应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

梯形板弯曲问题的康托洛维奇解*

谢秀松　　王　磊

（湖南大学，1983年3月10日收到）

摘　要

在康托洛维奇对矩形板弯曲问题的有效近似解的基础上，本文进一步探讨了在不同边界条件下的梯形板弯曲问题的康氏解法．将板的位移用一级近似位移函数 $w(x,y)=u(x,y)v(y)$ 表示，式中，在x方向的位移采用广义梁函数，用最小势能原理建立起对应于不同边界条件下的关于 y 方向位移函数$v(y)$的变系数常微分方程，求解微分方程，并利用边界条件，求出 $v(y)$ 的精确解，从而可得到近似程度较高的梯形板弯曲问题的解．

一、前　　言

康托洛维奇近似变分法，用来处理多变量函数的泛函变分问题，是一种行之有效的方法，文献[1]对此法作了较详尽的阐述．由于康法的近似函数的一部份，是通过欧拉方程求得的严格解，因此，比立兹法（完全不满足欧拉方程）的解要精确得多．文献[2]也介绍了康法，并对平面应力问题及矩形板弯曲问题推导了有限条解法，由于在条的长度方向采用了常微分方程解，因而比Y．K．Cheung采用的振动梁函数解法要精确得多．康氏解法在力学近似解法中占有重要的地位．

康托洛维奇近似变分法用于解板的弯曲问题，目前所见仅限于矩形板．由于实际的需要，本文进一步介绍康法在梯形板问题中的应用，这种型式的板比矩形板的求解，边界条件要复杂得多，寻求行之有效的解，在理论上和实际应用上都是很有意义的．

二、梯形板分析

梯形板的形状、尺寸如图1所示，受垂直于板面的均布荷载q，斜边上任意一点的x坐标为$ky+a$，$k=\mathrm{tg}\varphi$．

1．位移函数

用康氏法求板的位移，采用的一级近似位移函数为：

$$w(x,y)=u(x,y)v(y) \tag{2.1}$$

* 钱伟长推荐．

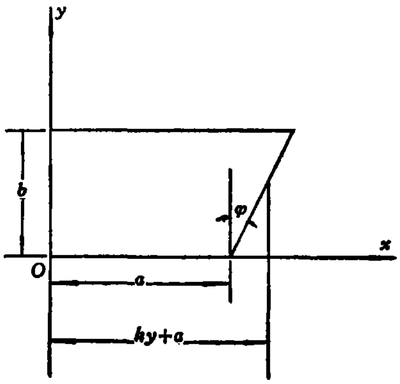

图 1

式中 x 方向的位移函数 $u(x,y)$ 采用广义梁函数，今按不同支承情况分别给出如下：

1）两边固支

$$u(x,y)=x^4-2x^3(ky+a)+x^2(ky+a)^2 \tag{2.2a}$$

2）两边简支

$$u(x,y)=x^4-2x^3(ky+a)+x(ky+a)^3 \tag{2.2b}$$

3）左边简支，右边固支

$$u(x,y)=2x^4-3x^3(ky+a)+x(ky+a)^3 \tag{2.2c}$$

4）左边固支，右边简支

$$u(x,y)=2x^4-5x^3(ky+a)+3x^2(ky+a)^2 \tag{2.2d}$$

5）左边固支，右边自由

$$u(x,y)=x^4-4x^3(ky+a)+6x^2(ky+a)^2 \tag{2.2e}$$

y 方向的位移函数 $v(y)$ 是未知的，有待确定。

2. 梯形板的泛函

如果板不包含自由边，其泛函为

$$\Pi=\frac{D}{2}\int_0^b\int_0^{ky+a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 dxdy-\int_0^b\int_0^{ky+a} qwdxdy \tag{2.3}$$

如果板有自由边，其泛函为

$$\Pi=\frac{D}{2}\int_0^b\int_0^{ky+a}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2-2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dxdy$$
$$-\int_0^b\int_0^{ky+a} qwdxdy \tag{2.4}$$

