应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

折线强化弹塑性应力分析的有限元法*

徐孝伟　沈珏铭　邬耀宗

（杭州大学，1983年元月8日收到）

摘　要

本文对材料的应力应变曲线用三段直线的折线拟合．按照弹塑性的简单加载理论，对以增量理论得出的完整应力应变关系进行简化，导出按位移求解的有限元的增量方程．其中弹塑性刚度矩阵可以从弹性刚度矩阵补充后得出，从而节省计算时间．根据 von Mises 屈服准则确定各次荷载的增量．引入迭代法进行求解，省去对弹塑性刚度矩阵的重复地三角分解，进一步减少计算时间．本文对于应用高次单元、偏离简单加载的荷载、卸载计算、曲线拟合以及荷载的估算问题，均作了说明．

用有限元法计算弹塑性力学问题，已有增量变刚度法、初应力法、初应变法等[1][6]．由于计算量较大，所以至今仍有改进[2][3]．

本文对材料的应力应变间的非线性关系用折线近似处理，然后求解荷载与位移的非线性关系，用以减少整体刚度矩阵等的计算，使弹塑性应力分析的计算量减少．

一、应力应变关系的简化及有限元方程的推导

本文讨论的材料服从 Mises 屈服准则，具有等向强化的性质．在复杂应力状态下，材料的应力应变关系，按照弹塑性的增量理论有[1][4]：

$$d\{\varepsilon\}_p=\lambda\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\{\sigma\}}\tag{1.1}$$

以及强化规律

$$\bar{\sigma}=H\left(\int d\bar{\varepsilon}_p\right)\tag{1.2}$$

其中$\bar{\sigma}$为广义应力（等价应力），$\partial\bar{\sigma}/\partial\{\sigma\}$ 为广义应力$\bar{\sigma}$对于应力向量$\{\sigma\}$的偏导数，$d\{\varepsilon\}_p$为塑性应变向量的增量，$d\bar{\varepsilon}_p$为广义塑性应变的增量，λ为取决于材料及广义应力的因子．

从(1.1)、(1.2)式可导出弹塑性的完整的应力应变关系，即

$$d\{\sigma\}=[D]_{ep}d\{\varepsilon\}\tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned}&[D]_{ep}=[D]_e-[D]_p\\&[D]_p=\frac{[D]_e\dfrac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\{\sigma\}}\left\{\dfrac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T[D]_e}{H'+\left\{\dfrac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T[D]_e\dfrac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\{\sigma\}}}\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

* 钱伟长推荐．
1982年10月在非线性力学学术讨论会上宣读．

上式中$[D]_e$为弹性矩阵，$[D]_p$为塑性矩阵，$[D]_{ep}$为弹塑性矩阵，H'是(1.2)式中函数H的导数．在单向应力状态时，广义应力$\bar{\sigma}$即为单向应力σ，所以有

$$H'=\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p}=\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}=\frac{f'}{1-f'/E} \tag{1.5}$$

这里f'为单向拉伸试验给出的应力应变曲线的斜率，E为单向拉伸的弹性模量．

对于常用的金属材料，单向拉伸的应力应变曲线如图1所示，单向压缩应力应变曲线可取与单向拉伸时相同的曲线形状，只是σ，ε由正值变为负值．

今取折线$OABC$代替应力应变曲线．在应力应变关系处于AB段时，则将f'_1代入(1.5)式中f'可得H'_1；在应力应变关系处于BC段时，则将f'_2代入(1.5)式中f'，可得H'_2．

我们采用简单加载．对于幂函数表示的应力应变关系，即

$$\bar{\sigma}=A\bar{\varepsilon}^k$$

根据简单加载理论[5]，物体内部各点的应力分量成比例增长．折线$OABC$近似于幂函数的曲线，故今假设在简单加载下，对于折线强化弹塑性体，它的内部的应力分量成比例增长．设应力分量的比例为

