应用数学和力学，第5卷第3期（1984年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

一类广义差商的Leibniz公式与Green函数的递推关系*

许 跃 生

（中山大学计算机系，1983年6月27日收到）

摘 要

本文研究具有幂基解组的微分算子所定义的广义差商的Leibniz公式及其格林(Green)函数的递推关系.

一、引 言

定义1 如果微分算子

$$L(D)=D^m+a_{m-1}(x)D^{m-1}+\cdots+a_1(x)D+a_0(x)D^0 \tag{1.1}$$

其中 $a_i(x)\in C^i[a,b]$ $(i=0,1,\cdots,m-1)$，有一个基解组 $\Phi_m=\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ 满足

$$\varphi_k(x)=(\varphi_2(x))^{k-1} \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{1.2}$$

则称 $L(D)$ 为具有幂基解组的微分算子. △

例1 $L(D)=D^m$ 是具有幂基解组

$$1,x,\cdots,x^{m-1} \tag{1.3}$$

的微分算子.

例2 $L(D)=D(D-1)\cdots(D-m+1)$ 是具有幂基解组

$$1,e^x,e^{2x},\cdots,e^{(m-1)x} \tag{1.4}$$

的微分算子.

引理1 设 $L(D)$ 是具有幂基解组 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ 的微分算子，则

i) $\varphi_1(x)=1$ (1.5)

ii) $\varphi_i(x)\varphi_j(x)=\varphi_{i+j-1}(x) \qquad (i+j-1\leqslant m)$ (1.6)

iii) $\varphi_i^{(k)}(x)=\sum_{j=0}^{k}C_k^j\varphi_{i-1}^{(j)}(x)\varphi_2^{(k-j)}(x)$ (1.7)

证明

i) 由 (1.2) 显然有 $\varphi_1(x)=1$

* 李灏推荐.

ii) $\varphi_i(x)\varphi_j(x)=(\varphi_2(x))^{i-1}(\varphi_2(x))^{j-1}=(\varphi_2(x))^{i+j-2}=\varphi_{i+j-1}(x)$

iii) $\varphi_i(x)=\varphi_{i-1}(x)\varphi_2(x)$ △

给定 $[a,b]$ 中的一组点 $\{t_i\}_{i=1}^m$

$$a\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_m\leqslant b \tag{1.8}$$

或者记为

$$a\leqslant \underbrace{x_1=\cdots=x_1}_{m_1}<\cdots<\underbrace{x_k=\cdots=x_k}_{m_k}\leqslant b,\qquad \sum_{i=1}^{k}m_i=m \tag{1.9}$$

令 $X_m=\text{span}\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)\}$，$f(x)\in C^{\max\{m_i\}-1}[a,b]$。

定义 2 如果 $H(x)\in X_m$，满足

$$H^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i)\qquad (j=0,1,\cdots,m_i-1;\ i=1,2,\cdots,k) \tag{1.10}$$

则称 $H(x)$ 为 $f(x)$ 的 m 阶广义 Hermite 插值。

定义 3 如果$\Phi_m(x)=\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ 是 $[a,b]$ 上的 ECT 系统，称$f(x)$的m阶广义Hermite插值$H(x)$的$\varphi_m(x)$的系数为$f(x)$在 $t_1,\cdots,t_m$点上的 $m-1$ 阶广义差商．记为 $[t_1,\cdots,t_m]_{\Phi_m}f$。

引理 2[1] 若$\Phi_m=\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ 是 $[a,b]$上的ET系统，则广义Hermite插值问题(1.10)的解存在且唯一；若 $\Phi_m=\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ 是 $[a,b]$ 上的 ECT 系统，则

$$H(x)=\sum_{j=1}^{m}\psi_j(x)[t_1,\cdots,t_j]_{\Phi_j}f \tag{1.11}$$

其中

$$\psi_j(x)=\frac{\det\begin{pmatrix}t_1,\cdots, & t_{j-1}, & x\\ \varphi_1,\cdots, & \varphi_{j-1}, & \varphi_j\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}t_1, & \cdots, & t_{j-1}\\ \varphi_1,\cdots, & \varphi_{j-1}\end{pmatrix}},\quad \Phi_j=\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^j \tag{1.12}$$