将式（2.1）代入式（2.3），（2.4），分别得到

$$\Pi=\frac{D}{2}\int_0^b\int_0^{ky+a}[(u_{xx}+u_{yy})^2v^2+4u_y^2v'^2+u^2v''^2+4(u_{xx}+u_{yy})u_yvv'$$
$$+2(u_{xx}+u_{yy})uvv''+4u_yuv'v'']dxdy-\int_0^b\int_0^{ky+a} quvdxdy \tag{2.5}$$

及

$$\Pi=\frac{D}{2}\int_0^b\int_0^{ky+a}[(u_{xx}+u_{yy})^2v^2+4u_y^2v'^2+u^2v''^2+4(u_{xx}+u_{yy})u_yvv'$$
$$+2(u_{xx}+u_{yy})uvv''+4u_yuv'v'']dxdy-D(1-\mu)\int_0^b\int_0^{ky+a}[(u_{xx}u_{yy}$$
$$-u_{xy}^2)v^2+2(u_{xx}u_y-u_{xy}u_x)vv'-u_x^2v'^2+u_{xx}uvv'']dxdy-\int_0^b\int_0^{ky+a} quvdxdy \tag{2.6}$$

将式(2.2a)，(2.2b)，…，(2.2e) 代入式（2.5）或（2.6），可得到泛函的具体表达式为：

$$\Pi=\frac{D}{2}\int_0^b[A(ky+a)^5v^2+B(ky+a)^7v'^2+C(ky+a)^9v''^2+E(ky+a)^6vv'$$
$$+F(ky+a)^7vv''+G(ky+a)^8v'v'']dy-Hq\int_0^b(ky+a)^5vdy \tag{2.7}$$

表1

序号	系数 $A,B,\cdots,M$ ／ 边界情况 ／ 积分式	两对边固支	两对边简支	左边简支，右边固支	右边固支，左边简支	左边简支，右边自由
1	$\int_0^{ky+a}(u_{xx}+u_{yy})dx=A(ky+a)^5$	$4\left[\frac{1}{5}(k^2+6)^2-\frac{7}{3}\times(k^2+6)+7\right]$	$36\left[\frac{1}{3}(k^2-2)^2+(k^2-2)+\frac{4}{5}\right]$	$36\left[\frac{1}{3}(k^2-3)^2+2(k^2-3)+\frac{16}{5}\right]$	$36\left[\frac{1}{5}(k^2+4)^2-\frac{11}{6}(k^2+4)+\frac{13}{3}\right]$	$144\left[\frac{1}{5}(k^2+1)^2-\frac{1}{3}(k^2+1)+\frac{1}{3}\right]$
2	$\int_0^{ky+a}4u_y^2\,dx=B(ky+a)^7$	$\frac{16}{105}k^2$	$\frac{164}{35}k^2$	$\frac{96}{35}k^2$	$\frac{108}{35}k^2$	$\frac{2112}{35}k^2$
3	$\int_0^{ky+a}u^2dx=C(ky+a)^9$	$\frac{1}{630}$	$\frac{31}{630}$	$\frac{19}{630}$	$\frac{19}{630}$	$\frac{104}{45}$
4	$\int_0^{ky+a}4(u_{xx}+u_{yy})u_y dx=E(ky+a)^6$	$4k\left[\frac{2}{15}(k^2+6)-\frac{13}{15}\right]$	$24k\left[\frac{3}{5}(k^2-2)+\frac{5}{6}\right]$	$24k\left[\frac{2}{5}(k^2-3)+1\right]$	$12k\left[\frac{11}{15}(k^2+4)-\frac{7}{2}\right]$	$96k\left[\frac{13}{15}(k^2+1)-\frac{7}{10}\right]$
5	$\int_0^{ky+a}2(u_{xx}+u_{yy})udx=F(ky+a)^7$	$4\left[\frac{1}{105}(k^2+6)-\frac{1}{15}\right]$	$6\left[\frac{1}{5}(k^2-2)+\frac{5}{21}\right]$	$12\left[\frac{1}{15}(k^2-3)+\frac{1}{7}\right]$	$2\left[\frac{11}{35}(k^2+4)-\frac{8}{5}\right]$	$8\left[\frac{71}{35}(k^2+1)-\frac{8}{5}\right]$
6	$\int_0^{ky+a}4u_y u dx=G(ky+a)^8$	$\frac{1}{35}k$	$\frac{31}{35}k$	$\frac{19}{35}k$	$-\frac{19}{35}k$	$\frac{118}{5}k$
7	$\int_0^{ky+a}udx=H(ky+a)^5$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{5}$
8	$\int_0^{ky+a}(u_{xx}u_{yy}-u_{xy}^2)dx=I(ky+a)^5$	$-\frac{2}{5}k^2$	$-\frac{51}{5}k^2$	$-\frac{36}{5}k^2$	$-\frac{36}{5}k^2$	$-72k^2$
9	$\int_0^{ky+a}2(u_{xx}u_y-u_{xy}u_x)dx=J(ky+a)^6$	$-\frac{4}{15}k$	$-\frac{34}{5}k$	$-\frac{24}{5}k$	$-\frac{24}{5}k$	$-48k$
10	$\int_0^{ky+a}u_x^2\,dx=L(ky+a)^7$	$\frac{2}{105}$	$\frac{17}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{72}{7}$
11	$\int_0^{ky+a}u_{xx}udx=M(ky+a)^7$	$-\frac{2}{105}$	$-\frac{17}{35}$	$-\frac{12}{35}$	$-\frac{12}{35}$	$\frac{12}{7}$

