

文章编号: 1000-0887(2004)11-1163-06

有线性阻尼和变长度的单摆^{*}

蔡建平^{1,3}, 杨翠红², 李怡平³

1. 漳州师范学院 数学系, 福建 漳州 363000;
2. 华中师范大学 数学系, 武汉 430079;
3. 中山大学 数学系, 广州 510275)

(戴世强推荐)

摘要: 应用多尺度法和势能逼近法研究有线性阻尼和变长度的单摆. 通过摩擦因数与摆长慢变参数阶的比较, 详细讨论了 3 种不同的情况并得到振幅、频率和解的渐近分析表达式. 势能逼近法的应用使结果对大幅振动也有效. 当摩擦因数不是很小时, 修正的多尺度法用于得到更精确的首次近似解. 与数值结果的比较表明本文的方法是有效的.

关键词: 单摆; 多尺度法; 势能逼近; 慢变参数

中图分类号: O322 文献标识码: A

1 引言及问题提出

本文研究如下有慢变参数的单摆

$$\frac{d}{dt} \left(l^2(\tau) \frac{d\theta}{dt} \right) + \mu \frac{d}{dt} (l(\tau)\theta) + gl(\tau)\sin\theta = 0, \quad (1)$$

其中 θ 是摆偏离垂直方向的角度, g 是重力加速度, $l(\tau)$ 是慢变长度, $\tau = \varepsilon t$ 是慢尺度而 μ 是摩擦因数. Nayfeh^[1], Bogoliubov 和 Mitropolsky^[2] 曾研究过这类问题. 在文[3]中, Yuste 使用推广的椭圆 KB 法^[4] 得到振动系统的振幅, 它由一阶微分方程表示且必须用数值方法求解. 由于频率的复杂性, 文[3]没有给出它的表达式. 对方程(1)进一步的分析发现: 与 ε 相比, μ 的不同阶数会导致不同的频率. 在 $\mu = O(\varepsilon)$, $\mu = o(\varepsilon)$ 和 $\varepsilon = o(\mu)$ 这 3 种情况下, 本文应用多尺度法推得方程(1)的渐近频率和解, 从中我们可以清楚地看到 μ 和 ε 对频率的影响. 最早由作者李怡平在文[5]中提出的势能逼近法的应用使得渐近解对大幅振动仍有效. 势能逼近是将振动系统的势能用四次多项式表示, 使得首次近似解可以用椭圆函数表示. 当摩擦因数 μ 不是很小时, 修正的多尺度法用于得到更精确的首次近似解. 本文给出的算例证实本文的方法是有效的.

2 单摆的渐近解

通过 μ 与 ε 阶的比较, 本节详细讨论方程(1)的 3 种不同情况. 不同的 μ 的阶数推导出振

* 收稿日期: 2003_02_27; 修订日期: 2004_06_28

作者简介: 蔡建平(1967—), 男, 福建漳州人, 副教授, 博士(Tel: + 86_596_2593813; E_mail: zsu.cjp@sina.com).

动系统频率和解的不同表达式·

2.1 情况一: $\mu = O(\varepsilon)$

令 $\mu = c\varepsilon$, c 是常数, 则方程(1)化为

$$\ddot{\theta} + \varepsilon \frac{2l'(\tau) + c}{l(\tau)} \dot{\theta} + \varepsilon^2 \frac{cl'(\tau)}{l^2(\tau)} \theta + \frac{g}{l(\tau)} \sin \theta = 0, \quad (2)$$

其中 $\dot{\theta} = d\theta/dt$, $l' = dl/d\tau$ 而 $\tau = \varepsilon t$ 是慢尺度· 按照 Kuzmak 的定义^[6], 快尺度 t^+ 为

$$\frac{dt^+}{dt} = \omega(\tau),$$

其中未知函数 $\omega(\tau)$ 由方程(2)解的周期性决定· 假设方程(2)的解可以展开为多尺度形式

$$\theta(t, \varepsilon) = \theta_0(t^+, \tau) + \varepsilon \theta_1(t^+, \tau) + \varepsilon^2 \theta_2(t^+, \tau) + \dots, \quad (3)$$