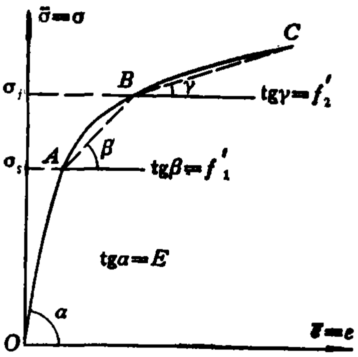

图 1

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\eta_1,\quad \frac{\sigma_z}{\sigma_x}=\eta_2,\quad \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x}=\eta_3,\quad \frac{\tau_{yz}}{\sigma_x}=\eta_4,\quad \frac{\tau_{zx}}{\sigma_x}=\eta_5$$

应力偏量σ'_x，σ'_y，σ'_z与σ_x的比值为

$$\frac{\sigma'_x}{\sigma_x}=\zeta_1,\quad \frac{\sigma'_y}{\sigma_x}=\zeta_2,\quad \frac{\sigma'_z}{\sigma_x}=\zeta_3$$

以及

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_x}=\psi$$

在应力分量成比例增长下，η_1，η_2，η_3，η_4和η_5恒为常量，所以ζ_1，ζ_2，ζ_3及ψ恒为常量．这样(1.4)式中$[D]_p$可化为

$$[D]_p=\frac{9G^2}{H'+3G}[BL] \tag{1.6}$$

其中$[BL]$为一个6×6阶对称矩阵，即

$$[BL]=\frac{1}{\psi^2}\begin{bmatrix} \zeta_1^2 & \zeta_1\zeta_2 & \zeta_1\zeta_3 & \zeta_1\eta_3 & \zeta_1\eta_4 & \zeta_1\eta_5 \\ & \zeta_2^2 & \zeta_2\zeta_3 & \zeta_2\eta_3 & \zeta_2\eta_4 & \zeta_2\eta_5 \\ \text{对} & & \zeta_3^2 & \zeta_3\eta_3 & \zeta_3\eta_4 & \zeta_3\eta_5 \\ & & & \eta_3^2 & \eta_3\eta_4 & \eta_3\eta_5 \\ & & \text{称} & & \eta_4^2 & \eta_4\eta_5 \\ & & & & & \eta_5^2 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

由于$[BL]$在加载过程中是不变的，即$[D]_p$取决于H'．对图1的折线强化，等效应力$\bar{\sigma}$处在AB段时，将H'_1代H'得$[D]_{p1}$；在BC段时，将H'_2代H'得$[D]_{p2}$．

在有限元法中，按位移求解时的单元的刚度矩阵，在弹性时为

$$[k]_e^{(e)}=\int_{(e)}[B]^T[D]_e[B]dV \tag{1.8}$$

在弹塑性时

$$[k]_{ep}^{(e)}=\int_{(e)}[B]^T[D]_{ep}[B]dV=\int_{(e)}[B]^T([D]_e-[D]_p)[B]dV \tag{1.9}$$

$[B]$为几何矩阵。

整体刚度矩阵$[K]$，可由各单元的贡献矩阵$[K]^{(e)}$迭加而成，而$[K]^{(e)}$可由$[k]^{(e)}$扩充而成。

设单元$(e)=o, p, \cdots, q$的广义应力为$\sigma_j>\bar{\sigma}\geqslant\sigma_s$；单元$(e)=r, s, \cdots, t$的广义应力为$\bar{\sigma}\geqslant\sigma_j$；其余单元为$\bar{\sigma}<\sigma_s$。此时整体的弹塑性刚度矩阵$[K]_{ep}$与弹性刚度矩阵$[K]_e$有：

$$[K]_{ep}=[K]_e+\sum_{o,p,\cdots,q}([K]_{ep1}^{(e)}-[K]_e^{(e)})+\sum_{r,s,\cdots,t}([K]_{ep2}^{(e)}-[K]_e^{(e)}) \tag{1.10}$$