或

$$\Pi=\frac{D}{2}\int_0^b[A(ky+a)^5v^2+B(ky+a)^7v'^2+C(ky+a)^9v''^2+E(ky+a)^6vv'$$

$$+F(ky+a)^7vv''+G(ky+a)^8v'v'']dy-Hq\int_0^b(ky+a)^5vdy$$

$$-D(1-\mu)\int_0^b[I(ky+a)^5v^2+J(ky+a)^6vv'-L(ky+a)^7v'^2$$

$$+M(ky+a)^7vv'']dy \tag{2.7a}$$

式中系数A,B,C,E,F,G,H,I,J,L,M见表1.

3. 最小势能原理的应用

(Ⅰ) 建立关于$v(y)$的变系数常微分方程

设泛函Π中积分号内的函数为$f(y,v,v',v'')$，此函数对于$v^{(n)}$ $(n=0,1,2)$是$n+2$阶可微的，泛函式(2.7)的欧拉-泊松方程是

$$\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial v'}+\frac{d^2}{dy^2}\frac{\partial f}{\partial v''}=0 \tag{2.8}$$

将式(2.7)代入(2.8)，于是欧拉-泊松方程为:

$$\Big[(ky+a)^4v^{(4)}+18k(ky+a)^3v^{(3)}+\left(\frac{F-B+4kG}{C}+72k^2\right)(ky+a)^2v''$$

$$+7k\frac{F-B+4kG}{C}(ky+a)v'+\frac{A-3kE+21k^2F}{C}v\Big]-2(1-\mu)\Big[\frac{L+M}{C}(ky$$

$$+a)^2v''+7k\frac{L+M}{C}(ky+a)v'+\frac{I-3Jk+21k^2M}{C}v\Big]=\frac{Hq}{CD} \tag{2.9}$$

只要将上表中有关的系数代入式(2.9)，可以看出，当梯形板中不包含自由边时，式中左边第二个方括号中诸项的系数均为零，欧拉-泊松方程为

$$(ky+a)^4v^{(4)}+18k(ky+a)^3v^{(3)}+\left(\frac{F-B+4kG}{C}+72k^2\right)(ky+a)^2v''$$

$$+7k\frac{F-B+4kG}{C}(ky+a)v'+\frac{A-3kF+21k^2F}{C}v=\frac{Hq}{CD} \tag{2.10}$$

今写出以下三种边界情况的常微分方程:

