应用数学和力学，第5卷第3期（1984年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

再论方程带两个小参数的高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动

林 宗 池

（福建师大数学系，1981年10月12日收到）

摘 要

本文用"两变量展开程序"[11]的方法重新研究方程带两个小参数的高阶椭圆型方程一般边值问题解的渐近式的构造，这个问题的边值条件比文[1]更一般．我们给出了渐近解的表达式和有关的余项估计．

一、前 言

关于椭圆型方程的奇摄动问题，过去大多数是研究狄立克雷问题[2]~[5]．1978年，作者应用M．И．Вишик和Л．А．Люстерник的方法，研究了方程含两个小参数的高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动[1]和在边界与算子摄动相结合的情况下，四阶椭圆型方程和更高阶的椭圆型方程一般边值问题的奇摄动[6]~[7]．本文将应用"两变量展开程序"的方法进一步讨论方程含两个小参数的高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动，这个问题的边界条件比文[1]更一般．我们给出了渐近解的表达式和有关的余项的估计．

我们考虑如下的含两个参数的 $2(m+l)$ 阶椭圆型方程的一般边值问题$A_{\varepsilon,\mu}$：

$$L_{\varepsilon,\mu}u_{\varepsilon,\mu}\equiv\varepsilon^{2l}L_{2l}u_{\varepsilon,\mu}+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^{r}L_{r}u_{\varepsilon,\mu}+L_0u_{\varepsilon,\mu}=f(x)\qquad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega \tag{1.1}$$

$$B_ju_{\varepsilon,\mu}\Big|_{\partial\Omega}=g_j(x)\Big|_{\partial\Omega}\qquad(j=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{1.2}$$

的奇摄动。其中 ε,μ 为相互依赖的正的小参数，Ω 表示 n 维有界区域 R^n，$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，并假设 $\partial\Omega$ 是足够光滑；L_0 表示 $2m$ 阶强椭圆型算子：

$$L_0u\equiv\sum_{|\beta|<2m}C_\beta(x)D^\beta u\equiv\sum_{k=0}^{2m}\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k}C_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)D^{\beta_1}_{x_1}\cdots D^{\beta_n}_{x_n}u \tag{1.3}$$

式中

$$(-1)^m\sum_{|\beta|=2m}C_\beta(x)\xi^\beta\geqslant\alpha_0|\xi|^{2m} \tag{1.4}$$

α_0 为正的常数，$\beta=(\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n)$，$|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_n$；$L_{2l}$ 表示 $2(m+l)$ 阶强椭圆型算子：

$$L_{2l}u \equiv \sum_{|\beta| \leq 2(m+l)} a_\beta(x) D^\beta u \equiv \sum_{k=0}^{2(m+l)} \sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k} a_{\beta_1\cdots\beta_n}(x) D_{x_1}^{\beta_1} \cdots D_{x_n}^{\beta_n} u \tag{1.5}$$

式中

$$(-1)^{m+l} \sum_{|\beta|=2(m+l)} a_\beta(x) \xi^\beta \geqslant \alpha_1 |\xi|^{2(m+l)} \tag{1.6}$$

α_1 为正的常数；

$$L_r u \equiv \sum_{|\beta| \leq 2m+r} b_\beta(x) D^\beta u \equiv \sum_{k=0}^{2m+r} \sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k} b_{\beta_1\cdots\beta_n}(x) D_{x_1}^{\beta_1} \cdots D_{x_n}^{\beta_n} u$$

$$(r=1,2,\cdots,2l-1) \tag{1.7}$$

又 $B_j u$ $(j=0,1,\cdots,m+l-1)$ 表示边界微分算子：

$$B_j u \equiv \sum_{|h| \leq m_j} b_h^{(j)}(x) D^h u \qquad 0 \leqslant m_j \leqslant 2(m+l)-1$$

其中$b_h^{(j)}(x)$是充分光滑的。

在薄板和薄壳理论中，常遇到这一类边值问题[8]。

二、形 式 渐 近 解

假设边值问题(1.1)～(1.2)存在唯一解 $u_{\varepsilon,\mu} \in C^{2(m+l)}(\bar{\Omega})$ 和退化边值问题A_0：

$$L_0 u = f(x) \qquad x \in \Omega$$

$$B_j u\Big|_{\partial\Omega} = g_j(x)\Big|_{\partial\Omega} \qquad (j=0,1,\cdots,m-1)$$

对任意充分光滑的函数 $f(x)$和 $g_j(x)$存在唯一的充分光滑的解 $u_{0,0}$。在文[9] 中讨论了这些解存在的条件.

我们先在区域Ω内构造问题$A_{\varepsilon,\mu}$的解，鉴于问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 含有两个形式参数，因此，假定解 $u_{\varepsilon,\mu}$ 也具有两个参数的如下形式的渐近展开式

$$u_{\varepsilon,\mu} \sim \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{p} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i} \varepsilon^i w_{p-i,i}(x) \tag{2.1}$$

将(2.1)式代入方程(1.1)，并比较$\frac{\mu}{\varepsilon}$和 ε 的各次幂的系数，得到关于 $w_{0,0}(x), w_{p-i,i}(x)$ 的递推方程：

$$L_0 w_{0,0}(x) = f(x) \tag{2.2}$$

$$L_0 w_{p-i,i}(x) = -\sum_{r=1}^{2l-1} L_r w_{p-i-r,i-r} - L_{2l} w_{p-i,i-2l} \tag{2.3}$$

$$(i=0,1,\cdots,p;\ \ p=1,2,\cdots)$$

在(2.3)式中以及以后的计算中，都将负下标的量取作零.