记

$$[k]_p^{(e)}=\int_{(e)}[B]^T[D]_p[B]dV \tag{1.11}$$

将(1.11)式代入(1.9)式，可得

$$[k]_{ep}^{(e)}=[k]_e^{(e)}-[k]_p^{(e)} \tag{1.12}$$

将$[D]_{p1}$，$[D]_{p2}$分别代入(1.11)式，可算得$[k]_{p1}^{(e)}$,$[k]_{p2}^{(e)}$.将$[k]_{p1}^{(e)}$，$[k]_{p2}^{(e)}$代入(1.12)式，得$[k]_{ep1}^{(e)}$，$[k]_{ep2}^{(e)}$。然后将$[k]_{ep1}^{(e)}$，$[k]_{ep2}^{(e)}$扩充成贡献矩阵$[K]_{ep1}^{(e)}$及$[K]_{ep2}^{(e)}$并代入(1.10)式，得整体刚度矩阵$[K]_{ep}^{(e)}$。

在由弹性进入弹塑性，常是一部分单元先开始屈服，所以$o, p, \cdots, q$及$r, s, \cdots, t$较单元总数n是小得多的。从(1.10)式可得出：整体刚度矩阵在由弹性进入弹塑性后，不需要重新计算而只需作少量修改，因而可节省较多的计算时间。

荷载增量的确定，同弹性相似。在弹塑性时，有：

$$\Delta\{P\}=[K]_{ep}\Delta\{q\} \tag{1.13}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\{\sigma\}=[D]_{ep}[B]\Delta\{q\}=[S]_{ep}\Delta\{q\}\\&[S]_{ep}=([D]_e-[D]_p)[B]=[S]_e-[S]_p\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

这里$[S]_{ep}$为弹塑性应力矩阵，$[S]_e$，$[S]_p$分别为弹性及塑性应力矩阵。由于简单加载，可取

$$\{P\}=P_{\max}\{P\}^0$$

其中$\{P\}^0$的最大元素为1个力的单位。对于进入弹塑性后的第i次加载，则可取$\Delta\{P\}_i=a_i\{P\}^0$，a_i为第i次加载的荷载系数。设增加的荷载增量符合(1.13)式成立的条件，则从(1.13)式可算得

$$\Delta\{q\}_i=a_i\{q\}_i^0$$

式中$\{q\}_i^0$为$\{P\}^0$在i次加载后引起的位移向量的增量。并从(1.14)式可算得第i次加载后的应力向量的增量

$$\Delta\{\sigma\}_i=a_i\{\sigma\}_i^0$$

同前，式中$\{\sigma\}_i^0$为$\{P\}^0$在第i次加载后引起的应力向量的增量。设第$i-1$次加载后的位移

与应力向量为$\{q\}_{i-1}$及$\{\sigma\}_{i-1}$，则第 i 次加载后的位移与应力向量为

$$\{q\}_i=\{q\}_{i-1}+\alpha_i\{q\}_i^0$$

及

$$\{\sigma\}_i=\{\sigma\}_{i-1}+\alpha_i\{\sigma\}_i^0$$

在第 i 次加载后的广义应力 $\bar{\sigma}_i$ 为

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_i^2=&(\sigma_{x,i-1}+\alpha_i\sigma_{x,i}^0)^2+(\sigma_{y,i-1}+\alpha_i\sigma_{y,i}^0)^2+(\sigma_{z,i-1}\\&+\alpha_i\sigma_{z,i}^0)^2-(\sigma_{x,i-1}+\alpha_i\sigma_{x,i}^0)(\sigma_{y,i-1}+\alpha_i\sigma_{y,i}^0)\\&-(\sigma_{y,i-1}+\alpha_i\sigma_{y,i}^0)(\sigma_{z,i-1}+\alpha_i\sigma_{z,i}^0)-(\sigma_{z,i-1}\\&+\alpha_i\sigma_{z,i}^0)(\sigma_{x,i-1}+\alpha_i\sigma_{x,i}^0)+3(\tau_{xy,i-1}+\alpha_i\tau_{xy,i}^0)^2\\&+3(\tau_{yz,i-1}+\alpha_i\tau_{yz,i}^0)^2+3(\tau_{zx,i-1}+\alpha_i\tau_{zx,i}^0)^2\end{aligned}\tag{1.15}$$