△

引理 3 设 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$ 和 $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^m$ 都是 $[a,b]$ 上的 ECT 系统，存在$A=(a_{ij})_{m\times m}$，$\det A\neq 0$，使得

$$\varphi=A\psi \tag{1.13}$$

其中，$\varphi=(\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x))^T$，$\psi=(\psi_1(x),\cdots,\psi_m(x))^T$．令

$$\Phi_i=\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^i,\quad \Psi_i=\{\psi_k(x)\}_{k=1}^i\qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

则

$$\begin{aligned}[t_1,\cdots,t_m]_{\Psi_m}f=&[t_1,\cdots,t_m]_{\Phi_m}f\sum_{j=1}^{m}a_{jm}a_{mj}\\ &+\sum_{l=1}^{m-1}\{[t_1,\cdots,t_l]_{\Phi_l}f\cdot a_{lm}+\sum_{j=l+1}^{m-1}[t_1,\cdots,t_j]_{\Phi_j}f a_{jl}a_{lm}\}\end{aligned} \tag{1.14}$$

其中

$$a_{jl}=(-1)^{l+j}\frac{\det\begin{pmatrix}t_1, & \cdots, & t_{j-1}\\ \varphi_1,\cdots,\varphi_{l-1},\varphi_{l+1},\cdots,\varphi_j\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}t_1, & \cdots, & t_{j-1}\\ \varphi_1, & \cdots, & \varphi_{j-1}\end{pmatrix}} \tag{1.15}$$

证明　由于$\varphi=A\psi$且$\det A\neq 0$，所以

$$\mathrm{span}\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_m(x)\}=\mathrm{span}\{\psi_1(x),\cdots,\psi_m(x)\}=X_m$$

设$H(x)\in X_m$且满足(1.10)，由引理2，有(1.11)，即

$$H(x)=\sum_{j=1}^{m}[t_1,\cdots,t_j]_{\Phi_j}f\left(\varphi_j(x)+\sum_{l=1}^{j-1}a_{jl}\varphi_l(x)\right) \tag{1.16}$$

由$\varphi=A\psi$，有

$$H(x)=\sum_{j=1}^{m}[t_1,\cdots,t_j]_{\Phi_j}f\left(\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\psi_k(x)+\sum_{l=1}^{j-1}a_{jl}\sum_{k=1}^{m}a_{lk}\psi_k(x)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}[t_1,\cdots,t_j]_{\Phi_j}f\sum_{k=1}^{m}a_{jk}\psi_k(x)$$

$$+\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{j=l+1}^{m}[t_1,\cdots,t_j]_{\Phi_j}fa_{jl}\sum_{k=1}^{m}a_{lk}\psi_k(x)$$

由插值问题(1.10)解的唯一性，有

$$H(x)=\sum_{j=1}^{m}[t_1,\cdots,t_j]_{\Psi_j}f\left(\psi_j(x)+\sum_{l=1}^{j-1}\tilde{a}_{jl}\psi_l(x)\right)$$

其中

$$\tilde{a}_{jl}=(-1)^{l+j}\frac{\det\begin{pmatrix}t_1, & \cdots, & t_{j-1}\\ \psi_1,\cdots,\psi_{l-1},\psi_{l+1},\cdots,\psi_j\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}t_1, & \cdots, & t_{j-1}\\ \psi_1, & \cdots, & \psi_{j-1}\end{pmatrix}}$$

