应用数学和力学，第5卷第3期（1984年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

讨 论 栏

关于"二阶变系数微分方程组解的有界性与渐近性"一文的讨论

毛士忠（盐城师专）：

读了你刊1982年第3卷第4期"二阶变系数微分方程组解的有界性与渐近性"一文后，感到其中有些地方值得商榷。具体意见如下：

1．文中开头提出的解的"有界性与渐近性"从原文看似乎不够明确，不知指的是一切解的有界性、稳定性，还是零解的稳定性；指的是有限区间上的稳定性、还是按Lyapunov意义下的稳定性。因为对线性方程组来说"一切解在$t\geqslant t_0$上的有界性等价于零解按Lyapunov意义下的稳定性"。但原文并未提及，因此不够明确[1]。

2．作者在文章的摘要中提出："当(0，1)的系数$p_{ij}(t)$是周期函数时Бурдика曾加以研究，而当$p_{ij}(t)$是任意函数时，至今还未曾有人研究过。"实际上，对周期函数时，[2]中第六章有综合性的评述，其中的结论已改进了Юровский的结论。此外，文献[3][4][5]均有过报导。对$p_{ij}(t)$是任意函数时，[6][7]也有过报导。若系数看成缓变或冻结时，[8][9][10]均有报导。其中的文献包括了国内外研究者的一些主要动态。此外，在控制论中，把(0，1)看成为时变系统，研究的文章也较多，如[8][12]。

3．多处错误（包括印刷错误）

(1) 原文498页第一行"此处β可以为实数，也可以为虚数"，因为按原文$\beta=\frac{1}{2}\sqrt{(p_{11}+p_{22})^2-4(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})}$其中$p_{ij}=p_{ij}(t)$，这里首先应当对$p_{ij}(t)$定义在$t\in[t_0,\infty)$上的连续函数或可微函数而言，($i$，$j=1$，2)。又因$p_{ij}(t)$是实函数，因此，当$t$在某一区间上变化时，$\beta$是一随$t$而变化的函数，可以是实函数，也可以是复函数，也可以是一随t而变化既取实值又取复值之函数。因此，一般说来应是复值函数。按此理由，同页倒数第二行也应改为β为某一区间上定义的复值函数。其实，把上述二个变换(1.3)与(1.9)合成一个变换，即可避免这一情况。

(2) 原文498页倒数第三行$\frac{d^2z_1}{dt^2}+\left(-\frac{1}{2}\frac{dA}{dt}+\frac{1}{4}A^2+B\right)z_1=0$中之$\frac{1}{4}A^2$前的符号应为"－"。

(3) 原文499页第五行$\mp\beta=\alpha=\frac{1}{2}(p_{11}+p_{22})$应为$\lambda_{1,2}\mp\beta=\alpha=\frac{1}{2}(p_{11}+p_{22})$。

(4) 原文499页倒数第四行方程$\frac{dz_1}{dt}+p_1z_1=0$应为$\frac{d^2z_1}{dt^2}+p_1z_1=0$，同理原文500

页第二行，应为$\frac{d^2z_2}{dt^2}+p_2z_2=0$。

（5） 原文500页中，由变换(2.1) $\left.\begin{array}{l}y_1=ax_1+bx_2\\y_2=cx_1+dx_2\end{array}\right\}$得出之$p_{12}'$和$p_{21}'$中之$\Delta=ab-cd$，同页倒数第4行中之$ab-cb\neq0$和501页第一行$ab-cd\neq0$，均应改为$\Delta=ad-bc\neq0$。

因为变换(2.1)即为$y=Ax$，其中

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

要求(2.1)为非异变换，即要求A^{-1}存在，因为

$$A^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix},\text{ 即}\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq0,$$

所以$\Delta=ad-bc\neq0$。

（6） 原文502页倒数第七行(c) $p_0>0$应改为$p_i>0$。

（7） 所有定义区间$(t_0,\ \infty)$应改为$[t_0,\ \infty)$。

（8） 定理1，2条件(b) $\int_0^T|p_i|dt\leqslant\frac{T}{4}$应改为$\int_0^T|p_i|dt\leqslant\frac{4}{T}$ $(i=1,\ 2)$。

（9） 因作变换时曾限制p_{12}或p_{21}对$t\in[t_0,\ \infty)$至少有一个不具零点，或对$t^*>t_0$，$t\in[t^*,\ \infty)$时不具零点，因此，在定理1～5中均应分别增加这一限制条件。

4． 原文501页中，由(0，1)可得

$$|x_1|\leqslant|x_{10}|+\frac{m}{2}\int_{t_0}^t(|x_1|+|x_2|)dt$$

$$|x_2|\leqslant|x_{20}|+\frac{m}{2}\int_{t_0}^t(|x_1|+|x_2|)dt$$

$$|x_1|+|x_2|\leqslant\delta_0+m\int_{t_0}^t(|x_1|+|x_2|)dt$$

要得到作者所需之结论，只要运用Gronwall-Bellman不等式即可，得

$$|x_1|+|x_2|\leqslant\delta_0\exp\left[m\int_{t_0}^t dt\right]=\delta_0\exp[m(t-t_0)]$$

因为m为一有限数，因此只要$t-t_0$为有限，$\exp[m(t-t_0)]$有界，而δ_0任意小，在有限区间上即可保证$|x_1|+|x_2|$充分小。但若$m>0$，当$t\to\infty$时，除零解而外不能得出按Lyapunov意义下稳定之条件。