下面再来构造边界层项。

在边界 $\partial\Omega$ 的邻域建立局部坐标系：$(\rho,\varphi)=(\rho,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$，$\varphi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$ 表示边界上的点的坐标，因此，$\rho=0$ 表示边界 $\partial\Omega$，$0<\rho<\eta$ 表示连接到边界的带形邻域，ρ 是沿着内法线到边界的距离。

在局部坐标系 (ρ,φ) 下，算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 具有形式：

$$
\begin{aligned}
L_{\varepsilon,\mu}&\equiv\varepsilon^{2l}L_{2l}+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r L_r+L_0\\
&\equiv\varepsilon^{2l}\Big[a_{2(m+l)}(\rho,\varphi)D_\rho^{2(m+l)}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant 2(m+l)\\ \beta_1\neq 2(m+l)}}a_{\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_\rho^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]\\
&\quad+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\Big[b_{2m+r}(\rho,\varphi)D_\rho^{2m+r}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant 2m+r\\ \beta_1\neq 2m+r}}b_{\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_\rho^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]\\
&\quad+\Big[C_{2m}(\rho,\varphi)D_\rho^{2m}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant 2m\\ \beta_1\neq 2m}}C_{\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_\rho^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

其中 $a_{2(m+l)}=a_{2(m+l),0,\cdots,0}$；$b_{2m+r}=b_{2m+r,0,\cdots,0}$；$C_{2m}=C_{2m,0,\cdots,0}$。

在 $\partial\Omega$ 的邻域引进两变量 $\tilde{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$：

$$
\tilde{\rho}=\frac{u(\rho,\varphi)}{\varepsilon},\qquad \bar{\rho}=\rho \tag{2.5}
$$

其中 $u(\rho,\varphi)$ 是待定函数。

将关于 ρ 的偏导数 D_ρ 换成关于 $\tilde{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 的偏导数，为简单起见，今后将 $\bar{\rho}$ 仍记作 ρ，则

$$
D_\rho=\frac{\partial}{\partial\tilde{\rho}}\ \frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial\rho}+\frac{\partial}{\partial\bar{\rho}}\ \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\rho}=\varepsilon^{-1}u_\rho D_{\tilde{\rho}}+D_\rho
$$

$$
D_\rho^2=\varepsilon^{-2}u_\rho^2D_{\tilde{\rho}}^2+\varepsilon^{-1}(u_{\rho\rho}D_{\tilde{\rho}}+2u_\rho D_{\tilde{\rho}\rho}^2\ )+D_\rho^2
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$
D_\rho^{\beta_1}=\varepsilon^{-\beta_1}u_\rho^{\beta_1}D_{\tilde{\rho}}^{\beta_1}+\cdots+\varepsilon^{-\beta_1+i}D_{\tilde{\rho}}^{\beta_1-i}\ A_\rho^{\beta_1,i}\ +\cdots+A_\rho^{\beta_1,\beta_1}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$
\begin{aligned}
D_\rho^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}&=\varepsilon^{-\beta_1}u_\rho^{\beta_1}D_{\tilde{\rho}}^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}+\cdots\\
&\quad+\varepsilon^{-\beta_1+i}D_{\tilde{\rho}}^{\beta_1-i}A_\rho^{\beta_1,i}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}+\cdots+A_\rho^{\beta_1,\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\\
&\qquad(\beta_1,=0,1,\cdots;\ \beta_2=0,1,\cdots)
\end{aligned}
$$

式中 $A_\rho^{\beta_1,i}$ 表示关于 ρ 的 i 阶微分算子：

$$
A_\rho^{\beta_1,i}\equiv\frac{\beta_1(\beta_1-1)\cdots(\beta_1-i+1)}{i!}u_\rho^{\beta_1-i}D_\rho^i+\cdots
$$

上式右端的“…”项表示关于 ρ 的低于 i 阶的微分算子，

$$
A_\rho^{\beta_1,\beta_1}\equiv D_\rho^{\beta_1},\quad A_\rho^{\beta_1,1}\equiv\beta_1u_\rho^{\beta_1-1}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\beta_1(\beta_1-1)}{2}u_\rho^{\beta_1-2}u_{\rho\rho}
$$

将微分算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 分解成

$$L_{\varepsilon,\mu}\equiv\varepsilon^{-2m}\left[M_0+\sum_{k=1}^{2(m+l)}\varepsilon^k M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{2(m+l)}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k R_{r,k}\right] \tag{2.6}$$