所以

$$[t_1,\cdots,t_m]_{\Psi_m}f=\sum_{j=1}^{m}[t_1,\cdots,t_j]_{\Phi_j}fa_{jm}+\sum_{l=1}^{m-1}\sum_{j=l+1}^{m}[t_1,\cdots,t_j]_{\Phi_j}fa_{jl}a_{lm}$$

$$=[t_1,\cdots,t_m]_{\Phi_m}f\sum_{j=1}^{m}a_{jm}a_{mj}+\sum_{l=1}^{m-1}\Big\{[t_1,\cdots,t_l]_{\Phi_l}fa_{lm}$$

$$+\sum_{j=l+1}^{m-1}[t_1,\cdots t_j]_{\Phi_j}fa_{jl}a_{lm}\Big\}$$

△

二、Leibniz公　式

定理1　设$L(D)$的基解组$\Phi_m=\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$是$[a,b]$上的ECT系统且满足(1.2)，$f(x)$，$g(x)\in C^{\max\{m_i\}-1}[a,b]$，则

$$[t_1,\cdots,t_m]_{\Phi_m}(fg)=\sum_{i=1}^{m}[t_1,\cdots,t_i]_{\Phi_i}f[t_i,\cdots,t_m]_{\Phi_{m-i+1}}g \tag{2.1}$$

证明 考察函数

$$p(x)=\sum_{j=1}^{m}u_j(x)[t_1,\cdots,t_j]_{\Phi}f\sum_{j=1}^{m}v_j(x)[t_j,\cdots,t_m]_{\Phi_{m-j+1}}g$$

其中

$$u_j(x)=\frac{\det\begin{pmatrix}t_1, & \cdots, & t_{j-1}, & x\\ \varphi_1, & \cdots, & \varphi_{j-1}, & \varphi_j\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}t_1, & \cdots, & t_{j-1}\\ \varphi_1, & \cdots, & \varphi_{j-1}\end{pmatrix}}$$

$$v_j(x)=\frac{\det\begin{pmatrix}t_{j+1}, & \cdots, & t_m, & x\\ \varphi_1, & \cdots, & \varphi_{m-j}, & \varphi_{m+1-j}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}t_{j+1}, & \cdots, & t_m\\ \varphi_1, & \cdots, & \varphi_{m-j}\end{pmatrix}}$$

我们约定：i）如果 $t_1=\cdots=t_m$，则 $p(t_i):=p^{(i-1)}(t_i)$；

ii）如果 $t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{i-\mu-1}<t_{i-\mu}=\cdots=t_i\leqslant t_{i+1}\leqslant\cdots\leqslant t_m$，则 $p(t_i):=p^{(\mu)}(t_i)$。

令

$$H_f(x)=\sum_{j=1}^{m}u_j(x)[t_1,\cdots,t_j]_{\Phi_j}f$$

$$H_g(x)=\sum_{j=1}^{m}v_j(x)[t_j,\cdots,t_m]_{\Phi_{m-j+1}}g$$

由引理2知 $H_f(x)$ 是 $f(x)$ 的 m 阶广义Hermite插值，$H_g(x)$ 是 $g(x)$ 的 m 阶广义Hermite 插值.所以

$$p^{(j)}(x_i)=\sum_{k=0}^{j}C_j^kH_f^{(k)}(x_i)H_g^{(j-k)}(x_i)=\sum_{k=0}^{j}C_j^kf^{(k)}(x_i)g^{(j-k)}(x_i)$$

$$=(f(x)g(x))^{(j)}\Big|_{x=x_i}\qquad(j=0,1,\cdots,m_i-1;\ i=1,2,\cdots,k)$$

但是

$$p(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}u_i(x)v_j(x)[t_1,\cdots,t_i]_{\Phi_i}f[t_j,\cdots,t_m]_{\Phi_{m-j+1}}g$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{j}+\sum_{i=j+1}^{m}\right)u_i(x)v_j(x)[t_1,\cdots,t_i]_{\Phi_i}f[t_j,\cdots,t_m]_{\Phi_{m-j+1}}g$$

由于 $(u_l(x)v_j(x))^{(\nu)}\Big|_{x=x_i}=\sum_{k=0}^{\nu}C_\nu^k u_l^{(k)}(x_i)v_j^{(\nu-k)}(x_i)=0$

