下, 工件上的微凸体可能沿工件表面作波浪运动, 形成塑性波。在一定条件下, 工件上的微凸体可能被辗平而消失。

2. 在工件上微凸体形成塑性波的条件, 摩擦系数与微凸体的几何形状有关。微凸体的连结强度对摩擦系数影响不大。

3. 工件表面下的塑性变形层的深度也与微凸体的几何形状有关。

### 附 录

#### ——式(3.17)的推导过程

当  $h_1 \rightarrow 0$  时, 表面  $\Gamma_1$  的面积  $S_1 \rightarrow 0$ , 因此, 沿表面  $\Gamma_1$  摩擦引起的功率损失

$$\dot{W}_{f1} = 0 \tag{A-1}$$

按式(3.12), 沿表面  $\Gamma_2$  剪切引起的功率损失与  $h_1$  无关, 因此, 当  $h_1 \rightarrow 0$  时, 沿表面  $\Gamma_2$  剪切引起的功率损失仍可按式(3.12)计算, 即

$$\dot{W}_{s2} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{h_2}{\sin \alpha_2} \tag{A-2}$$

由几何关系(图2a),

$$h_2 = \frac{\text{ctg} \alpha_1 - \text{tg} \gamma}{\text{ctg} \alpha_2 + \text{tg} \gamma} h_1 \tag{A-3}$$

将式(A-3)代入式(3.13),

$$\dot{W}_{s3} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \frac{\sin \alpha_1 \cos(\alpha_2 - \gamma)}{\cos(\beta_2 + \gamma) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \frac{\text{ctg} \alpha_1 - \text{tg} \gamma}{\text{ctg} \alpha_2 + \text{tg} \gamma} \frac{h_1}{\sin \beta_2} \tag{A-4}$$

在工件上微凸体的体积一定的条件下, 当  $h_1 \rightarrow 0$  时,  $\beta_1$  和  $\beta_2$  都趋近于零, 因此,

$$\lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ \beta_2 \rightarrow 0}} \dot{W}_{s1} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \frac{\sin \alpha_1 \cos(\alpha_2 - \gamma)}{\cos \gamma \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \gamma} \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ \beta_2 \rightarrow 0}} \frac{h_1}{\sin \beta_2} \quad (\text{A-5})$$

根据三角关系,

$$\frac{\sin \alpha_1 \cos(\alpha_2 - \gamma)}{\cos \gamma \sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\sin \alpha_2 (\cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \gamma)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (\text{A-6})$$

由式(2.2)和(2.3)可得

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{h_1 h_2}{2V - h_1 h_2 \operatorname{ctg} \alpha_2} \quad (\text{A-7})$$

考虑到  $\beta_2 \rightarrow 0$  时  $\sin \beta_2 \approx \operatorname{tg} \beta_2$  以及式(A-7),

$$\lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ \beta_2 \rightarrow 0}} \frac{h_1}{\sin \beta_2} = \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ \beta_2 \rightarrow 0}} \frac{h_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{2V}{h_2} \quad (\text{A-8})$$

将式(A-6)和(A-8)代入式(A-5), 就得到当  $h_1 \rightarrow 0$  时沿表面  $\Gamma_3$  剪切引起的功率损失为

$$\dot{W}_{s3} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \frac{\sin \alpha_2 (\cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \gamma)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot \frac{2V}{h_2} \quad (\text{A-9})$$

当  $h_1 \rightarrow 0$  时,  $\beta_1$  和  $\beta_2$  都趋近于零, 因此, 按式(3.14), 沿表面  $\Gamma_4$  剪切引起的功率损失为

$$\dot{W}_{s4} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} v_0 \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \cdot [\sin(\alpha_2 - \gamma) + \cos(\alpha_2 - \gamma) \operatorname{tg} \gamma] \frac{h_2}{\cos \gamma} \quad (\text{A-10})$$

当  $h_1 \rightarrow 0$  时, 根据式(2.8),

$$\operatorname{tg} \gamma = -\operatorname{ctg} \alpha_2 \quad (\text{A-11})$$

即式(A-9)和(A-10)中的  $\gamma$  和  $\alpha_2$  之间存在上列关系.

将式(A-1), (A-2), (A-9)和(A-10)代入式(3.15), 就可得到式(3.17).

### 参 考 文 献

- [1] Tabor, D., Friction—The present state of our understanding, *ASME Journal of Lubrication Technology*, 103, 2, April (1981), 169—179.
- [2] Edwards, C. M., and J. Halling, An analysis of the plastic interaction on surface asperities and its relevance to the value of the coefficient of friction, *Journal of Mechanical Engineering Science*, 10, 2, April (1968) 101—110.
- [3] Wanheim, T and T. Abildgaard, A mechanism for metallic friction, ICPE Conference, Tokyo, Japan, August (1980).
- [4] Avitzur, B., *Metal Forming: Processes and Analysis*, Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, New York, (1979).

## A Model for Simulation of Friction Phenomenon between Dies and Workpiece

Z. J. Luo    C. R. Tang

*(Department for Materials Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an)*

B. Avitzur    C. J. Van Tyne

*(Institute for Metal Forming, Lehigh University, U. S. A.)*

### Abstract

Based on the interaction of asperities and upper-bound approach a mathematical model for simulation of friction phenomenon between dies and workpiece was proposed. Optimizing the mathematical model with respect to several variables, it was found that in addition to adhering, tearing, ploughing, etc., asperities of workpiece can wave-like move along the surface layer and under certain circumstances they may disappear. If asperities wavyly move along the surface layer friction coefficient depends on the geometry of asperities. However, the bonding strength of asperities has no significant influence on friction coefficient. The depth of the plastic deformation layer is related to the geometry of asperities, too. The soundness of the prerequisite of the proposed model and some analytical results were verified by experiments.