1) 两对边固支

$$(ky+a)^4v^{(4)}+18k(ky+a)^3v^{(3)}+(72k^2-24)(ky+a)^2v''$$

$$-168k(ky+a)v'+168(k^2+3)=21\frac{q}{D} \tag{2.11}$$

2) 两对边简支

$$(ky+a)^4v^{(4)}+18k(ky+a)^3v^{(3)}+(73.1613k^2-19.7419)(ky+a)^2v''$$

$$-(8.129k^3-138.1935k)(ky+a)v'-146.3226v=4.0645\frac{q}{D} \tag{2.12}$$

3) 左边固支，右边自由(取$\mu=0.3$)

$$(ky+a)^4v^{(4)}+18k(ky+a)^3v^{(3)}+(93.7582k^2-5.7857)(ky+a)^2v''$$

$$+(152.3077k^2-40.5)k(ky+a)v'+(51.9231k^4+7.2692k^2+12.4615)v$$

$$=0.5192\frac{q}{D} \tag{2.13}$$

将

$$\begin{cases} v=\left(\dfrac{ky+a}{kb+a}\right)^n \\ v'=n\left(\dfrac{k}{kb+a}\right)\left(\dfrac{ky+a}{kb+a}\right)^{n-1} \\ v''=n(n-1)\left(\dfrac{k}{kb+a}\right)^2\left(\dfrac{ky+a}{kb+a}\right)^{n-2} \\ v^{(3)}=n(n-1)(n-2)\left(\dfrac{k}{kb+a}\right)^3\left(\dfrac{ky+a}{kb+a}\right)^{n-3} \\ v^{(4)}=n(n-1)(n-2)(n-3)\left(\dfrac{k}{kb+a}\right)^4\left(\dfrac{ky+a}{kb+a}\right)^{n-4} \end{cases}$$

代入式（2.11）～（2.13）相应的齐次式中，可得到上述三种边界情况的微分方程的特征方程，并可求得特征根（见表 2）。由于特征根的性质与 k 值无关，此处取 $k=1$（即 $\varphi=45^\circ$）。

表 2

边界情况	特征方程	特征根	
两对边固支	$n^4+12n^3+5n^2-162n+672=0$	$n_2^1=-8.2681\pm1.4538i$ $n_4^3=2.2681\pm2.0956i$	$\alpha_1=-8.2681$ $\beta_1=1\ 4538$ $\alpha_2=2.2681$ $\beta_2=2.0956$
两对边简支	$n^4+12n^3+10.4194n^2-153.4839n-146.3226=0$	$n_1=3.2765$ $n_3=-0.9540$	$n_2=-9.2765$ $n_4=-5.0460$
左边固支 右边简支	$n^4+12n^3+44.9725n^2+53.8362n+71.6538=0$	$n_2^1=-5.5577\pm1.3537$ $n_4^3=-0.4423\pm1.4296$	$\alpha_1=-5.5577$ $\beta_1=1.3537$ $\alpha_2=-0.4423$ $\beta_2=1.4296$

由此可求出微分方程的齐次解，当

两对边固支及左边固支右边自由时，齐次解为

$$v(y)=\exp(\alpha_1 t)(c_1\cos\beta_1 t+c_2\sin\beta_1 t)+\exp(\alpha_2 t)(c_3\cos\beta_2 t+c_4\sin\beta_2 t)$$

两对边简支时，齐次解为

$$v(y)=c_1\exp(n_1 t)+c_2\exp(n_2 t)+c_3\exp(n_3 t)+c_4\exp(n_4 t)$$

式(2.11)～(2.13)的特解分别为：

$$b_0=0.03125\frac{q}{D};\quad b_0=-0.02778\frac{q}{D};\quad b_0=0.007246\frac{q}{D}$$

三种边界情况下的位移方程为

1）两对边固支

$$w(x,y)=u(x,y)v(y)=[x^4-2x^3(y+a)+x^2(y+a)^2]\Big[\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{\alpha_1}\Big(c_1\cos\beta_1\ln\frac{y+a}{b+a}$$

$$+c_2\sin\beta_1\ln\frac{y+a}{b+a}\Big)+\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{\alpha_2}\Big(c_3\cos\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a}+c_4\sin\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a}\Big)$$

$$+0.03125\frac{q}{D}\Big] \tag{2.14}$$

2) 两对边简支

$$w(x,y)=u(x,y)v(y)=[x^4-2x^3(y+a)+x(y+a)^3]\Big[c_1\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{n_1}+c_2\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{n_2}$$

$$+c_3\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{n_3}+c_4\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{n_4}-0.02778\frac{q}{D}\Big] \tag{2.15}$$