$(\nu=0,1,\cdots,m_i-1;\ i=1,2,\cdots,k;\ l=j+1,\cdots,m)$

记
$$H(x)=\sum_{i=1}^{j}u_i(x)v_j(x)[t_1,\cdots,t_i]_{\Phi}f[t_j,\cdots,t_m]_{\Phi_{m-j+1}}g$$

则
$$H^{(j)}(x_i)=(f(x_i)g(x_i))^{(j)}\qquad(j=0,1,\cdots,m_i-1,\ i=1,2,\cdots,k)$$

注意到
$$u_j(x)=\varphi_j(x)+\sum_{l=1}^{j-1}\alpha_{jl}\varphi_l(x),\quad v_j(x)=\varphi_{m-j+1}(x)+\sum_{l=1}^{m-j}\beta_{jl}\varphi_l(x)$$

其中
$$\beta_{jl}=(-1)^{m+l+1-j}\frac{\det\begin{pmatrix}t_{j+1}, & \cdots, & t_m\\ \varphi_1,\cdots,\varphi_{l-1},\varphi_{l-1},\cdots,\varphi_{m-j+1}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}t_{j+1}, & \cdots, & t_m\\ \varphi_1, & \cdots, & \varphi_{m-j}\end{pmatrix}}$$

所以，对$i=1,2,\cdots,j$，由引理1
$$u_i(x)v_j(x)=\varphi_{m+i-j}(x)+\sum_{l=1}^{m-j}\beta_{jl}\varphi_{i+l-1}(x)+\sum_{l=1}^{i-1}\alpha_{il}\varphi_{l+m-j}(x)$$
$$+\sum_{l=1}^{i-1}\sum_{k=1}^{m-j}\alpha_{il}\beta_{jk}\varphi_{k+l-1}(x)\in X_{i+m-j}\subseteq X_m$$

因此，由引理2，$H(x)$是$f(x)g(x)$的m阶广义Hermite插值，由差商的定义3，便得到(2 1)．

△

注　取$L(D)=D^m$，定理1的(2.1)式就是一般重节点差商的Leibniz公式，因此，定理1是通常的重节点差商的Leibniz公式的推广．

定理2　设$L(D)$是具有幂基解组的微分算子，$\Phi_m=\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^m$是$L(D)$的幂基解组，$\Psi_m=\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^m$是$L(D)$的另一基解组，$\Phi_m$和$\Psi_m$均是$[a,b]$上的ECT系统且$\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_k(x)\}$与$\{\psi_1(x),\cdots,\psi_k(x)\}$ $(k=1,2,\cdots,m)$等价，即
$$\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\\ \vdots\\ \varphi_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & & & 0\\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \vdots\\ \psi_m\end{bmatrix}\qquad(a_{ii}\neq0,\ i=1,2,\cdots,m)$$

则对于$\forall f(x),\ g(x)\in C^{\max\{m_i\}-1}[a,b]$有
$$[t_1,t_2,\cdots,t_m]_{\Psi_m}(fg)=a_{mm}\sum_{i=1}^{m}a_{ii}^{-1}a_{m-i+1,m-i+1}^{-1}[t_1,\cdots,t_i]_{\Psi_i}f[t_i,\cdots,t_m]_{\Psi_{m+1-i}}g\tag{2.2}$$

证明　由引理3，
$$[t_1,\cdots,t_m]_{\Psi_m}(fg)=a_{mm}[t_1,\cdots,t_m]_{\Phi_m}(fg)$$

由定理1，

$$[t_1,\cdots,t_m]_{\psi_m}(fg)=a_{mm}\sum_{i=1}^{m}[t_1,\cdots,t_i]_{\Phi_i}f[t_i,\cdots,t_m]_{\Phi_{m-i+1}}g$$