其中

$$M_0\equiv u_\rho^{2m}\left[a_{2(m+l)}u_\rho^{2l}\frac{\partial^{2(m+l)}}{\partial\tilde{\rho}^{2(m+l)}}+C_{2m}\frac{\partial^{2m}}{\partial\tilde{\rho}^{2m}}\right]$$

$$M_1\equiv u_\rho^{2m-1}\left[2(m+l)a_{2(m+l)}u_\rho^{2l}\frac{\partial^{2(m+l)}}{\partial\tilde{\rho}^{2(m+l)-1}\partial\rho}+2mC_{2m}\frac{\partial^{2m}}{\partial\tilde{\rho}^{2m-1}\partial\rho}\right]$$

$$+u_\rho^{2m-2}\left[(m+l)\ (2m+2l-1)a_{2(m+l)}u_\rho^{2l}u_{\rho\rho}\frac{\partial^{2(m+l)-1}}{\partial\tilde{\rho}^{2(m+l)-1}}\right.$$

$$\left.+m(2m-1)C_{2m}u_{\rho\rho}\frac{\partial^{2m-1}}{\partial\tilde{\rho}^{2m-1}}\right]$$

$$+u_\rho^{2m-1}\left[a_{2(m+l)-1}\ u_\rho^{2l}\ \frac{\partial^{2(m+l)-1}}{\partial\tilde{\rho}^{2(m+l)-1}}+C_{2m-1}\frac{\partial^{2m-1}}{\partial\tilde{\rho}^{2m-1}}\right]$$

$$+u_\rho^{2m-1}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{2(m+l)-1,j}\ u_\rho^{2l}\ \frac{\partial^{2(m+l}}{\partial\tilde{\rho}^{2(m+l)-1}\partial\varphi_j}+C_{2m-1,j}\frac{\partial^{2m}}{\partial\tilde{\rho}^{2m-1}\partial\varphi_j}\right)\right]$$

$$R_{r,0}\equiv b_{2m+r}(\rho,\varphi)\ u_\rho^{2m+r}\ D_{\tilde{\rho}}^{2m+r}$$

$$R_{r,1}\equiv u_\rho^{2m-1}\left[(2m+r)b_{2m+r}\,u_\rho^r\frac{\partial^{2m+r}}{\partial\tilde{\rho}^{2m+r}\partial\rho}\right]$$

$$+u_\rho^{2m-2}\left[\frac{(2m+r)\ (2m+r-1)}{2}b_{2m+r}\,u_\rho^r u_{\rho\rho}\frac{\partial^{2m+r-1}}{\partial\tilde{\rho}^{2m+r-1}}\right]$$

$$+u_\rho^{2m-1}\left[b_{2m+r-1}\,u_\rho^r\frac{\partial^{2m+r-1}}{\partial\tilde{\rho}^{2m+r-1}}\right]$$

$$+u_\rho^{2m-1}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\ b_{2m+r-1,j}\ u_\rho^r\frac{\partial^{2m+r}}{\partial\tilde{\rho}^{2m+r-1}\partial\varphi_j}\right]$$

式中，$a_{2(m+l)-1,j}, b_{2m+r-1,j}, C_{2m-1,j}$ 分别表示$a_{2(m+l)-1,\beta_2,\quad,\beta_n}, b_{2m+r-1,\beta_2,\dots,\beta_n}, C_{2m-1,\beta_2,\quad,\beta_n}$ 中 $\beta_{j+1}=1$，$\beta_i=0$ $(i\neq j+1)$ 的系数；M_n，$(R_{r,n})$，$(n=2,3,\cdots,2(m+l)-1)$ 是关于$\tilde{\rho}$ 的 $2(m+l)-n$ 阶，$(2m+r-n$ 阶$)$，关于ρ的n阶微分算子。

假设边界层项具有下面形式的展开式：

$$V(\tilde{\rho},\rho,\varphi)\sim e^R\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i v_{p-i,i} \tag{2.7}$$

其中 R 为待定常数。

把上式代入齐次方程：

$$L_{\varepsilon,\mu}V\equiv\varepsilon^{-2m}\left[M_0+\sum_{k=1}^{2(m+l)}\varepsilon^k M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{2(m+l)}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k R_{r,k}\right]V=0$$

比较$\frac{\mu}{\varepsilon}$和 ε 的各次幂的系数，得到关于求$v_{0,0}(\tilde{\rho},\rho,\varphi)$和 $v_{p-j,j}(\tilde{\rho},\rho,\varphi)$ 的递推方程

$$M_0 v_{0,0} \equiv u_\rho^{2m}\left[a_{2(m+l)}u_\rho^{2l}\frac{\partial^{2(m+l)}v_{0,0}}{\partial\tilde{\rho}^{2(m+l)}}+C_{2m}\frac{\partial^{2m}v_{0,0}}{\partial\tilde{\rho}^{2m}}\right]=0 \tag{2.8}$$

$$M_0 v_{p-j,j}=-\sum_{k=1}^{p}M_k v_{p-j,j-k}-\sum_{k=0}^{j}\sum_{r=1}^{2l-1}R_{r,k}v_{p-j-r,j-k} \tag{2.9}$$

$$(j=0,1,\cdots p;\quad p=0,1,2,\cdots)$$

下面再来考察方程(2.8)的解的性质。

若在(2.5)式中，取待定函数$u(\rho,\varphi)$是

$$u(\rho,\varphi)=\int^{\rho}\left[(-1)^l\frac{C_{2m}(t,\varphi)}{a_{2(m+l)}(t,\varphi)}\right]^{\frac{1}{2l}}dt \tag{2.10}$$

则方程(2.8)化为

$$(-1)^l\frac{\partial^{2(m+l)}v_{0,0}}{\partial\tilde{\rho}^{2(m+l)}}+\frac{\partial^{2m}v_{0,0}}{\partial\tilde{\rho}^{2m}}=0 \tag{2.11}$$