在应用(1.13)式计算时，需要满足前述条件，即：对于单元$(e)=o,\ p,\ \cdots,\ q$ 有 $\bar{\sigma}_i\leqslant\sigma_j$；对于处在弹性状态的单元有$\bar{\sigma}_i\leqslant\sigma_s$。这样，从(1.15)式可算出这些单元的 α_i。其中最小的一个 α_i 值，即为 i 次加载的荷载系数（由于简单加载 α_i 为正值，且各应力分量及 $\bar{\sigma}_i$ 随 α_i 的增加而增加）。

设 i 次加载后，处于弹性状态的单元中有$(e)=m,\ \cdots,\ n$ 的$\bar{\sigma}_i=\sigma_s$，处于 BC 阶段的单元$(e)=o,\ p,\ \cdots,\ q$ 中有$(e)=p,\ \cdots,q$ 的 $\bar{\sigma}_i=\sigma_j$。则对第 $i+1$ 次加载时的整体刚度矩阵有

$$[K]_{ep}=[K]_e+\sum_{m,n,\cdots,o}([K]_{ep1}^{(e)}-[K]_e^{(e)})+\sum_{p,q,\cdots,t}([K]_{ep2}^{(e)}-[K]_e^{(e)})\tag{1.16}$$

在实际计算中，$\Delta\{P\}$从有单元开始进入塑性时算起，逐级加载，逐级确定加载范围，直至所有增加的荷载达到预定的荷载。记 $\alpha_0\{P\}^0$ 为弹性时最大加载，即此时 $\bar{\sigma}_i$ 中最大的一个达到σ_s，即 $\bar{\sigma}_{i\max}=\sigma_s$，此时的荷载为 $\alpha_0\{P\}^0$。如进入弹塑性后加载了 n 次，若 $\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i=P_{\max}$，则$\{q\}_n=\sum\limits_{i=0}^{n}\Delta\{q\}_i$及$\{\sigma\}_n=\sum\limits_{i=0}^{n}\Delta\{\sigma\}_i$ 即为荷载$\{P\}$作用下的位移和应力向量。

如$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\alpha_i<P_{\max}$而$\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i>P_{\max}$，则在$\alpha_{n-1}$与 α_n间用线性插值决定之，即

$$\{q\}_n=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\{q\}_i+\left(P_{\max}-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\right)\Delta\{q\}_n/\alpha_n$$

及

$$\{\sigma\}_n=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta\{\sigma\}_i+\left(P_{\max}-\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i\right)\Delta\{\sigma\}_n/\alpha_n$$

二、迭代求解

用(1.13)式进行位移向量的增量计算时，常需对$[K]_{ep}$矩阵进行三角分解，而三角分解在计算中占求解时间的大部分，避免重新分解可节省较多的计算时间。如将(1.10)式代入

(1.13)式并整理之有

$$[K]_e\Delta\{q\}_i=\Delta\{P\}_i+\sum_{o,p,\cdots,q}[K]_{p1}\Delta\{q\}_i+\sum_{r,s,\cdots,t}[K]_{p2}\Delta\{q\}_i \tag{2.1}$$

对(2.1)式求 $\Delta\{q\}_i$ 可用迭代法，即令

$$[K]_e\Delta\{q\}_i^{(1)}=\Delta\{P\}_i \tag{2.2}$$

则将$\Delta\{q\}_i^{(1)}$代入(2.1)式的右端得

$$[K]_e\Delta\{q\}_i^{(2)}=\Delta\{P\}_i+\sum_{o,p,\cdots,q}[K]_{p1}\Delta\{q\}_i^{(1)}+\sum_{r,s,\cdots,t}[K]_{p2}\Delta\{q\}_i^{(1)} \tag{2.3}$$

对于求$\Delta\{q\}_i^{(j)}$有

$$[K]_e\Delta\{q\}_i^{(j)}=\Delta\{P\}_i+\sum_{o,p,\cdots,q}[K]_{p1}\Delta\{q\}_i^{(j-1)}+\sum_{r,s,\cdots,t}[K]_{p2}\Delta\{q\}_i^{(j-1)} \tag{2.4}$$