3) 左边固支，右边自由

$$w(x,y)=u(x,y)v(y)=[x^4-4x^3(y+a)+6x^2(y+a)^2]\Big[\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{\alpha_1}\Big(c_1\cos\beta_1\ln\frac{y+a}{b+a}$$

$$+c_2\sin\beta_1\ln\frac{y+a}{b+a}\Big)+\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{\alpha_2}\Big(c_3\cos\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a}+c_4\sin\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a}\Big)+0.007246\frac{q}{D}$$

$$\tag{2.16}$$

(Ⅱ) 确定积分常数 $c_i(i=1,2,3,4)$

为简单计，令式(2.14)～(2.16)中的$a=b$。

1) 四边固支板

$$w(x,y)=u(x,y)v(y)=[x^4-2x^3(y+a)+x^2(y+a)^2]\Big[\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{\alpha_1}\Big(c_1\cos\beta_1\ln\frac{y+a}{b+a}$$

$$+c_2\sin\beta_1\ln\frac{y+a}{b+a}\Big)+\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{\alpha_2}\Big(c_3\cos\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a}+c_4\sin\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a}\Big)+0.03125\frac{q}{D}\Big]$$

$$\tag{2.14}$$

在 $y=0$ 及 $y=b$ 两条边界上，边界条件为

$$w(x,y)\Big|_{y=0,y=b}=0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=0,y=b}=0 \tag{2.18}$$

由位移表达式 $w(x,y)=u(x,y)v(y)$ 可见，在$y=0,y=b$两边界上，除$x=0$点外，对于任何x，都有 $u(x,y)\neq0$，于是位移边界条件式(2.17)变为

$$v(y)\Big|_{y=0}=0 \tag{2.17a}$$

$$v(y)\Big|_{y=b}=0 \tag{2.17b}$$

又由于$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}v(y)+u(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}$，根据式(2.17a)，(2.17b)，式(2.18)可改写成

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{y=0}=0 \tag{2.18a}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=b}=0 \tag{2.18b}$$

于是边界条件式可具体化为：

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_1}\cos\left(\beta_1\ln\frac{1}{2}\right)c_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_1}\sin\left(\beta_1\ln\frac{1}{2}\right)c_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2}\cos\left(\beta_2\ln\frac{1}{2}\right)c_3 \\ \qquad +\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2}\sin\left(\beta_2\ln\frac{1}{2}\right)c_4+0.03125\frac{q}{D}=0 \\ c_1+c_3+0.03125\frac{q}{D}=0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1\cos\left(\beta_1\ln\frac{1}{2}\right)-\beta_1\sin\left(\beta_1\ln\frac{1}{2}\right)\right]c_1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_1-1}\left[\alpha_1\sin\left(\beta_1\ln\frac{1}{2}\right)\right. \\ \qquad \left.+\beta_1\cos\left(\beta_1\ln\frac{1}{2}\right)\right]c_2+\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2-1}\left[\alpha_2\cos\left(\beta_2\ln\frac{1}{2}\right)-\beta_2\sin\left(\beta_2\ln\frac{1}{2}\right)\right]c_3 \\ \qquad +\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha_2-1}\left[\alpha_2\sin\left(\beta_2\ln\frac{1}{2}\right)+\beta_2\cos\left(\beta_2\ln\frac{1}{2}\right)\right]c_4=0 \\ \alpha_1c_1+\beta_1c_2+\alpha_2c_3+\beta_2c_4=0\end{cases}$$

将 α_1，β_1，α_2，β_2 代入上式，联立解得系数为：

$$\begin{cases}c_1=-0.00007756\frac{q}{D}, \quad c_2=0.00012419\frac{q}{D} \\ c_3=-0.0312738\frac{q}{D}, \quad c_4=0.03385596\frac{q}{D}\end{cases}$$