根据强椭圆型条件(1.4)和(1.6)知

$$(-1)^{m+l}a_{2(m+l)}(\rho,\varphi)>0,\quad (-1)^m C_{2m}(\rho,\varphi)>0$$

所以

$$(-1)^l\frac{C_{2m}(\rho,\varphi)}{a_{2(m+l)}(\rho,\varphi)}>0$$

方程(2.11)所对应的特征方程为

$$(-1)^l\lambda^{2(m+l)}+\lambda^{2m}=0 \tag{2.12}$$

此特征方程具有 l 个实部是负数的根[10]，记为$-\lambda_k$ $(k=1,2,\cdots,l)$. 所以从方程 (2.11) 可以求得具有边界层性质的解为

$$v_{0,0}=\sum_{k=1}^{l}\beta_k^{(0,0)}(\rho,\varphi)\exp[-\lambda_k\tilde{\rho}] \tag{2.13}$$

式中$\beta_k^{(0,0)}$ (ρ,φ) $(k=1,2,\cdots,l)$是任意函数，将由以后导出的关于 $\beta_k^{(0,0)}$ 的一阶方程和边值条件确定.

在递推方程(2.9)中取 $p=1$, $j=0$, 得

$$M_0 v_{1,0}=-R_{1,0}v_{0,0} \tag{2.14}$$

考虑到

$$\frac{\partial^n v_{0,0}}{\partial\tilde{\rho}^n}=\sum_{k=1}^{l}(-\lambda_k)^n\beta_k^{(0,0)}\exp[-\lambda_k\tilde{\rho}]$$

以及关系式(2.10), (2.12)得:

$$R_{1,0}v_{0,0}=b_{2m+1}(\rho,\varphi)u_\rho^{2m+1}D_{\tilde{\rho}}^{2m+1}v_{0,0}$$

$$=u_\rho^{2m}\left[b_{2m+1}(\rho,\varphi)u_\rho\beta_k^{(0,0)}(\rho,\varphi)\right](-\lambda_k)^{2m+1}\exp[-\lambda_k\tilde{\rho}]$$

所以若在(2.13)中取任意函数 $\beta_k^{(0,0)}$ $(k=1,2,\cdots,l)$满足函数方程：

$$b_{2m+1}(\rho,\varphi)u_\rho\beta_k^{(0,0)}(\rho,\varphi)=0$$

则(2.14)化成形式(2.11)的齐次方程：

$$M_0v_{1,0}=(-1)^l\frac{\partial^{2(m+l)}v_{1,0}}{\partial\tilde{\rho}^{2(m+l)}}+\frac{\partial^{2m}v_{1,0}}{\partial\tilde{\rho}^{2m}}=0$$

可以求得具有边界层性质的解为：

$$v_{1,0}=\sum_{k=1}^{l}\beta_k^{(0,0)}(\rho,\varphi)\exp[-\lambda_k\tilde{\rho}] \tag{2.15}$$

式中 $\beta_k^{(0,0)}$ $(k=1,2,\cdots,l)$是待定函数。

继之，令(2.9)中 $p=1$，$j=1$得

$$M_0v_{0,1}=-M_1v_{0,0} \tag{2.16}$$

因(2.16)的非齐次项具有边界层函数的性质，故其特解也具有边界函数的性质，于是(2.16)的一般解也具有边界层函数的性质，把它表成如下形式：

$$v_{0,1}=\sum_{k=1}^{l}\beta_k^{(0,1)}(\rho,\varphi)\exp[-\lambda_k\tilde{\rho}]+v_{0,1}^{*}(\tilde{\rho},\rho,\varphi)$$

其中 $v_{0,1}^{*}(\tilde{\rho},\rho,\varphi)$ 是非齐次方程的一个特解，而第一项是齐次方程的通解，$\beta_k^{(0,1)}(\rho,\varphi)$是待定函数。

如此继续下去，可以逐次地求得 $v_{p-i,i}$ $(i=0,1,\cdots,p;\ p=0,1,2,\cdots)$。

下面再来确定 $w_{p-i,i}$ 和 $v_{p-i,i}$ $(i=0,1,\cdots,p;\ p=0,1\cdots)$应满足的边界条件。

将边值条件(1.2)用局部坐标(ρ,φ)表示出：

$$B_ju\Big|_{\partial\Omega}=\sum_{|h|\leqslant m_j}b_h^{(j)}(\rho,\varphi)D^hu\Big|_{\partial\Omega}=g_j(\varphi)\qquad(j=0,1,\cdots,m+l-1)$$

式中 $g_j(\varphi)=g_j(0,\varphi)$，再根据(2.5)式引进两变量 $\tilde{\rho}$ 和 ρ，将边界微分算子 B_j 分解成

$$B_j\equiv\varepsilon^{-m_j}(H_0^{(j)}+\varepsilon H_1^{(j)}+\cdots+\varepsilon^{m_j}H_{m_j}^{(j)})\qquad(j=0,1,,\cdots,m+l-1) \tag{2.17}$$

式中

$$H_0^{(j)}\equiv b_{m_j}^{(j)}u_\rho^{m_j}D_{\tilde{\rho}}^{m_j}$$

$$H_1^{(j)}=b_{m_j}^{(j)}\left(m_ju_\rho^{m_j-1}D_{\tilde{\rho}}^{m_j-1}D_\rho+\frac{m_j(m_j-1)}{2!}u_\rho^{m_j-2}u_{\rho\rho}D_{\tilde{\rho}}^{m_j-1}\right)$$
$$+\sum_{|h|\leqslant1}b_{m_j-1,h_2,\cdots,h_n}u_\rho^{m_j-1}D_{\tilde{\rho}}^{m_j-1}D_{\varphi_1}^{h_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{h_n}$$