上面迭代过程是收敛的，且收敛较快。令$[k]_p^{(e)}\Delta\{q\}_i^{(e)}=\{R\}_i^{(e)}$，$\Delta\{q\}_i^{(e)}$为第$i$次加载单元的结点位移向量，$\{R\}_i^{(e)}$为单元等效结点力向量。从(1.11)式得

$$\{R\}_i^{(e)}=\int_{(e)}[B]^T[D]_p[B]dV\Delta\{q\}_i^{(e)}=\int_{(e)}[B]^T[D]_p\Delta\{\varepsilon\}_i^{(e)}dV \tag{2.5}$$

对于小位移弹塑性问题，可将应力应变关系写成

$$d\{\sigma\}=([D]_e-[D]_p)d\{\varepsilon\}=[D]_e d\{\varepsilon\}+d\{\sigma_0\} \tag{2.6}$$

式中$d\{\sigma_0\}$为初应力向量。所以

$$\{R\}_i^{(e)}=-\int_{(e)}[B]^T\Delta\{\sigma_0\}_i^{(e)}dV \tag{2.7}$$

将$\{R\}_i^{(e)}$扩充为贡献列阵即为$\{R\}_i$，则有$[K]_p\Delta\{q\}_i=\{R\}_i$。所以上述迭代可视为初应力法，而初应力法的迭代收敛性是已证明过的，且收敛较快[1][6]。

对第i次加载，可将(2.4)式两端除以α_i得

$$[K]_e\Delta\{q\}_i^{0,(j)}=\{P\}^0+\sum_{o,p,\cdots,q}[K]_{p1}\Delta\{q\}_i^{0,(j-1)}+\sum_{r,s,\cdots,t}[K]_{p2}\Delta\{q\}_i^{0,(j-1)} \tag{2.8}$$

若$\Delta\{q\}_i^{0,(j)}-\Delta\{q\}_i^{0,(j-1)}$小于预定的值，就可将$\Delta\{q\}_i^{0,(j)}$作为所要求的$\Delta\{q\}_i^0$。

对第$i+1$次加载，则将(1.16)式代入(1.13)式，并将两端除以α_{i+1}得

$$\begin{aligned}[K]_e\Delta\{q\}_{i+1}^0&=\{P\}^0+\sum_{m,n,\cdots,o}[K]_{p1}\Delta\{q\}_{i+1}^0+\sum_{p,q,\cdots,t}[K]_{p2}\Delta\{q\}_{i+1}^0\\&=\{P\}^0+\sum_{o,p,\cdots,q}[K]_{p1}\Delta\{q\}_{i+1}^0+\sum_{r,s,\cdots,t}[K]_{p2}\Delta\{q\}_{i+1}^0\\&\quad+\sum_{m,n}[K]_{p1}\Delta\{q\}_{i+1}^0+\sum_{p,q}([K]_{p2}-[K]_{p1})\Delta\{q\}_{i+1}^0\end{aligned} \tag{2.9}$$

对于(2.9)式的迭代则可以(2.8)式已求得的$\Delta\{q\}_i^{0,(j)}$开始，即取$\Delta\{q\}_{i+1}^{0,(1)}=\Delta\{q\}_i^{0,(j)}$，则有

$$[K]_e\Delta\{q\}_{i+1}^{0,(2)}=\{P\}^0+\sum_{o,p,\cdots,q}[K]_{p1}\Delta\{q\}_i^{0,(j)}+\sum_{r,s,\cdots,t}[K]_{p2}\Delta\{q\}_i^{0,(j)}$$

$$+\sum_{m,n}[K]_{p1}\Delta\{q\}_i^{0,(j)}+\sum_{p,q}([K]_{p2}-[K]_{p1})\Delta\{q\}_i^{0,(j)} \qquad (2.10)$$

所以对第$i+1$次加载时迭代求解，可在第i次加载时迭代求解的基础上加上$\sum_{m,n}[K]_{p1}\cdot\Delta\{q\}_i^{0,(j)}$和$\sum_{p,q}([K]_{p2}-[K]_{p1})\Delta\{q\}_i^{0,(j)}$两项的相当荷载来迭代求解．而$i$次加载时经$j$次迭代求得的$\Delta\{q\}_i^{0,(j)}$可作为第$i+1$次加载时的初次迭代的值．这样前次加载的迭代结果可为后次所利用，减少了后次加载的计算量．