从而得到(2.2)。 △

三、格林（Green）函数的递推关系

定理3 设$L_k(D)$是具有幂基解组$\Phi_k=\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{k}(k=1,2,\cdots,m)$的微分算子，$G_k(x,t)$是$L_k(D)$的Green函数，则

$$\left.\begin{aligned}&G_1(x,t)=(x-t)_+^0\\&G_k(x,t)=G_{k-1}(x,t)\frac{\varphi_2(x)-\varphi_2(t)}{(k-1)\varphi_2'(t)}\qquad(k=2,3,\cdots,m)\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

证明 显然 $G_1(x,t)=(x-t)_+^0$

设$F_k(x,t)=G_{k-1}(x,t)\dfrac{\varphi_2(x)-\varphi_2(t)}{(k-1)\varphi_2'(t)}$，我们证明$F_k(x,t)$满足$L_k(D)$的Green函数定义的条件。对任意指定的$t\in[a,b]$，有：

i) $F_k(x,t)=0\qquad(a\leqslant x<t)$

ii) $L_k(D)F_k(x,t)=L_k(D)\,G_{k-1}(x,t)\dfrac{\varphi_2(x)-\varphi_2(t)}{(k-1)\varphi_2'(t)}$

$$=L_k(D)\frac{\begin{vmatrix}\varphi_1(t)&\varphi_2(t)&\cdots\cdots&\varphi_{k-1}(t)\\\varphi_1'(t)&\varphi_2'(t)&\cdots\cdots&\varphi_{k-1}'(t)\\\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots\\\varphi_1^{(k-3)}(t)&\varphi_2^{(k-3)}(t)&\cdots\cdots&\varphi_{k-1}^{(k-3)}(t)\\\varphi_2(x)-\varphi_2(t)\varphi_1(x)&\varphi_3(x)-\varphi_2(t)\varphi_2(x)&\cdots\cdots&\varphi_k(x)-\varphi_2(t)\varphi_{k-1}(x)\end{vmatrix}}{(k-1)\varphi_2'(t)\det(W(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{k-1}(t)))}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}\varphi_1(t)&\cdots\cdots&\varphi_{k-1}(t)\\\varphi_1'(t)&\cdots\cdots&\varphi_{k-1}'(t)\\\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots\\\varphi_1^{(k-3)}(t)&\cdots\cdots&\varphi_{k-1}^{(k-3)}(t)\\L_k(D)\varphi_2(x)-\varphi_2(t)L_k(D)\varphi_1(x)&\cdots\cdots&L_k(D)\varphi_k(x)-\varphi_2(t)L_k(D)\varphi_{k-1}(x)\end{vmatrix}}{(k-1)\varphi_2'(t)\det(W(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{k-1}(t)))}$$

$=0\qquad(t\leqslant x<b)$

iii) $D_+^jF_k(x,t)|_{x=t}=\left[\dfrac{\varphi_2(x)-\varphi_2(t)}{(k-1)\varphi_2'(t)}D_+^jG_{k-1}(x,t)+G_{k-1}(x,t)\dfrac{\varphi_2^{(j)}(x)}{(k-1)\varphi_2'(t)}\right]_{x=t}$

$=0\qquad(j=0,1,\cdots,k-2)$

$$D_+^{k-1}F_k(x,t)|_{x=t}=\frac{\begin{vmatrix}\varphi_1(t)&\cdots\cdots&\varphi_{k-1}(t)\\\varphi_1'(t)&\cdots\cdots&\varphi_{k-1}'(t)\\\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots\\\varphi_1^{(k-3)}(t)&\cdots\cdots&\varphi_{k-1}^{(k-3)}(t)\\\varphi_2^{(k-1)}(t)-\varphi_2(t)\varphi_1^{(k-1)}(t)&\cdots\cdots&\varphi_k^{(k-1)}(t)-\varphi_2(t)\varphi_{k-1}^{(k-1)}(t)\end{vmatrix}}{(k-1)\varphi_2'(t)\det(W(\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{k-1}(t)))}$$