将 c_i 代回位移方程，可求出四边固支板 $A\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$ 点的挠度为：

$$w_A=0.0034832\frac{qa^4}{D}$$

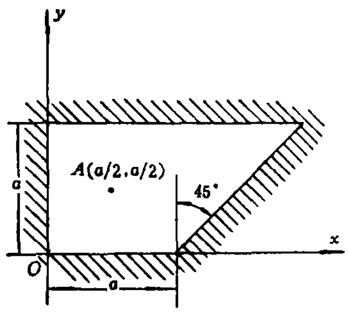

图 2

2）四边简支板

$$w(x,y)=u(x,y)v(y)=[x^4-2x^3(y+a)+x(y+a)^3]\left[c_1\left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{n_1}+c_2\left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{n_2}\right.$$
$$\left.+c_3\left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{n_3}+c_4\left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{n_4}-0.02778\frac{q}{D}\right] \tag{2.15}$$

在简支边界条件下，让应力边界条件在极值条件下近似地满足，为此将泛函式（2.7）进行变分，其极值条件是：

$$\delta\Pi=\frac{D}{2}\int_0^b[(2A-6kE+42k^2F)(ky+a)^5v+(-14kB+14kF+56k^2G)(ky+a)^6v'$$
$$+(2F-2B+8kG+144k^2C)(ky+a)^7v''+36kC(ky+a)^8v^{(3)}$$
$$+2C(ky+a)^9v^{(4)}-\frac{2H}{D}q(ky+a)^5]\delta v dy$$
$$+\frac{D}{2}\{[(E-7kF)(ky+a)^6v+(2B-F-8kG)(ky+a)^7v'-18kc(ky+a)^8v''$$

$$-2C(ky+a)^9v^{(3)}]\delta v\}_0^b$$

$$+\frac{D}{2}\{[2C(ky+a)^9v''+G(ky+a)^8v'+F(ky+a)^7v]\delta v'\}_0^b=0 \tag{2.19}$$

欧拉-泊松方程式(2.10)可由上式第一大项得到，又因在边界上$\delta v=0$，式(2.19)中第二大项无意义，于是可写出两个自然边界条件式（令$k=1$）

$$[2C(ky+a)^2v''+G(ky+a)v'+Fv]_0^b=0 \tag{2.20}$$

本问题的位移已知边界条件为

$$v\Big|_{y=0,y=b}=0$$

将C，G值代入后，相关的边界条件为

$$v(y)\Big|_{y=0}=0 \tag{2.19a}$$

$$v(y)\Big|_{y=b}=0 \tag{2.19b}$$

$$[(y+a)^2v''+9(y+a)v']\Big|_{y=0}=0 \tag{2.20a}$$

$$[(y+a)^2v''+9(y+a)v']\Big|_{y=b}=0 \tag{2.20b}$$

上四式可具体化为

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3+c_4-0.02778\dfrac{q}{D}=0 \\ c_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_1}+c_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_2}+c_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_3}+c_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_4}-0.02778\dfrac{q}{D}=0 \\ [n_1(n_1-1)+9n_1]c_1+[n_2(n_2-1)+9n_2]c_2+[n_3(n_3-1)+9n_3]c_3+[n_4(n_4-1)+9n_4]c_4=0 \\ \left[n_1(n_1-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_1-2}+18\,n_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_1-1}\right]c_1+\left[n_2(n_2-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_2-2}+18\,n_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_2-1}\right]c_2 \\ \quad+\left[n_3(n_3-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_3-2}+18\,n_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_3-1}\right]c_3+\left[n_4(n_4-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_4-2}+18\,n_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n_4-1}\right]c_4 \\ \quad=0 \end{cases}$$

将n_1，n_2，n_3，n_4代入，并联立求解，得系数c_i为：

$$\begin{cases} c_1=0.00416354\dfrac{q}{D}, \quad c_2=0.000000473\dfrac{q}{D} \\ c_3=0.024217317\dfrac{q}{D}, \quad c_4=-0.000601144\dfrac{q}{D} \end{cases}$$