$H_n^{(j)}$ $(n=2,3,\cdots,m_j)$ 是关于 $\tilde{\rho}$ 的 m_j-n 阶和关于 ρ 的 n 阶微分算子。

因为方程是线性的，所以边值问题(1.1)～(1.2)的解 $u_{\varepsilon,\mu}$ 具有下面形式的渐近展开式：

$$u_{\varepsilon,\mu}\sim\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}w_{p-i,i}+\varepsilon^{R}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}v_{p-i,i} \tag{2.18}$$

我们只取其具有余项的有限和：

$$u_{\varepsilon,\mu}=\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}+\varepsilon^{R}\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}v_{p-i,i}+Z_N \tag{2.19}$$

将上式代入边值条件(1.2)，考虑到(2.17)得：

$$\begin{aligned}&\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}B_jw_{p-i,i}\Big|_{\partial\Omega}\\&+\varepsilon^{R-m}\left(\sum_{i=0}^{m_j}\varepsilon^{i}H_i^{(j)}\right)\left(\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}v_{p-i,i}\Big|_{\partial\Omega}\right.\\&+B_jZ_N\Big|_{\partial\Omega}=g_j(\varphi)\qquad(j=0,1,\cdots,m+l-1)\end{aligned} \tag{2.20}$$

作为一个例子，考察 $m_0=1$，$m_j=j+1$ $(j=1,2,\cdots,m+l-1)$ 和 $m=l$ 的情形，(关于其它情形可以类似地建立边值条件的递推公式)．这时(2.20)具有形式：

$$\begin{aligned}&B_0\left(\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{i}\varepsilon^{i}w_{p-i,i}\right)\Big|_{\partial\Omega}+\varepsilon^{R-1}(H_0^{(0)}+\varepsilon H_1^{(0)})\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}v_{p-i,i}|_{\partial\Omega}\\&\qquad+B_0Z_N|_{\partial\Omega}=g_0(\varphi)\\&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&B_m\left(\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{i}\varepsilon^{i}w_{p-i,i}\right)\Big|_{\partial\Omega}+\varepsilon^{R-(m+1)}\left(\sum_{i=0}^{m+1}\varepsilon^{i}H_i^{(m)}\right)\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}v_{p-i,i}|_{\partial\Omega}\\&\qquad+B_mZ_N|_{\partial\Omega}=g_m(\varphi)\\&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\&B_{m+l-1}\left(\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}w_{p-i,i}\right)\Big|_{\partial\Omega}\\&\qquad+\varepsilon^{R-(m+l)}\left(\sum_{i=0}^{m+l}\varepsilon^{i}H_i^{(m+l-1)}\right)\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}v_{p-i,i}|_{\partial\Omega}\\&\qquad+B_{m+l-1}Z_N|_{\partial\Omega}=g_{m+l-1}(\varphi)\end{aligned}$$

取 $R=m+1$，比较上式两端 $\frac{\mu}{\varepsilon}$ 和 ε 各次幂的系数，则得到关于 $w_{p-i,i}$，$v_{p-i,i}$ $(i=0,1,\cdots,p;$ $p=0,1,\cdots,N+m+l-1)$ 的边值条件：

$$B_jw_{0,0}=g_j(\varphi)\qquad(j=0,1,\cdots,m-1) \tag{2.21}$$

$$\left.\begin{aligned}&H_0^{(m)}v_{0,0}=g_m(\varphi)-B_mw_{0,0}\\&H_0^{(m+a)}v_{0,0}=0\qquad(a=1,2\cdots,l-1)\end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

$$\left.\begin{aligned}
&B_0 w_{p-i,i} = -H_0^{(0)} v_{p-i,i-m} - H_1^{(0)} v_{p-i,i-(m+1)}\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&B_{m-1} w_{p-i,i} = -\sum_{s=0}^{m} H_s^{(m)} v_{p-i,i-1-s} \qquad \begin{pmatrix} i=0,1,\cdots,p \\ p=1,2,\cdots,N \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

$$\left.\begin{aligned}
&H_0^{(m)} v_{p-i,i} = \begin{cases} -B_m w_{p-i,i} - \sum\limits_{s=1}^{m} H_s^{(m)} v_{p-i,i-s} & \begin{pmatrix} i=0,1,\cdots,p \\ p=1,2,\cdots,N \end{pmatrix} \\ 0 \quad (p=N+1,\cdots,N+m+l-1;\ j=0,1,\cdots,p) & \end{cases}\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&H_0^{(m+l-1)} v_{p-i,i} = \begin{cases} 0 \quad (i=0,1,\cdots,p;\ p=1,2,\cdots,l-2) \\ -B_{m+l-1} w_{0,0} - \sum\limits_{s=1}^{m+l} H_s^{(m+l-1)} v_{p-i,i-s} + g_{m+l-1}(\varphi) \\ \qquad\qquad (p=l-1,\ j=l-1) \\ -B_{m+l-1} w_{p-i,i-l+1} \quad \begin{pmatrix} i=0,1\cdots,p \\ p=l,l+1,\cdots,N \end{pmatrix} \\ 0 \quad (i=0,1,\cdots,p;\ p=N+1,\cdots,N+m+l-1) \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