由引理1中iii),

$$\varphi_i^{(k-1)}(t)=\varphi_2(t)\varphi_{i-1}^{(k-1)}(t)+(k-1)\varphi_2'(t)\varphi_{i-1}^{(k-2)}(t)+\sum_{j=0}^{k-3}C_{k-1}^{j}\varphi_{i-1}^{(j)}(t)\varphi_2^{(k-j-1)}(t)$$

所以

$$D_+^{k-1}F_k(x,t)|_{x=t}=\frac{\begin{vmatrix}\varphi_1(t) & \cdots\cdots & \varphi_{k-1}(t)\\ \varphi_1'(t) & \cdots\cdots & \varphi_{k-1}'(t)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \varphi_1^{(k-3)}(t) & \cdots\cdots & \varphi_{k-1}^{(k-3)}(t)\\ (k-1)\varphi_2'(t)\varphi_1^{(k-2)}(t) & \cdots\cdots & (k-1)\varphi_2'(t)\varphi_{k-1}^{(k-2)}(t)\end{vmatrix}}{(k-1)\varphi_2'(t)\det(W(\varphi_1(t),\cdots\cdots,\varphi_{k-1}(t)))}=1 \qquad \triangle$$

定理4 在定理3的条件下,

$$G_k(x,t)=\frac{(x-t)_+^0}{(k-1)!}\left[\frac{\varphi_2(x)-\varphi_2(t)}{\varphi_2'(t)}\right]^{k-1} \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{3.2}$$

证明 由定理3, $G_1(x,t)=(x-t)_+^0$, 定理对$k=1$成立. 设定理对$k=m-1$成立, 即

$$G_{m-1}(x,t)=\frac{(x-t)_+^0}{(m-2)!}\left[\frac{\varphi_2(x)-\varphi_2(t)}{\varphi_2'(t)}\right]^{m-2}$$

当$k=m$时, 由定理3,

$$G_m(x,t)=G_{m-1}(x,t)\frac{\varphi_2(x)-\varphi_2(t)}{(m-1)\varphi_2'(t)}=\frac{(x-t)_+^0}{(m-1)!}\left[\frac{\varphi_2(x)-\varphi_2(t)}{\varphi_2'(t)}\right]^{m-1} \qquad \triangle$$

推论1 算子D^k的Green函数为

$$G_k(x,t)=\frac{(x-t)_+^{k-1}}{(k-1)!} \qquad (k=1,2,\cdots,m) \tag{3.3}$$

△

推论2 算子$L_k(D)=D(D-1)\cdots(D-k+1)$的Green函数

$$G_k(x,t)=\frac{(x-t)_+^0(e^{(x-t)}-1)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{3.4}$$

△

推论3 $L_m^*(D)y(t)=0$的一基解组为

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j}G_m(x,t)|_{x=b}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^j}{\partial x^j}\left[\frac{\varphi_2(x)-\varphi_2(t)}{\varphi_2'(t)}\right]^{m-1}\Bigg|_{x=b} \tag{3.5}$$

其中$L_m^*(D)$是$L_m(D)$的共轭算子. △

我们知道, 有了$L_m(D)$的Green函数, 又有了$L_m^*(D)$的基解组, 那么$L_m(D)$的B样条函数实际上就给出了.

本文得到了我的导师黄友谦副教授的指导, 特此致谢.

参 考 文 献

[1] Schumaker. L. L., *Spline Function*: Basic Theory, New York. (1981).

[2] de Boor, Carl, *A Practical Guide to Splines*, New York, (1978)

[3] 李岳生, δ函数、格林函数与样条函数, 中山大学自然科学论文选(1955—1978).

Leibniz' Formula of Generalized Difference with Respect to a Class of Differential Operators and Recurrence Formula of Their Green's Function

Xu Yue-sheng

(Department of Computer Science, Zhongshang University, Guangzhou)

Abstract

In this paper, Leibniz' formula of generalized divided difference with respect to a class of differential operators whose basic sets of solutions have power form has been considered. The recurrence formula of Green function about the operators has also been given.