其中 $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$ 必须是 t^+ 的周期函数, 否则展开式失去渐近意义· 把(3)式代入方程(2)并比较 ε 同次幂的系数, 得到首次方程

$$\omega^2(\tau) \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^{+2}} + \frac{g}{l(\tau)} \sin \theta_0 = 0. \quad (4)$$

(4)式两边乘以 $\partial \theta_0 / \partial t^+$ 并对 t^+ 积分, 得到能量积分

$$\frac{\omega^2(\tau)}{2} \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial t^+} \right)^2 + V(\theta_0) = E_0(\tau), \quad (5)$$

其中 $V(\theta_0) = \frac{g}{l(\tau)} (1 - \cos \theta_0)$ (6)

是势能, $E_0(\tau)$ 是系统的慢变能量· 我们寻找一个四次多项式逼近势能(6), 记为

$$V(\theta) = \frac{1}{2} a(\tau) \theta^2 + \frac{1}{4} b(\tau) \theta^4. \quad (7)$$

选择系数 a, b 满足

$$\begin{cases} V = V \text{ 在 } \theta = 0, \theta = \theta_1 \text{ 和 } \theta = \theta_2, 0 < \theta_1, \theta_2 \leq \pi, \\ V_0 = 0 \text{ 在 } \theta = 0, \end{cases} \quad (8)$$

拟合点 θ_1, θ_2 可以根据不同的要求进行选择· 在(5)式中用 V 代替 V 并积分, 可以得到用椭圆函数表示的解 θ_0 (参阅[7]的3.6节)·

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2av}{b(1+v)}} \operatorname{sn}[K(v) \varphi, v], \quad (9)$$

其中 $\varphi = t^+ + \varphi_0$ 而 $K(v)$ 是关于模 \sqrt{v} 的第一类完全椭圆积分· v 由下面的方程决定(参阅[8]或[9])

$$\frac{L^2(v)v^2}{(1+v)^3} = \frac{D^2 b^2}{4a^3} \exp \left[-2 \int_0^\tau \frac{2l'(s) + c}{l(s)} ds \right], \quad (10)$$

其中常数 D 可由系统的初始值决定· 而

$$L(v) = \int_0^K \operatorname{cn}^2(u, v) \operatorname{dn}^2(u, v) du = \frac{1}{3v} [(1+v)E(v) - (1-v)K(v)], \quad (11)$$

其中 $E(v)$ 是关于模 \sqrt{v} 的第二类完全椭圆积分· 频率为

$$\omega(\tau) = - \frac{Db(1+v)}{2avK(v)L(v)} \exp \left[- \int_0^\tau \frac{2l'(s) + c}{l(s)} ds \right]. \quad (12)$$

详细的推导可参阅[8]或[9]·

2.2 情况二: $\mu = o(\varepsilon)$

不失一般性, 假设 $\mu = c\varepsilon^2$, c 是常数, 则方程(1)化为

$$\ddot{\theta} + \varepsilon \frac{2l'(\tau)}{l(\tau)} \dot{\theta} + \varepsilon^2 \frac{c}{l(\tau)} \dot{\theta} + \varepsilon^3 \frac{d'(\tau)}{l^2(\tau)} \theta + \frac{g}{l(\tau)} \sin \theta = 0 \quad (13)$$

与情况一类似, 我们可以得到形如(9)式的首次渐近解. 决定 v 的方程为

$$\frac{L^2(v)v^2}{(1+v)^3} = \frac{D^2b^2}{4a^3} \exp\left[-2\int_0^\tau \frac{2l'(s)}{l(s)} ds\right] = \frac{D^2b^2}{4a^3} \frac{1}{l^4(\tau)}, \quad (14)$$

而频率为

$$\omega(\tau) = -\frac{Db(1+v)}{2avK(v)L(v)} \exp\left[-\int_0^\tau \frac{2l'(s)}{l(s)} ds\right] - \frac{Db(1+v)}{2avK(v)L(v)} \frac{1}{l^2(\tau)} \quad (15)$$

