应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

奇摄动半线性系统的边界层和角层性质

章国华　　刘光旭

（加拿大卡尔加里大学）　　（南开大学数学系）
（林宗池推荐，1983年7月7日收到）

摘　　要

一些作者已对纯量边值问题 $\varepsilon y''=h(t, y)$，$a<t<b$，$y(a, \varepsilon)=A$，$y(b, \varepsilon)=B$，应用微分不等式的方法和技巧研究了当 $\varepsilon\to0^+$ 时其解的存在性和渐近性质．本文是在退化方程 $0=\mathbf{h}(t, \mathbf{u})$ 的解 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$ 假定具有类似稳定性的条件下，将上述的研究推广到向量边值问题．退化解 $\mathbf{u}(t)$ 在 (a, b) 内是否有连续的一阶导数，将决定向量边值问题的渐近性质的类型，即出现边界层现象和角层现象．

一、引　　言

本文研究如下半线性边值问题

$$\varepsilon^2\mathbf{y}''=\mathbf{h}(t, \mathbf{y}),\quad \mathbf{y}(a, \varepsilon)=\mathbf{A},\quad \mathbf{y}(b, \varepsilon)=\mathbf{B} \tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{y}$，$\mathbf{h}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 是 n 维向量，$\varepsilon>0$ 是实值小参数．本文目的在于证明：对一切充分小的 ε，在适当条件下，(1.1)的解存在，并且其解展示出边界层和角层性质．

我们假定对应退化系统

$$0=\mathbf{h}(t, \mathbf{u})$$

至少有一个解 $\mathbf{u}(t)=(u_1(t), \cdots, u_n(t))$．类似纯量情形，我们需假定退化解 $\mathbf{u}(t)$ 是 I_q-稳定的（关于 I_q-稳定性的定义将在第3节中给出）．依分量 I_q-稳定性条件将使我们可以得到对(1.1)的解 $\mathbf{y}(t, \varepsilon)$ 的每一个分量的估计．

二、预　备　结　果

我们需要微分不等式的下列基本结果([3]，Chap. 1，[6])．

引理1　研究边值问题

$$\mathbf{y}''=\mathbf{h}(t, \mathbf{y}),\quad \mathbf{y}(a)=\mathbf{A},\ \mathbf{y}(b)=\mathbf{B} \tag{2.1}$$

其中 $\mathbf{y}$，$\mathbf{h}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}\in\mathbf{R}^n$．如果在 $[a, b]$ 上存在 n 组 C^2 类函数 $(\alpha_i(t), \beta_i(t))$，$i=1, \cdots, n$，而且满足

$$\alpha_i(a)\leqslant A_i\leqslant\beta_i(a),\quad \alpha_i(b)\leqslant B_i\leqslant\beta_i(b)\quad (i=1, \cdots, n) \tag{2.1$_1$}$$

$$\alpha_i(t)\leqslant\beta_i(t),\quad t\in(a, b)\quad (i=1, \cdots, n) \tag{2.1$_2$}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_i''\geqslant h_i(t,\ y_1,\ \cdots,\ \alpha_i,\ \cdots,\ y_n)\\ \beta_i''\leqslant h_i(t,\ y_1,\ \cdots,\ \beta_i,\ \cdots,\ y_n)\end{array}\right\} \qquad (2.1)_3$$

其中 $t\in(a,\ b)$，$\alpha_j(t)\leqslant y_j\leqslant\beta_j(t)$，$j\neq i$。同时，也假定 h 在区域 $[a,b]\times\prod_{i=1}^{n}[\alpha_i,\ \beta_i]$ 内连续.