$$\left.\begin{aligned}
&Z_N = -\varepsilon^m \sum_{p=N+2-m}^{N+m+l-1} \sum_{i=0}^{p} (H_0^{(0)} + \varepsilon H_1) \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i} \varepsilon^i v_{p-i,i} \equiv \gamma_0(\varepsilon,\mu,\varphi)\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&B_{m-1} Z_N = -\varepsilon \left(\sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i H_i^{(m)} \right) \sum_{p=N}^{N+m+l-1} \sum_{i=0}^{p} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i} \varepsilon^i v_{p-i,i} \equiv \gamma_{m-1}(\varepsilon,\mu,\varphi)\\
&B_m Z_N = 0\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&B_{m+l-1} Z_N = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

在上式中，略去了取边界值的记号.

从上面的讨论中可以看出，展开式(2.19)中的 $w_{0,0}$ 应是退化边值问题

$$L_0 w_{0,0} = f(x) \qquad x \in \Omega$$

$$B_j w_{0,0}\Big|_{\partial\Omega} = g_j(x)\Big|_{\partial\Omega} \qquad (j=0,1,\cdots,m-1)$$

的解，求得 $w_{0,0}$ 后，从(2.22)式可以得到关于 $\beta_k^{(0,0)}(\rho,\varphi)$ $(k=1,2,\cdots,l)$ 的初值条件．事实上，将(2.13)代入(2.22)式得

$$\begin{cases}
\sum\limits_{k=1}^{l} (-\lambda_k)^{m+1} \beta_k^{(0,0)}(0,\varphi) = \dfrac{g_m(\varphi) - B_m w_{0,0}(0,\varphi)}{b_{m+1}^{(m)}(0,\varphi) u_p^{m+1}(0,\varphi)} \\
\sum\limits_{k=0}^{l} (-\lambda_k)^{m+2} \beta_k^{(0,0)}(0,\varphi) = 0 \\
\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{l}(-\lambda_k)^{m+l}\beta_k^{(0,0)}(0,\varphi)=0$$

因其系数行列式不为零，所以可以唯一地解得$\beta_k^{(0,0)}(0,\varphi)$ ($k=1,2,\cdots,l$)。

求得$v_{0,0}$后，再代入(2.23)式，（令$i=0$，$p=1$）可得关于$w_{1,0}$的边值条件，再根据递推方程(2.3)，（令$i=0$，$p=1$）可以解得$w_{1,0}$，将求得的$w_{0,0}$，$v_{0,0}$和$w_{1,0}$再代入(2.24)式，（令$i=0$，$p=1$）同前面一样可以唯一地解得初值条件$\beta_k^{(1,0)}$，代入(2.15)式又求得$v_{1,0}$。这样继续下去，可以逐步地求得$w_{p-i,i}$ ($i=0,1\cdots,p$；$p=0,1,\cdots,N$)和$v_{p-i,i}$ ($i=0,1,\cdots,p$；$p=0,1,\cdots,N+m+l-1$)，其中当$p>N$时，认为$w_{p-i,i}\equiv 0$。

上面求得的$v_{p-i,i}$ ($i=0,1,\cdots,p$；$p=0,1,\cdots,N+m+l-1$)只在边界的η邻域有定义，为了得出在整个区域Ω有定义的边界层型函数，可再引进光滑函数$\psi(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$，使在边界的$\eta$邻域之外取零值，当$0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{3}\eta$时取值1和$0\leqslant\psi(x)\leqslant 1$，作函数

$$\tilde{v}_{p-i,i}=\psi(x)v_{p-i,i}\qquad(i=0,1,\cdots,p;\ p=0,1,\cdots,N+m+l-1)$$

则$\tilde{v}_{p-i,i}$就是我们所要求的在整个区域Ω上有定义边界层函数，并且在边界$\frac{1}{3}\eta$邻域内$\tilde{v}_{p-i,i}=v_{p-i,i}$。因此，问题$A_{\varepsilon,\mu}$的$N$阶形式渐近解具有如下的形式：

$$U^N_{\varepsilon,\mu}=\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i w_{p-i,i}+\varepsilon^{m+1}\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i\tilde{v}_{p-i,i}$$

三、余 项 估 计

下面将导出边值问题$A_{\varepsilon,\mu}$的精确解$u_{\varepsilon,\mu}(x)$与所求的N阶形式渐近解$U^N_{\varepsilon,\mu}$的余项估计。以Ω_η表示边界$\partial\Omega$的η邻域，当$x\in\Omega\backslash\Omega_\eta$时，$\tilde{v}_{p-i,i}=0$，所以

$$\begin{aligned}L_{\varepsilon,\mu}U^N_{\varepsilon,\mu}&=L_{\varepsilon,\mu}\left(\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i w_{p-i,i}\right)\\&=f(x)+\varepsilon^{2l}\sum_{p=N+1-2l}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i w_{p-i,i}\\&\quad+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\sum_{p=N+1-2r}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i L_r w_{p-i,i}\\&=f(x)+\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{N+1}\left[\varepsilon^{2l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-2l}+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-2r}\right]\Phi_1(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中$\Phi_1(x)=O(1)$；又当$x\in\Omega_\eta\backslash\Omega_{\eta/3}$时，则

$$L_{\varepsilon,\mu}\left(\varepsilon^{m+1}\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}\tilde{v}_{p-i,i}\right)$$

$$=\varepsilon^{-2m}\left(M_0+\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^{k}M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+l+m}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{r}\varepsilon^{k}R_{r,k}\right)$$

$$\cdot\left(\varepsilon^{m+1}\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}\tilde{v}_{p-i,i}\right)=\varepsilon^{M}\Phi_2(x) \tag{3.2}$$