三、讨　论

(i)　对非常应变的高次单元，在一个单元内，可能有的区域已进入塑性状态，而其余还处于弹性状态．因此，由弹性进入塑性不能以单元作为单位．但由于高次单元常较大，因而可计算代表性的点（如等参单元的数值积分点）的广义应力，以确定该点是否达到屈服．而以该点的应力来表征附近的子空间．即在较大的高次单元划分成若干个常应变单元，这样就可用前述的计算方式．所不同的是这些划分出来的常应变单元的自由度决定于高次单元．

(ii)　对于卸载时位移、应力的计算，由于采用简单加载方式，则按弹性计算方式计算．这样可确定残余应力及变形．

(iii)　本文采用的简单加载虽使加载方式受到限制，但近年来计算表明在偏离简单加载较大的范围下，简单的加载方式仍可适用．

(iv)　本文对折线采用图1所示的三段直线，虽不能很好拟合全部曲线，但如预先估定弹塑体内部的最大应力、应变，则这样折线就只需拟合最大应力、应变范围内的部分曲线，从而可提高准确度．在国内实际使用的非线性程序中，则将应力应变曲线在进入塑性后用一条直线简化[7]．显然其准确度不如本文的简化方式．

(v)　本文中的迭代的收敛速度较初应力法快．从(2.8)式中可看出，从弹性开始进入塑性的常是个别应力较大的单元，而这些单元在弹性计算中常是划分得较小的单元，这样需迭代的荷载值小，收敛就快．其次是后次加载的迭代可利用前次迭代的结果，这样需要迭代次数将减少．本文计算过程的加载次数虽多，但每次加载需迭代次数少，而省去了整体刚度矩阵的重新形成和它的三角分解，这些都是计算中费时较多部分．显然本文方法可节省较多的计算时间．

(vi)　本文的方法可算得每次加载后的荷载、位移、应力以及塑性区域．如预先估计的荷载较大，很难达到，则可从位移、应力或进入塑性的单元达到预定的数值而停止计算．而在增量法、初应力法、初应变法等法计算中，最后荷载和各级加载的值估计不当将增加很多计算时间．

参 考 文 献

[1] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Elememt Method*, 3rd. Ed., MeGraw-Hill Book Company, England(1977).

[2] Argyris, J. H, and D. W. Scharpf. 弹塑性分析方法, 《固体力学中的有限元素法》(译文集) 下集, 科学出版社(1977).

[3] 龚尧南, 材料非线性有限元法中的新解法及其在平面断裂问题中的应用, 固体力学学报, 2 (1982).

[4] Hill, R., 《塑性数学理论》, 王仁等译, 科学出版社(1966).

[5] Ильюшин, A. A., 《塑性》, 王振常译, 建筑工程出版社(1958).

[6] Desai, C. S. and J. E. Abel, 《有限元素法引论》, 江伯南等译, 科学出版社(1978).

[7] Bathe, K. J., 《ADINA非线性程序》(用户手册), 赵兴华等译, 郑州机械研究所(1981).

A Finite Element Method for Stress Analysis of Elastoplastic Body with Polygonal Line Strain-Hardening

Xu Xiao-wei Shen Jue-ming Wu Yao-zhong

(Hangzhou University, Hangzhou)

Abstract

In this paper, the stress-strain curve of material is fitted by polygonal line composed of three lines. According to the theory of proportional loading in elastoplasticity, we simplify the complete stress-strain relations, which are given by increment theory of elastoplasticity. Thus, it leads out finite element increment equation with solution of displacement. The assemblage elastoplastic stiffness matrix can be obtained by adding something to the elastic matrix, hence it will shorten the computing time. The determination of every loading increment follows von Mises yield criteria. The iterative method is used in computation. It omits the redecomposition of the assemblage stiffness matrix and it will go a step further to shorten the computing time. Illustrations are given to high-order element application, departure from proportional loading, computation of unloading, fitting to the curve and the problem of load estimation.