则问题(2.1)有一个 $C^{(2)}[a,\ b]$ 类解 $\mathbf{y}(t)=(y_1(t),\ \cdots,\ y_n(t))$，且满足

$$\alpha_i(t)\leqslant y_i(t)\leqslant\beta_i(t)$$

其中 $t\in[a,\ b]$，$i=1,\ \cdots,\ n$。

引理 2 研究问题(2.1)，并假定 $(\alpha_j,\ \beta_j)$ 在 $[a,\ b]$ 上是逐段 $C^{(2)}$ 类函数，即 $[a,\ b]$ 存在分点 $\{t_i\}_{i=0}^{m}$，$a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$，使得在每一个子区间 $[t_{i-1},\ t_i]$，$i=1,\ \cdots,\ m$，上，$(\alpha_j,\ \beta_j)$，$j=1,\ \cdots,\ n$，都是二次连续可微的；在分点 t_{i-1} 和 t_i 处，导数分别是右导数和左导数。假定 $(2.1)_1$，$(2.1)_2$，$(2.1)_3$ 在每一个子区间 $[t_{i-1},\ t_i]$ 成立。最后，假定对 $[a,\ b]$ 内每一点 t，$D_L\alpha_i(t)\leqslant D_R\alpha_i(t)$，$D_L\beta_i(t)\geqslant D_R\beta_i(t)$，其中 D_L，D_R 分别表示左、右导数。

则(2.1)有一 $C^{(2)}$ 类解 $\mathbf{y}(t)=(y_1(t),\ \cdots,\ y_n(t))$，且满足

$$\alpha_i(t)\leqslant y_i(t)\leqslant\beta_i(t)$$

其中 $t\in[a,\ b]$，$i=1,\ \cdots,\ n$。

三、边 界 层 现 象

在如下关于退化解 $\mathbf{u}(t)$ 的 I_q-稳定性定义中，我们假定函数 $\mathbf{h}(t,\mathbf{y})$ 在 $\prod_{i=1}^{n}\mathscr{D}_i$ 中对 y_i，$i=1,\ \cdots,\ n$，的偏导数具有所要求的阶数，其中 q 是非负整数，而

$$\mathscr{D}_i=\{(t,y_i):t\in[a,b],\ |y_i-u_i(t)|\leqslant d_i(t)\}$$

这里 $d_i(t)$ 是一个正的光滑函数，使得

$$|A_i-u_i(a)|\leqslant d_i(t)\leqslant|A_i-u_i(a)|+\delta \qquad t\in[a,\ a+\delta]$$

$$|B_i-u_i(b)|\leqslant d_i(t)\leqslant|B_i-u_i(b)|+\delta \qquad t\in[b-\delta,\ b]$$

而 $d_i(t)\leqslant\delta$，$t\in[a+\delta,\ b-\delta]$，其中 A_i，B_i 分别是 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 的分量，而 $\delta>0$ 是一个小常数。

定义 向量函数 $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)=(u_1(t),\ \cdots,\ u_n(t))$ 在 $[a,b]$ 内叫做 I_q-稳定的，如果存在 n 个正常数 $m_1,\ \cdots,\ m_n$，使得

$$\frac{\partial^k h_i}{\partial y_i^k}(t,\ y_1,\ \cdots,\ u_i,\ \cdots,\ y_n)=0 \qquad (3.1)$$

其中 $0\leqslant k\leqslant 2q$，$i=1,\cdots,n$，$(t,y_j)\in\mathscr{D}_j$，$j\neq i$；

$$\frac{1}{(2q+1)!}\frac{\partial^{2q+1}h_i}{\partial y_i^{2q+1}}(t,y_1,\cdots,y_n)\geqslant m_i^2>0 \qquad (3.2)$$

其中 $i=1,\cdots,n$，$(t,\mathbf{y})\in\prod_{i=1}^{n}\mathscr{D}_i$。

关于纯量函数的 I_q-稳定性定义，最初是由 Boglaev[4] 给出，许多作者使用并推广它[2]。

定理 1 如果退化系统 $\mathbf{h}(t, \mathbf{u})=0$ 有 I_q-稳定的 $C^{(2)}[a, b]$ 类解 $\mathbf{u}(t)=(u_1(t), \cdots, u_n(t))$，则存在一个 $\varepsilon_0>0$，使得对 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，边值问题(1.1)有解

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{y}(t, \varepsilon)=(y_1(t, \varepsilon), \cdots, y_n(t, \varepsilon))$$

且在 $[a, b]$ 内，满足

$$|y_i(t, \varepsilon)-u_i(t)|\leqslant L_i(t, \varepsilon)+R_i(t, \varepsilon)+O(\varepsilon)$$