其中$\Phi_2(x)=O(1)$，M为任意正整数．又当$x\in\Omega_{\eta/3}$时，$\tilde{v}_{p-i,i}=v_{p-i,i}$，所以由递推方程(2.8)、(2.9)得：

$$\varepsilon^{-2m}\left(M_0+\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^{k}M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=1}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{r}\varepsilon^{k}R_{r,k}\right)$$

$$\cdot\left(\varepsilon^{m+1}\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}v_{p-i,i}\right)$$

$$=\varepsilon^{-m+1}\left[\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^{k}\sum_{p=N+m+l-k}^{N+m+l-1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}M_k v_{p-i,i}\right.$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{r}\varepsilon^{k}\sum_{p=N+m+l-r-k}^{N+m+l-1}\left(\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}R_{r,k}v_{p-i,i}\right)\right]$$

$$=\varepsilon^{-m+1}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{N+m+l}\left[\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^{k}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-k}\right.$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{r}\varepsilon^{k}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-(r+k)}\right]\Phi_3(x) \tag{3.3}$$

其中$\Phi_3(x)=O(1)$。

综合(3.1)～(3.3)得到在整个区域Ω成立：

$$L_{\varepsilon,\mu}U^{N}_{\varepsilon,\mu}=f(x)+G(\varepsilon,\mu)\Phi_4(x) \tag{3.4}$$

其中 $\Phi_4(x)=O(1)$

$$G(\varepsilon,\mu)=\begin{cases}\varepsilon^{N+1}，\ 当\dfrac{\mu}{\varepsilon^2}\to\beta\ (\varepsilon\to0\ 时)，\ 0\leqslant\beta<\infty\\ \left(\dfrac{\mu}{\varepsilon}\right)^{N}\left[\varepsilon+\varepsilon^{-m+1}\left(\dfrac{\mu}{\varepsilon}\right)^{m+l}\right]，\ 当\dfrac{\mu}{\varepsilon^2}\to0,(\varepsilon\to0时)\end{cases}$$

因此，若用Z_N表示$u_{\varepsilon,\mu}$与$U^{N}_{\varepsilon,\mu}$的余项：

$$Z_N=u_{\varepsilon,\mu}-U^{N}_{\varepsilon,\mu} \tag{3.5}$$

则由(3.4)和边值条件(2.27)得到关于Z_N的边值问题：

$$L_{\varepsilon,\mu}Z_N=G(\varepsilon,\mu)\Phi_i(x)\qquad x\in\Omega \tag{3.6}$$

$$B_jZ_N\Big|_{\partial\Omega}=\gamma_j(\varepsilon,\mu,\varphi)\qquad (j=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{3.7}$$

其中当 $j\geqslant m$时，$\gamma_j(\varepsilon,\mu,\varphi)=0$.

以 $\tilde{Z}_N$ 表示在 $\partial\Omega$ 上满足边值条件(3.7)的$C^{2(m+l)}(\bar{\Omega})$中的函数且成立：

$$\tilde{Z}_N=G(\varepsilon,\mu)\Phi(x) \tag{3.8}$$

其中 $\Phi(x)=O(1)$，作函数

$$\bar{Z}_N=Z_N-\tilde{Z}_N \tag{3.9}$$

则 $\bar{Z}_N$ 确定于下面的齐次边值问题：

$$L_{\varepsilon,\mu}\bar{Z}_N=G(\varepsilon,\mu)P(x)\qquad x\in\Omega \tag{3.10}$$

$$B_j\bar{Z}_N|_{\partial\Omega}=0\qquad (j=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{3.11}$$

其中$P(x)=O(1)$.

假定当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，$0<\mu\leqslant\mu_0$时，算子$L_{\varepsilon,\mu}$有一致有界的逆算子 $L^{-1}_{\varepsilon,\mu}$， 即对于满足边值条件(3.11)的任意函数 $w\in C^{2(m+l)}(\bar{\Omega})$ 成立

$$\|L_{\varepsilon,\mu}w\|_{L_2}\geqslant K_0\|w\|_{L_2} \tag{3.12}$$

其中 K_0 是正的常数，则

$$\|\bar{Z}_N\|_{L_2}\leqslant K_1G(\varepsilon,\mu) \tag{3.13}$$

并由 (3.8) 得到

$$\|\tilde{Z}_N\|_{L_2}\leqslant K_2G(\varepsilon,\mu) \tag{3.14}$$

故得

$$\|Z_N\|_{L_2}\leqslant\|Z_N-\tilde{Z}_N\|_{L_2}+\|\tilde{Z}_N\|_{L_2}\leqslant K_3G(\varepsilon,\mu) \tag{3.15}$$

以上K_1,K_2,K_3均为正的常数.