2.3 情况三: $\varepsilon = o(\mu)$

不失一般性, 假设 $\varepsilon = c\mu^2$, c 是常数. 定义一个新的慢变尺度为 $t = \mu\tau$, 快变尺度 t^+ 为 $dt^+/dt = \omega(t)$, 则 $\tau = \varepsilon = c\mu$. 方程(1)化为

$$\ddot{\theta} + \mu \frac{1}{l(\tau)} \dot{\theta} + \mu^2 \frac{2cl'(\tau)}{l(\tau)} \dot{\theta} + \mu^3 \frac{cl'(\tau)}{l^2(\tau)} \theta + \frac{g}{l(\tau)} \sin \theta = 0 \quad (16)$$

与情况一类似, 我们可以得到形如(9)式的首次渐近解. 决定 v 的方程变为

$$\frac{L^2(v)v^2}{(1+v)^3} = \frac{D^2b^2}{4a^3} \exp\left[-2\int_0^\tau \frac{1}{l(c\mu s)} ds\right], \quad (17)$$

而频率为

$$\omega(t) = -\frac{Db(1+v)}{2avK(v)L(v)} \exp\left[-\int_0^\tau \frac{1}{l(c\mu s)} ds\right]. \quad (18)$$

如果 μ 不是很小时(例如 $0.1 \leq \mu < 1$), 首次近似会有较大的误差. 为了避免高阶近似的复杂计算, 我们将 $O(\mu^2)$ 项 $\mu^2(2cl'(\tau)/l(\tau)) \dot{\theta}$ 保留在 $O(\mu)$ 项 $\mu[1/l(\tau)] \dot{\theta}$ 中, 即

$$\ddot{\theta} + \mu \left[\frac{1}{l(\tau)} + \frac{2cl'(\tau)}{l(\tau)} \right] \dot{\theta} + \mu^3 \frac{d'(\tau)}{l^2(\tau)} \theta + \frac{g}{l(\tau)} \sin \theta = 0 \quad (19)$$

则(17)式变为

$$\frac{L^2(v)v^2}{(1+v)^3} = \frac{D^2b^2}{4a^3} \exp\left[-2\int_0^\tau \frac{1+2c\mu l'(c\mu s)}{l(c\mu s)} ds\right], \quad (20)$$

而(18)式变为

$$\omega(t) = -\frac{Db(1+v)}{2avK(v)L(v)} \exp\left[-\int_0^\tau \frac{1+2c\mu l'(c\mu s)}{l(c\mu s)} ds\right]. \quad (21)$$

这样的修正可以使得首次渐近解变得很精确(参看例3).

3 算 例

例1 考虑当 $\varepsilon = 0.01$, $c = 1$, $\mu = 0.01$, $l(\tau) = 1 + \tau$ 和 $g = 9.8$ 时($\mu = O(\varepsilon)$), 方程(1)为

$$\ddot{\theta} + \varepsilon \frac{3}{1+\varepsilon} \dot{\theta} + \varepsilon^2 \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \theta + \frac{9.8}{1+\varepsilon} \sin \theta = 0, \quad (22)$$

$$\theta(0) = \frac{2}{3}\pi, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad (23)$$

势能(6)是

$$V(\theta_0) = \frac{9.8}{1 + \varepsilon} (1 - \cos\theta_0) \tag{24}$$

我们寻找如下形式的多项式

$$V(\theta) = \frac{1}{2} a(\tau) \theta^2 + \frac{1}{4} b(\tau) \theta^4$$

逼近势能 V 。选择系数 a, b 满足

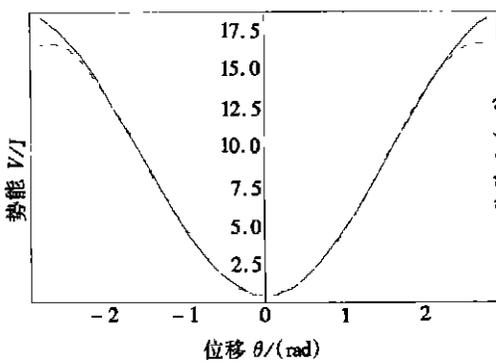
$$V = V \text{ 在 } \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{3} \text{ 和 } \theta = \frac{2\pi}{3},$$