其中 $i=1, \cdots, n$，而

$$L_i(t, \varepsilon)=\begin{cases}|A_i-u_i(a)|\exp[-m_i\varepsilon^{-1}(t-a)], & \text{当 } q=0\\ |A_i-u_i(a)|[1+\sigma_{1i}\varepsilon^{-1}(t-a)]^{-q^{-1}}, & \text{当 } q\geqslant 1\end{cases}\tag{3.3}$$

$$R_i(t, \varepsilon)=\begin{cases}|B_i-u_i(b)|\exp[-m_i\varepsilon^{-1}(b-t)], & \text{当 } q=0\\ |B_i-u_i(b)|[1+\sigma_{2i}\varepsilon^{-1}(b-t)]^{-q^{-1}}, & \text{当 } q\geqslant 1\end{cases}\tag{3.4}$$

其中

$$\sigma_{1i}=m_i\frac{q}{\sqrt{q+1}}|A_i-u_i(a)|^q,\quad \sigma_{2i}=m_i\frac{q}{\sqrt{q+1}}|B_i-u_i(b)|^q,\quad i=1, 2, \cdots n.$$

注 此定理表明：当 $q=0$ 时，两端点的边界层是指数型，而当 $q\geqslant 1$ 时，是代数型。

证明 由引理 1 可知，为证明此定理，只需构造出满足条件 $(2.1)_1$，$(2.1)_2$，$(2.1)_3$ 的上、下界函数 $(\alpha_i(t, \varepsilon), \beta_i(t, \varepsilon))$。自然，这里是用 $\alpha_i(t, \varepsilon)$，$\beta_i(t, \varepsilon)$ 去代替定理 1 中的 $\alpha_i(t)$，$\beta_i(t)$，而用 $h_i\varepsilon^{-2}$ 去代替 h_i。

由条件(3.2)，所以我们一定有 $h_i(t, \mathbf{y})\sim m_i^2 y_i^{2q+1}$，而且自然引导我们去研究微分方程

$$\varepsilon^2 z_i''=m_i^2 z_i^{2q+1}\tag{3.5}$$

事实上，函数 $L_i(t,\varepsilon)$ 是非负的，而且就是(3.5)满足始值条件

$$L_i(a, \varepsilon)=|A_i-u_i(a)|$$

$$L_i'(a, \varepsilon)=\frac{-m_i}{\varepsilon\sqrt{q+1}}|A_i-u_i(a)|^{q+1}$$

的始值问题解。这个解递减向右。与此对称的，函数 $R_i(t, \varepsilon)\geqslant 0$ 是(3.5)满足始值条件

$$R_i(b, \varepsilon)=|B_i-u_i(b)|$$

$$R_i'(b, \varepsilon)=\frac{m_i}{\varepsilon\sqrt{q+1}}|B_i-u_i(b)|^{q+1}$$

的始值问题解。这个解自右递减向左。

现在我们在 $[a, b]$ 内对 t 和 $\varepsilon>0$ 定义上、下界函数：

$$\beta_i(t, \varepsilon)=u_i(t)+L_i(t, \varepsilon)+R_i(t, \varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)$$
$$\alpha_i(t, \varepsilon)=u_i(t)-L_i(t, \varepsilon)-R_i(t, \varepsilon)-\Gamma_i(\varepsilon)$$

其中

$$\Gamma_i(\varepsilon)=[\varepsilon^2\gamma_i/m_i^2(2q+1)!]^{\frac{1}{2q+1}}$$

这里，γ_i 是一个适当的正常数，只要

$$\gamma_i\geqslant M_i(2q+1)!\tag{3.6}$$

即可，其中 $M_i=\max\limits_{[a,b]}[|u_i''(t)|]$。显然，$\Gamma_i(\varepsilon)>0$。

我们可以看出 α_i 与 β_i 之间的区域，即集合 $\{(t, y_i): t\in[a, b], \alpha_i(t, \varepsilon)\leqslant y_i\leqslant\beta_i(t, \varepsilon)\}$，当 ε 充分小时，它包含在区域 $\mathscr{D}_i$ 内。

容易看出，当用 $h_i\varepsilon^{-2}$ 代替 h_i 时，α_i，β_i 满足性质 $(2.1)_1$ 和 $(2.1)_2$。余下要证明的是性质