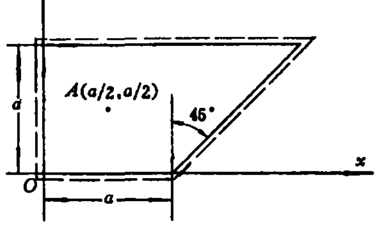

图 3

将c_i代回位移方程式(2.15)，可求出四边简支板上$A\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$点的挠度为

$$w_A=0.0076922\frac{qa^4}{D}$$

3）两相邻边固支，两相邻边自由的梯形板

$$w(x,y)=u(x,y)v(y)=[x^4-4x^3(y+a)+6x^2(y+a)^2]\left[\left(\frac{y+a}{b+a}\right)^{\alpha_1}\left(c_1\cos\beta_1\ln\frac{y+a}{b+a}\right.\right.$$

$$+c_2\sin\beta_1\ln\frac{y+a}{b+a}\Big)+\Big(\frac{y+a}{b+a}\Big)^{\alpha_2}\Big(c_3\cos\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a}+c_4\sin\beta_2\ln\frac{y+a}{b+a}\Big)+0.007246\frac{q}{D}\Big] \tag{2.16}$$

在此种边界条件下，应力边界条件只能在极值条件下近似地满足，今将泛函式(2.7a)进行变分，其极值条件是：

$$\begin{aligned}\delta\Pi=&\frac{D}{2}\int_0^b\Big\{[2A-4(1-\mu)I-6kE+12k(1-\mu)J+42k^2F-84k^2(1-\mu)M](ky+a)^5v\\&+[-14kB-28k(1-\mu)L+14kF-28(1-\mu)kM+56k^2G](ky+a)^6v'\\&+[2F-4(1-\mu)M-2B-4(1-\mu)L+8kG+144k^2C](ky+a)^7v''\\&+36kC(ky+a)^8v'''+2C(ky+a)^9v^{(4)}-\frac{2Hq}{D}(ky+a)^5\Big\}\delta v dy\\&+\frac{D}{2}\{[E-2(1-\mu)J-7kF+14k(1-\mu)M](ky+a)^6v\\&+[2B+4(1-\mu)L-F+2(1-\mu)M-8kG](ky+a)^7v'\\&-18kC(ky+a)^8v''-2C(ky+a)^9v'''\}\delta v\Big|_0^b\\&+\frac{D}{2}\{2C(ky+a)^9v''+G(ky+a)^8v'+[F-2(1-\mu)M](ky+a)^7v\}\delta v'\Big|_0^b=0\end{aligned} \tag{2.21}$$

欧拉-泊松方程式(2.9)可由上式中第一大项得到，在固支边，边界条件为：

$$v(y)_{y=0}=0 \tag{2.22a}$$

$$v'(y)_{y=0}=0 \tag{2.22b}$$

或

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha_1}\cos\Big(\beta_1\ln\frac{1}{2}\Big)c_1+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha_1}\sin\Big(\beta_1\ln\frac{1}{2}\Big)c_2+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha_2}\cos\Big(\beta_2\ln\frac{1}{2}\Big)c_3\\&\qquad+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha_2}\sin\Big(\beta_2\ln\frac{1}{2}\Big)c_4+0.007246\frac{q}{D}=0\end{aligned} \tag{2.22c}$$

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha_1-1}\Big[\alpha_1\cos\Big(\beta_1\ln\frac{1}{2}\Big)-\beta_1\sin\Big(\beta_1\ln\frac{1}{2}\Big)\Big]c_1+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha_1-1}\Big[\alpha_1\sin\Big(\beta_1\ln\frac{1}{2}\Big)\\&\qquad+\beta_1\cos\Big(\beta_1\ln\frac{1}{2}\Big)\Big]c_2+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha_2-1}\Big[\alpha_2\cos\Big(\beta_2\ln\frac{1}{2}\Big)-\beta_2\sin\Big(\beta_2\ln\frac{1}{2}\Big)\Big]c_3\\&\qquad+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\alpha_2-1}\Big[\alpha_2\sin\Big(\beta_2\ln\frac{1}{2}\Big)+\beta_2\cos\Big(\beta_2\ln\frac{1}{2}\Big)\Big]c_4=0\end{aligned} \tag{2.22d}$$