$$V_{\theta} = 0 \text{ 在 } \theta = 0,$$

那么

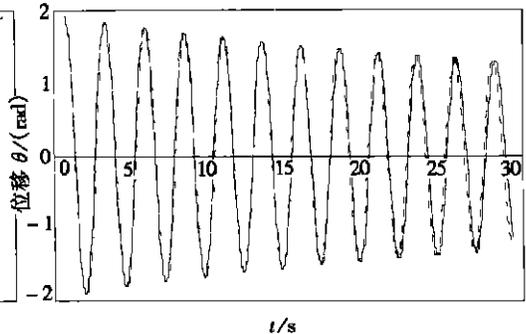
$$V(\theta) = \frac{1}{2} \frac{9.68124}{1 + \tau} \theta^2 - \frac{1}{4} \frac{1.35819}{1 + \tau} \theta^4 \tag{25}$$

图1给出势能(24)和它的逼近(25)的比较,图2给出方程(22)、(23)的数值解和渐近解的比较。渐近解是由(9)~(12)式得到的。本文中,数值解是利用 Mathematica 软件得到的。



—— 势能 V , ----- 势能 V

图1 势能(24)及其逼近(25)



—— 数值解, ----- 渐近解

图2 (22)式的解及其近似

例2 考虑当 $\varepsilon = 0.01, c = 1, \mu = 0.0001, l(\tau) = 1 + \tau$ 和 $g = 9.8$ 时 ($\mu = o(\varepsilon)$), 方程(1)为

$$\ddot{\theta} + \varepsilon \frac{2}{1 + \varepsilon} \dot{\theta} + \varepsilon^2 \frac{1}{1 + \varepsilon} \theta + \varepsilon^3 \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2} \theta + \frac{9.8}{1 + \varepsilon} \sin\theta = 0, \tag{26}$$

$$\theta(0) = \frac{2}{3}\pi, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \tag{27}$$

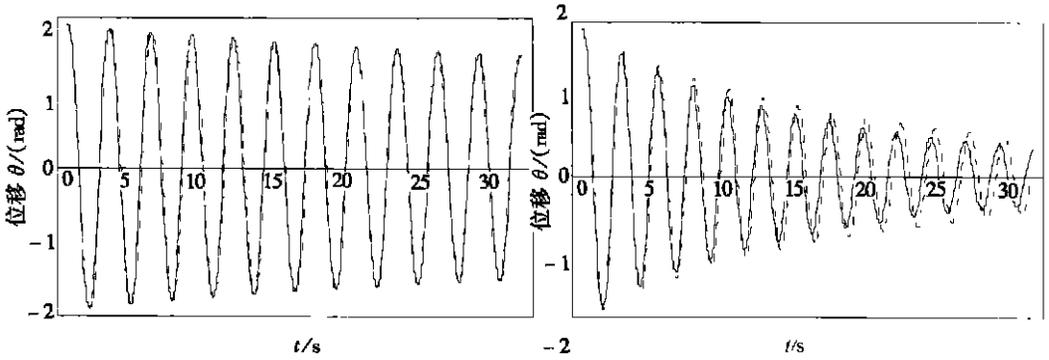
方程(26)、(27)数值解和渐近解的比较在图3给出,渐近解是由(9)、(14)、(15)式得到的。

例3 考虑当 $\varepsilon = 0.01, c = 1, \mu = 0.1, l(\tau) = 1 + \tau$ 和 $g = 9.8$ 时 ($\varepsilon = o(\mu)$), 方程(1)为

$$\ddot{\theta} + \mu \frac{1}{1 + \mu^2 t} \dot{\theta} + \mu^2 \frac{2}{1 + \mu^2 t} \theta + \mu^3 \frac{1}{(1 + \mu^2 t)^2} \theta + \frac{9.8}{1 + \mu^2 t} \sin\theta = 0, \tag{28}$$

$$\theta(0) = \frac{2}{3}\pi, \quad \dot{\theta}(0) = 0 \tag{29}$$

图4给出数值解和由(9)、(17)、(18)式得到的渐近解的比较,图5给出数值解和由(9)、(20)、(21)式得到的渐近解的比较,从中可以清楚地看出修正的多尺度法得到的首次近似解比通常