$(2.1)_3$ 也成立。应用 Taylor 定理及 $u(t)$ 是 I_q-稳定的假定，我们有

$$\varepsilon^2\alpha_i''-h_i(t,\ y_1,\ \cdots,\ \alpha_i,\ \cdots,\ y_n)=\varepsilon^2u_i''-\varepsilon^2L_i''-\varepsilon^2R_i''$$

$$+\frac{1}{(2q+1)!}\frac{\partial^{2q+1}h_i}{\partial y_i^{2q+1}}(t,\ y_1,\ \cdots,\ \theta_i,\ \cdots,\ y_n)[\alpha_i(t,\ \varepsilon)-u_i(t)]^{2q+1}$$

$$=\varepsilon^2u_i''-\varepsilon^2L_i''-\varepsilon^2R_i''+\frac{1}{(2q+1)!}\frac{\partial^{2q+1}h_i}{\partial y^{2q+1}}(t,\ y_1,\cdots,\theta_i,\cdots,y_n)(L_i+R_i+\Gamma_i)^{2q+1}$$

其中 θ_i 是 $\alpha_i(t,\ \varepsilon)$ 与 $u_i(t)$ 之间的某一内点。所以，当 ε 充分小，或表示为 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，点 $(t,\ \theta_i)$ 居于 $\mathscr{D}_i$ 内。因为 L_i，R_i，Γ_i 都是正的，而且都满足(3.5)，故由条件(3.2)和(3.6)，可得

$$\varepsilon^2\alpha_i''-h_i(t,\ y_1,\ \cdots,\ \alpha_i,\ \cdots,\ y_n)\geqslant-\varepsilon^2|u_i''|+m_i^2\Gamma_i^{2q+1}$$

$$\geqslant-\varepsilon^2M_i+\frac{\varepsilon^2\gamma_i}{(2q+1)!}=\varepsilon^2\left[\frac{\gamma_i}{(2q+1)!}-M_i\right]\geqslant0$$

即

$$\varepsilon^2\alpha_i''\geqslant h_i(t,\ y_1,\ \cdots,\ \alpha_i,\ \cdots y_n)$$

对 β_i 的证明是类似的。故由引理 1 可知定理 1 是正确的。

四、角 层 现 象

现在我们研究如下情况：假定退化方程 $h(t,\ u)=0$ 有一对 $C^{(2)}$ 解 $u_1=u_1(t)$，$u_2=u_2(t)$，它们相交于 $(a,\ b)$ 的一个内点 $t=T$，即有 $u_1(T)=u_2(T)$，但 $u_1'(T)\neq u_2'(T)$，或如果我们定义退化解为

$$u(t)=\begin{cases}u_1(t), & a\leqslant t\leqslant T\\ u_2(t), & T\leqslant t\leqslant b\end{cases}$$

那么 $u'(T^-)\neq u'(T^+)$。于是，此退化解在$(a,\ b)$内不具有连续导数。这里，我们将推广定理 1 的结果。不过，我们将会看到界函数的构造会是更复杂些。此外，(1.1) 的解的每个分量可以在不同的内点有角层，也可以同时在端点出现边界层。本文第 5 节将给出例子。

定理 2 假定

(1) 存在函数 $u_1=(u_{11}(t),\ \cdots,\ u_{1n}(t))$ 和 $u_2=(u_{21}(t),\ \cdots,\ u_{2n}(t))$，其中$u_{ji}(t)$ 分别在$[a,\ T_i]$ 和 $[T_i,\ b]$上是 $C^{(2)}$类函数，并且对 $j=1$，2 它们满足

$$h_i(t,\ y_1,\ \cdots,\ u_{ji},\ \cdots,\ y_n)=0$$

这里 $t\in[a,\ b]$，$y_k\in D_k$，$k\neq i$；此外，$u_{1i}(T_i)=u_{2i}(T_i)$，$u_{1i}'(T_i)<u_{2i}'(T_i)$，$T_i\in(a,\ b)$，其中

$$D_k=\{y_k:|y_k-u_k(t)|\leqslant d_k(t)\}$$

此处

$$u_k(t)=\begin{cases}u_{1k}(t) & t\in[a,\ T_k]\\ u_{2k}(t) & t\in[T_k,\ b]\end{cases}$$