在自由边上，边界条件式可由泛函变分极值条件式(2.21)得到，由于 $\delta v_{y=b}\neq0$，$\delta v'_{y=b}\neq0$，得到另外两个边界条件式

$$\begin{aligned}&\Big[(ky+a^3)v^{(3)}+9k(ky+a)^2v''-\frac{1}{2C}(2B+4(1-\mu)L-F+2(1-\mu)M\\&\qquad-8kG)(ky+a)v'+\frac{1}{2C}(E-2(1-\mu)J-7kF+14k(1-\mu)M)v\Big]_{y=b}=0\end{aligned} \tag{2.23a}$$

$$\left[(ky+a)^2v''+\frac{G}{2C}(ky+a)v'+\frac{1}{2C}(F-2(1-\mu)M)v\right]_{y=b}=0 \qquad (2.23b)$$

令$k=1$并将表中诸系数代入上二式，联立求解式(2.22c)，(2.22d)，(2.23a)，(2.23b)，得系数c_i为：

$$\begin{cases} c_1=-0.00007748\dfrac{q}{D},\ c_2=-0.00010458\dfrac{q}{D} \\ c_3=-0.00283862\dfrac{q}{D},\ c_4=-0.00760828\dfrac{q}{D} \end{cases}$$

将c_i代回原方程(2.16)，可求出自由边交点$B(2a,a)$的挠度：

$$w_B=0.2078\frac{q}{D}a^4$$

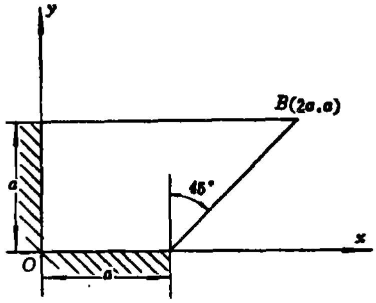

图　4

三、结　束　语

对于矩形板，挠曲面方程较为简单，边界条件比较容易满足，但是对于杂形板，挠曲面方程比前者复杂，边界条件的满足会困难得多．本文用康托洛维奇法对各种边界条件下的梯形板弯曲问题的解所作的尝试，有助于研究杂形板弯曲问题．

由于无法找到同类形板进行结果比较，本文只将结果与文献［1］中相应边界条件下的矩形板进行比较，证明所得结果是令人满意的．

若考虑进一步提高精度，宜采用康氏位移函数的二级近似计算，对杂形板采用交替轮换变量来提高精度将会更为困难．

杂形板弯曲问题的研究，在理论上与实际上都有一定的价值，文献［2］指出："用康托洛维奇法解题的算例，文献上发表的不多"，作者愿为此添砖加瓦．

参　考　文　献

［1］ 钱伟长，《变分法及有限元》．科学出版社(1980)．

［2］ 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》．科学出版社(1981)．

［3］ ［美］S．铁摩辛柯，S．沃诺斯基，《板壳理论》，科学出版社(1977)．

Kantorovich Solution for the Problem of Bending of a Ladder Plate

Xie Xiu-song Wang Lei

(*Hunan University, Changsha*)

Abstract

Based on the Kantorovich approximation solution for a rectangular plate in bending, this paper deals with the solutions for the ladder plate with various boundary conditions. The deflection of the plate is expressed in a first-order displacement function $w(x,y)=u(x,y)v(y)$, where the $u(x,y)$ in x direction is the generalized beam function. By making use of the principle of least potential energy, the variable coefficients differential equations for $v(y)$ may be set. To solve these differential equations and making use of the bundary conditions, the accurate solutions of $v(y)$ in y direction may be obtained. Then the displacement function $w(x,y)$ in the solution for the problem of the bending of the ladder plate with a better degree of approximation.