——数值解, ----- 渐近解

——数值解, ----- 渐近解

图3 (26)式的解及其近似

图4 (28)式的解及式(9), (17), (18)的逼近

的多尺度法得到的解更精确。

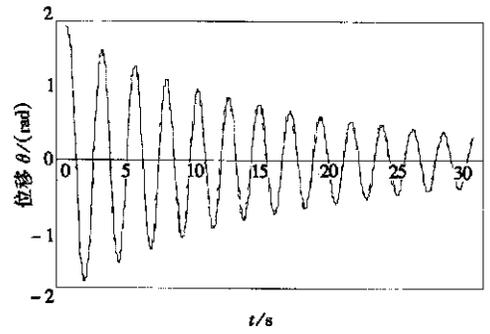
从图 2、3、5 可以看到, 即使振幅达到 $2\pi/3$ 且参数 μ 不是很小时, 用本文得到的结果与数值结果几乎一致。

4 结 论

1) 通过 μ 与 ε 阶的比较的分类, 推导出频率的不同的分析表达式, 因此可以清楚地看到 μ 与 ε 对频率的影响且求得更准确的渐近解。

2) 势能逼近法的应用使结果对大幅振动仍有效。

3) 当摩擦系数 μ 不是很小时, 修正的多尺度法可以得到更精确的首次近似解。



——数值解, ----- 渐近解

图5 (28)式的解及式(9), (20), (21)的逼近

[参 考 文 献]

[1] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillations [M]. New York: Wiley, 1979.

[2] Bogoliubov N N, Mitropolsky Y A. Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations [M]. Delhi: Hindustan Publishing Co, 1961.

[3] Yuste S B. On Duffing oscillators with slowly varying parameters[J]. Internat J Non_Linear Mech, 1991, 26(5): 671—677.

[4] Coppola V T, Rand R H. MACSYMA program to implement averaging using elliptic functions[A]. In: Meyer KR, Schmidt D S Eds. Computer Aided Proofs in Analysis [C]. New York Springer, 1991, 78—81.

[5] LI Yi_ping. Free electron lasers with variable parameter wigglers, a strictly nonlinear oscillator with slowly varying parameters[D]. Ph D Dissertation. Seattle: University of Washington, 1987.

[6] Kuzmak G Z. Asymptotic solutions of nonlinear second order differential equations with variable coefficients[J]. Pure Math Manuscript, 1959, 23: 515—526.

[7] Kevorkian J, Cole J D. Perturbation Methods in Applied Mathematics [M]. New York: Springer, 1981.

- [8] Kevorkian J, Li Y P. Explicit approximations for strictly nonlinear oscillators with slowly varying parameters with applications to free electron lasers[J]. Studies in Applied Mathematics, 1988, 78(2): 111—165.
- [9] 李怡平. 负阻尼周期运动的经过时间[J]. 应用数学和力学, 1992, 13(8): 693—697.

Pendulum With Linear Damping and Variable Length

CAI Jian_ping^{1, 3}, YANG Cui_hong², LI Yi_ping³

(1. Department of Mathematics, Zhangzhou Teachers College,
Zhangzhou, Fujian 363000, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Central China Normal University,
Wuhan 430079, P. R. China;

3. Department of Mathematics, Zhongshan University,
Guangzhou 510275, P. R. China;)

Abstract: The methods of multiple scales and approximate potential are used to study pendulums with linear damping and variable length. According to the order of the coefficient of friction compared with that of the slowly varying parameter of length, three different cases were discussed in details. Asymptotic analytical expressions of amplitude, frequency and solution were obtained. The method of approximate potential makes the results effective for large oscillations. A modified multiple scales method is used to get more accurate leading order approximations when the coefficient friction is not small. Comparisons are also made with numerical results to show the efficiency of the present method.

Key words: pendulum; multiple scale method; approximate potential; slowly varying parameter