而 d_k 是一个光滑的正函数，使得

$$|A_k-u_k(t)|\leqslant d_k(t)\leqslant|A_k-u_k(t)|+\delta\qquad t\in\left[a,\ a+\frac{\delta}{2}\right]$$

$$|B_k-u_k(t)|\leqslant d_k(t)\leqslant|B_k-u_k(t)|+\delta\qquad t\in\left[b-\frac{\delta}{2},\ b\right]$$

$\delta>0$ 是一个小的常数；

（2） 对非负整数 q，函数 $\mathbf{h}$ 关于 $(t, \mathbf{y})$ 连续，并且对 $y_i \in D_i$ 是 $C^{(2q+1)}$ 类；

（3） $\mathbf{u}_j(t)$，$j=1, 2$，分别在 $[a, T_i]$ 和 $[T_i, b]$ 内是 I_q-稳定的。

则存在 $\varepsilon_0>0$，使得对每一个 ε，$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，(1.1) 有解 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(t, \varepsilon)=(y_1(t, \varepsilon), \cdots, y_n(t, \varepsilon))$，而且，在 $[a, b]$ 内，对 t 有

$$|y_i(t, \varepsilon)-u_i(t)|\leqslant L_i(t, \varepsilon)+R_i(t, \varepsilon)+C_q\varepsilon^{(q+1)^{-1}}$$

$i=1, \cdots, n$，其中 C_q 是正的、可计算出的一个不依赖于 ε 的常数，而

$$L_i(t, \varepsilon)=|A_i-u_{1i}(a)|E_i(t, \varepsilon) \tag{4.1}$$

$$R_i(t, \varepsilon)=|B_i-u_{2i}(b)|F_i(t, \varepsilon) \tag{4.2}$$

$$E_i(t, \varepsilon)=\begin{cases}\exp[-m_i\varepsilon^{-1}(t-a)] & q=0\\ [1+\sigma_{1i}\varepsilon^{-1}(t-a)]^{-q^{-1}} & q\geqslant 1\end{cases}$$

$$F_i(t, \varepsilon)=\begin{cases}\exp[-m_i\varepsilon^{-1}(b-t)] & q=0\\ [1+\sigma_{2i}\varepsilon^{-1}(b-t)]^{-q^{-1}} & q\geqslant 1\end{cases}$$

其中

$$\sigma_{1i}=\frac{m_i q}{\sqrt{q+1}}|A_i-u_{1i}(a)|^q, \quad \sigma_{2i}=\frac{m_i q}{\sqrt{q+1}}|B_i-u_{2i}(b)|^q$$

证明 由引理 2 可知，欲证明此定理，我们可以定义如下的界函数 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，并验证它们满足微分不等式。在 $[a, b]$ 内，对 t 和 $\varepsilon>0$，我们定义

$$\alpha_i(t, \varepsilon)=\begin{cases}u_{1i}(t)-|A_i-u_{1i}(a)|E_i(t, \varepsilon)\\ \qquad -|B_i-u_{2i}(b)|F_i(T_i, \varepsilon)-\Gamma_i(\varepsilon) & t\in[a, T_i]\\ u_{2i}(t)-|B_i-u_{2i}(b)|F_i(t, \varepsilon)\\ \qquad -|A_i-u_{1i}(a)|E_i(T_i, \varepsilon)-\Gamma_i(\varepsilon) & t\in[T_i, b]\end{cases}$$

$$\beta_i(t, \varepsilon)=\begin{cases}u_{1i}(t)+|A_i-u_{1i}(a)|E_i(t, \varepsilon)+H_i(t, \varepsilon)+\Delta_i(\varepsilon) & t\in[a, T_i]\\ u_{2i}(t)+|B_i-u_{2i}(b)|F_i(t, \varepsilon)+\Omega_i(\varepsilon) & t\in[T_i, b]\end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_i(\varepsilon)=&(b-t)|A_i-u_{1i}(a)|E_i'(T_i, \varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)\\ &+|B_i-u_{2i}(b)|[F_i(T_i, \varepsilon)+(b-T_i)F_i'(T_i, \varepsilon)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega_i(\varepsilon)=&H_i(T_i, \varepsilon)+(b-t)|B_i-u_{2i}(b)|F_i'(T_i, \varepsilon)+\Gamma_i(\varepsilon)\\ &+|A_i-u_{1i}(a)|[E_i(T_i, \varepsilon)+(b-T_i)E_i'(T_i, \varepsilon)]\end{aligned}$$