四、结　　论

综合前面各个部分的结果，即有下面的定理：

定理1 假设下面条件成立：

1) 算子L_0和L_{2l}分别为$2m$和 $2(m+l)$阶的强椭圆型算子和算子 L_r $(r=1,2,\cdots,2l-1)$为阶数$\leqslant 2m+r$的线性偏微分算子；

2) 问题$A_{\varepsilon,\mu}$和A_0的参数，即算子 L_r $(r=0,1,\cdots,2l)$ 的系数和右边的函数 $f(x)$以及区域的边界 $\partial\Omega$ 都充分光滑；

3) 问题 A_0 的解存在且唯一；

4) 算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 有一致有界的逆算子 $L^{-1}_{\varepsilon,\mu}$；

5) ε,μ为互相依赖的小参数，并且$\frac{\mu}{\varepsilon}\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$，则问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 的解 $u_{\varepsilon,\mu}$ 有如下的渐近式：

$$u_{\varepsilon,\mu}=\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^iw_{p-i,i}+\varepsilon^{m+1}\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^iv_{p-i,i}+Z_N \tag{4.1}$$

其中$w_{0,0}(x)$是退化边值问题A_0的解；$w_{p-i,i}$ $(i=0,1,\cdots,p;p=1,2,\cdots,N)$由递推方程(2.3)和边界条件(2.25)确定；$\tilde{v}_{p-i,i}=\psi(x)v_{p-i,i}$，$(i=0,1,\cdots,p;\ p=0,1,\cdots,N+m+l-1)$，式中$\psi(x)$为平滑函数，$v_{p-i,i}$ $(i=0,1,\cdots,p;\ p=0,1,\cdots,N+m+l-1)$为边界层函数，由递推方程(2.8)、(2.9)和初值条件(2.24)、(2.26)确定；Z_N是余项，若$\frac{\mu}{\varepsilon^2}\to\beta$ $(\varepsilon\to 0)$，$0\leqslant\beta<\infty$，则有如下的余项估计式：

$$\left\|Z_N\right\|_{L_2}=O(\varepsilon^{N+1}) \tag{4.2}$$

对于$\frac{\mu}{\varepsilon^2}\to\infty$ $(\varepsilon\to 0)$的情形，我们将讨论一特殊情况，即$\mu=\varepsilon^{1+\alpha}$ $(0<\alpha<1)$这时有

$$G(\varepsilon,\mu)=\varepsilon^{\alpha N}(\varepsilon+\varepsilon^{-m(1-\alpha)+\alpha l+1})=\begin{cases}O(\varepsilon^{\alpha N}), & 当\ \dfrac{m-1}{m+l}<\alpha<\dfrac{m}{m+l}\\ O(\varepsilon^{\alpha N+1}), & 当\ \dfrac{m}{m+l}\leqslant\alpha<1\end{cases}$$

因此，有如下结果：

定理2 在定理1的假设条件1)～5)之下，若$\mu=\varepsilon^{1+\alpha}\left(\frac{m-1}{m+l}<\alpha<1\right)$，则问题$A_{\varepsilon,\mu}$的解$u_{\varepsilon,\mu}$仍有形式渐近解(4.1)，而其余项$Z_N$成立如下的估计式：

$$\left\|Z_N\right\|_{L_2}=\begin{cases}O(\varepsilon^{\alpha N}), & 当\ \dfrac{m-1}{m+l}<\alpha<\dfrac{m+1}{m+l}时\\ O(\varepsilon^{\alpha N+1}), & 当\ \dfrac{m+1}{m+l}\leqslant\alpha<1\ 时\end{cases}$$

最后指出一点，当摄动算子的最高阶项L_{2l}所含参数ε与低阶项L_r $(r=1,2,\cdots,2l-1)$所含参数μ满足$\frac{\mu}{\varepsilon}\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$的情况，摄动问题为自然正则退化，即为在文[1]中所讨论的$\varepsilon=\mu$的情形，一般地，不具有自然正则退化性。

参 考 文 献

[1] 林宗池，方程带两参数的高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动.应用数学和力学,3,5(1982),641—652.

[2] Вишик, М. И. и Л. А., Люстерник, *УМН*. 12, 5, (1957), 3—122.

[3] Линь Цзун—чи (林宗池)，*ДАН СССР*, 157, 4(1964), 784—787.

[4] 郑永树，高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动(Ⅰ),应用数学和力学, 2,5(1981),563—574.

[5] Besjes, J. G., *J. Math. Anal. and Appl.*, 49, 1, (1975), 24—46.

[6] 林宗池，福建师大学报（自然科学版），1(1980), 1—8.

[7] 林宗池，福建师大学报（自然科学版），2(1980), 1—15.

[8] Timoshenko. S. and S. Woinowsky-Kriger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd. ed., N. Y. McGraw-Hill(1959).

[9] Lions, J. L. and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications*, Springer-Verlag, New York, Heideberg Berlin(1972).
[10] 林宗池, 福建师大学报 (自然科学版) 2(1979), 1—10.
[11] 江福汝, 复旦学报, (自然科学版), 2(1978), 29—37.

Again Discussing about Singular Perturbation of General Boundary Value Problem for Higher Order Elliptic Equation Containing Two-Parameter

Lin Zong-chi

(Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract

In this paper using the method of "The Two-Variable Expansion Procedure", we again discuss construction of asymptotic expression of solution of general boundary value problem for higher order elliptic equation containing two-parameter, which boundary condition is more general than [1]. We give asymptotic expression of solution as well as estimation corresponding remainder term.