$$H_i(t, \varepsilon)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{m_i}[u_{2i}'(T_i)-u_{1i}'(T_i)]\exp[-m_i\varepsilon^{-1}(T_i-t)] & q=0\\ \dfrac{q\varepsilon^{(q+1)^{-1}}[u_{2i}'(T_i)-u_{1i}'(T_i)]}{k_i[1+k_i\varepsilon^{-(q+1)^{-1}}(T_i-t)]^{q^{-1}}} & q\geqslant 1\end{cases}$$

$$k_i=|m_i\sqrt{q+1}\,q^{(q+1)}[u_{2i}'(T_i)-u_{1i}'(T_i)]^q|^{(q+1)^{-1}}$$

这里，$\Gamma_i(\varepsilon)=\left[\dfrac{\gamma_i\varepsilon^2}{m_i(2q+1)}\right]^{(2q+1)^{-1}}$，而 $\gamma_i>0$ 是一个常数，只需

$$\gamma_i\geqslant M_i(2q+1)；$$

其中

$$M_i=\max\{\max_{[a, T_i]}|u_{1i}''(t)|, \quad \max_{[T_i, b]}|u_{2i}''(t)|\}$$

容易验证，对充分小的ε有：$\alpha_i\leqslant\beta_i$，$\alpha_i(a,\varepsilon)\leqslant A_i\leqslant\beta_i(a,\varepsilon)$，$\alpha_i(b,\varepsilon)\leqslant B_i\leqslant\beta_i(b,\varepsilon)$，$D_R\alpha_i(T_i)\geqslant D_L\alpha_i(T_i)$，$D_R\beta_i(T_i)\leqslant D_L\beta_i(T_i)$．余下要验证下列微分不等式

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^2\alpha_i''(t,\varepsilon)\geqslant h_i(t,y_1,\cdots,\alpha_i(t,\varepsilon),\cdots,y_n)\\&\varepsilon^2\beta_i''(t,\varepsilon)\leqslant h_i(t,y_1,\cdots,\beta_i(t,\varepsilon),\cdots,y_n)\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

在$[a,T_i]$和$[T_i,b]$上成立．因验证方法是类似的，所以我们只详细地对函数β_i和区间$[a,T_i]$进行．由Taylor定理可有

$$\begin{aligned}&h_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n)-\varepsilon^2\beta_i''=h_i(t,y_1,\cdots,u_{1i},\cdots,y_n)\\&+\sum_{k=1}^{2q}\left\{\frac{1}{k!}\frac{\partial^k h_i}{\partial y_i^k}(t,y_1,\cdots,u_{1i},\cdots,y_n)[(A_i-u_{1i}(a))E_i(t,\varepsilon)\right.\\&\left.+H_i(t,\varepsilon)+\Delta_i(\varepsilon)]^k\right\}\\&+\frac{1}{(2q+1)!}\cdot\frac{\partial^{2q+1}h_i}{\partial y_i^{2q+1}}(t,y_1,\cdots,\eta_{1i},\cdots,y_n)[(A-u_{1i}(a))\cdot E_i(t,\varepsilon)\\&+H_i(t,\varepsilon)+\Delta_i(\varepsilon)]^{2q+1}-\varepsilon^2u_{1i}''(t)\\&-\varepsilon^2[A_i-u_{1i}(a)]E_i''(t,\varepsilon)-\varepsilon^2H_i''(t,\varepsilon)\end{aligned}$$

其中η_{1i}是某一适当的中值．因为$\mathbf{u}$的稳定性和$\Delta_i(\varepsilon)\geqslant0$的事实，故有

$$\begin{aligned}&h_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n)-\varepsilon^2\beta_i''\\&\geqslant m_i[(A_i-u_{1i}(a))^{2q+1}\cdot E_i^{2q+1}(t,\varepsilon)+H_i^{2q+1}(t,\varepsilon)+\Delta_i^{2q+1}(\varepsilon)]\\&\quad-\varepsilon^2M_i-\varepsilon^2(A_i-u_{1i}(a))E_i''(t,\varepsilon)-\varepsilon^2H_i''(t,\varepsilon)\end{aligned}$$

由我们的构造方法可知，函数E_i和H_i满足微分方程

$$\varepsilon^2z_i''=m_i^2z_i^{2q+1}$$

所以，我们有：

$$\begin{aligned}&h_i(t,y_1,\cdots,\beta_i,\cdots,y_n)-\varepsilon^2\beta_i''\geqslant m_i^2\Delta_i^{2q+1}(\varepsilon)-\varepsilon^2M_i\\&\geqslant m_i^2\left[\frac{\gamma_i\varepsilon^2}{m_i^2(2q+1)!}\right]-\varepsilon^2M_i=\varepsilon^2\left[\frac{\gamma_i}{(2q+1)!}-M_i\right]\geqslant0\end{aligned}$$

关于$\beta_i(t,\varepsilon)$在$[T_i,b]$上的验证是相似的，故略之．

如果某些函数u_{1i}和u_{2i}的导数满足不等式$u_{1i}'(T_i)>u_{2i}'(T_i)$，亦可得到类似定理2的结果．只须做一个简单变换$y_i\to-y_i$，然后将定理2用到变换后的问题上即可．

五、例　子

研究问题

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\mathbf{y}''=\mathbf{h}(t,\mathbf{y})\qquad(-1<t<1)\\&\mathbf{y}(-1,\varepsilon)=\mathbf{A},\quad\mathbf{y}(1,\varepsilon)=\mathbf{B}\end{aligned}$$

其中$\mathbf{h}(t,\mathbf{y})$是列向量

$$((y_1-|t|)^{2q+1}(1+G(y_2)),\ (y_2-1+|t|)^{2q+1}(1+H(y_1)))$$

这里q是一个非负整数，$G(y_2)\geqslant0$，$H(y_1)\geqslant0$．

此时，退化解是列向量，$(|t|,1-|t|)$，它在$t=0$处导数不连续．退化解是稳定的，这是因为

$$\frac{\partial^{2q+1}h_1}{\partial y_1^{2q+1}}=1+G(y_2)\geqslant 1>0$$

$$\frac{\partial^{2q+1}h_2}{\partial y_2^{2q+1}}=1+H(y_1)\geqslant 1>0$$

故由定理 2 可知，存在一个解 $y=(y_1(t,\ \varepsilon),\ y_2(t,\ \varepsilon))$，对充分小的 ε，它满足如下不等式：

$$|y_1-|t||\leqslant L_1+R_1+C_q\varepsilon^{(q+1)^{-1}}$$
$$|y_2-1+|t||\leqslant L_2+R_2+C_q\varepsilon^{(q+1)^{-1}}$$

其中

$$L_1=\begin{cases}|A_1-1|\exp\left(\dfrac{-1-t}{\varepsilon}\right) & q=0\\ \dfrac{|A_1-1|}{\left[1+\dfrac{q}{\varepsilon\sqrt{q+1}}|A_1-1|^q(1+t)\right]^{q^{-1}}} & q\geqslant 1\end{cases}$$

$$R_1=\begin{cases}|B_1-1|\exp\left(\dfrac{-1+t}{\varepsilon}\right), & q=0\\ \dfrac{|B_1-1|}{\left[1+\dfrac{q}{\varepsilon\sqrt{q+1}}|B_1-1|^q(1-t)\right]^{q^{-1}}} & q\geqslant 1\end{cases}$$

$$L_2=\begin{cases}|A_2|\exp\left(\dfrac{-1-t}{\varepsilon}\right) & q=0\\ \dfrac{|A_2|}{\left[1+\dfrac{q}{\varepsilon\sqrt{q+1}}|A_2|^q(1+t)\right]^{q^{-1}}} & q\geqslant 1\end{cases}$$

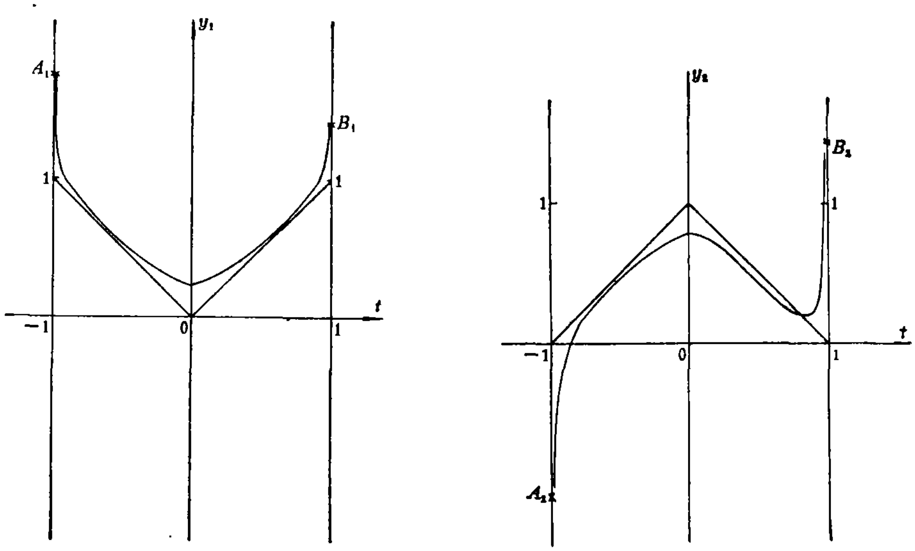

图 1

$$R_2=\begin{cases}|B_2|\exp\left(\dfrac{-1+t}{\varepsilon}\right) & q=0\\[2ex] \dfrac{|B_2|}{\left[1+\dfrac{q}{\varepsilon\sqrt{q+1}}|B_2|^q(1-t)\right]^{q^{-1}}} & q\geqslant 1\end{cases}$$

这里 C_q 是一个正的、可计算的不依赖于 ε 的常数。（此结果如图 1 所示）

参 考 文 献

[1] Brish, N. I., On Boundary Value Problems for the Equation $\varepsilon y''=f(x, y, y')$ for Small ε, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 95(1954), 429—432.

[2] Hebets, P. and M. Laloy, E'tude de problèmes aux limites par la mèthod des sur-et sous-solutions, Lecture notes, Catholic University of Louvain, Belgium, (1974).

[3] Bernfeld, S. and V. Lakshmikantham, An Introduction to Non-linear Boundary Value Problems, Academic Press, New York(1974).

[4] Boglaev, Yu. B., The two-point problem for a class of ordinary differential equations with a small parameter coefficient of the derivative, *USSR Comp. Math. phys.*, **10**, 4(1970), 191—204.

[5] Chang, K. W. and F. A. Howes, Nonlinear Singular Perturbation Phenomena, Springer-Verlag pub. (in press).

[6] O'Donnell, M. A., Boundary and corner layer behavior in singularly perturbed semilinear systems of boundary value problems, *SIAM J. Math. Anal.* (to be published).

Boundary and Angular Layer Behavior in Singularly Perturbed Semilinear Systems

K. W. Chang

(Department of Mathematics and Statistics, The University of Calgary, Alberta, Canada)

G. X. Liu

(Department of Mathematics, Nankai University, Tianjin)

Abstract

Some authors employed the method and technique of differential inequalities to obtain fairly general results concerning the existence and asymptotic behavior, as $\varepsilon\to0^+$, of the solutions of scalar boundary value problems

$$\varepsilon y''=h(t,\ y),\quad a<t<b$$
$$y(a,\ \varepsilon)=A,\quad y(b,\ \varepsilon)=B$$

In this paper, we extend these results to vector boundary value problems, under analogous stability conditions on the solution $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$ of the reduced equation $0=\mathbf{h}(t,\ \mathbf{u})$.

Two types of asymptotic behavior are studied, depending on whether the reduced solution $\mathbf{u}(t)$ has or does not have a continuous first derivative in (a,b), leading to the phenomena of boundary and angular layers.