5． 原文502页第三节中所得之若干判定定理，其中所引用的文献均在1954年以前，这一期间，[3][4][5][6][7]均有过报导，特别[6][7]所提出的研究方法与结论，除变换有些不同外，本质上与此文相同。而且定理1，2中之结论在Юровский和Старжинский的论文中已有过报导[3][4][5]。

对定理3，4在运用Сонсоне著作Ⅱ ctp．28结果时，漏掉了一个重要条件，即$p_1(t)$，$p_2(t)$在$[t_0,\ \infty)$上是有界变差函数。但若加上这一条件，而且还要保证$\lim\limits_{t\to\infty}p_i=a_i^2\ (i=1,2)$不太容易。故本文的定理3，4的意义不大，结果是不太理想的。但若运用Гусаров[6][13]的

结论，以 $0<a_i^2\leqslant p_i\leqslant b_i^2$ 代替 $\lim\limits_{t\to\infty} p_i=a_i^2>0$ $(i=1,2)$ 以及加上 p_i 为有界变差函数，得出之结论比这个结论更好。似乎还可改进。

此外，对这一领域中最应引起注意的是对变系数二阶方程组中虽特征方程之根具负实部，但方程组零解仍不稳定[11]和虽特征方程之根具正实部但其零解仍稳定之反例[12]。为便于研究，国内外研究者有采用设法构造 Lyapunov 函数法、冻结系数法、缓变系数法、内积法来解决这类问题。此外，某些方程如 Mathieu 方程等还有特殊的研究和判定方法，均应引起注意。

以上意见仅供作者与广大读者参考，不当之处欢迎批评指正。

参 考 文 献

[1] 王柔怀、伍桌群编，《常微分方程讲义》，人民教育出版社，(1963)，212—215.

[2] 张学铭等编，《微分方程稳定性理论讲义》，山东人民出版社，(1959).

[3] Юровский А. В., О некторых критериях устойчивости интегралов системы двух линейных дифференциальных уравнений с нериодическими коэффициентами. *ДАН*, 62(1948).

[4] Старжинский В. М., Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коффицентами, *ПММ* 18(1954).

[5] Старжинский В. М., Замение к исследование устойчивости периодических движение, *ПММ* 19 (1955).

[6] 张学铭，关于线性二阶微分方程有界解问题，山东大学学报，2，3(1956).

[7] 张学铭，关于线性方程组 $\frac{dy_i}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{2}a_{ik}(t)y_k$ $(i=1,2)$ 解的有界性问题，山东大学学报，2，3(1956).

[8] Rosenbrok, H.H., The stability of linear time dependent control systems, *Journal of Electronics and Control*, Vol. 14—15(1—6)(1963).

[9] 秦元勋、王联、王慕秋，缓变系数动力系统的运动稳定性，中国科学专辑，(1979).

[10] 秦元勋、王慕秋、王联，《运动稳定性理论与应用》，科学出版社，(1981).

[11] Zubov, V. I., *Mathematical Methods for the Study of Automatic Control Systems*, Pergamon, (1962)71.

[12] Wu Min-yin, Solvability and representation of linear time-varying system, *Int. J. Control*, 31, 5(1980), 937—945.

[13] Гусаров Л. А., Об ограниченности решений ленейного уравнения второго порядка, *ДАН*, СССР, 18, 2(1949).

李 骊（天津大学）：

拙作"二阶变系数微分方程组解的有界性与渐近性"，蒙毛士忠同志提出宝贵意见，现就所提各点答复如下：

1. 诚如毛士忠同志所指出，在拙作摘要中对有关文献的列举是不完备的。这有两个原因：第一，我认为在简短的摘要中只要把主要问题说清楚即可，列举更多的文献似无必要；

第二，由于自己所知有限，对这方面的有些文章，包括毛士忠同志的文章在内，确实未曾读过。

2. 大家知道，对于方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)x=0 \tag{1}$$

其解的有界性、渐近性以及零解的稳定性有不少人进行过研究，并且得到了大量的判据。而拙作的主要目的，正如在摘要中所指出，乃是寻求一种方法，将一般二阶变系数微分方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=p_{11}(t)x_1+p_{12}(t)x_2\\ \frac{dx_2}{dt}&=p_{21}(t)x_1+p_{22}(t)x_2\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

化为形如(1)的方程，这样就便于利用已有的大量判据，对方程组(2)的解的性质得出相应的结论。因此，在拙作的最后一节中，作为举例只是列举了几种情况，而对于其余情况则概未提及。因为，我认为，这可以完全由读者自行得出，而无需我来赘述。

3. "有界性与渐近性"系指"解的有界性与渐近性"，此点已由拙作标题指明。至于"稳定性"则系指"零解的稳定性"，这可以由所引 Borg 定理看出。

4. 毛同志关于函数 β 的分析是正确的。

5. 为了得到所需之估式，利用 Bellman 不等式固然可以，但利用拙作中的方法也似无不可，因为二者繁简差别并不太大。

6. $ab-cd\neq0$ 误，应为 $ad-bc\neq0$，这是自己的疏忽。其余有些错误则系印刷错误。

毛同志的批评指正，使我受到不少教益，为此，谨向他表示深切的谢意。

Discussion on "The Boundedness and Symptotic Behavior of Solutions Differential System of Second-Order with Variable Coefficient"

Mao Shi-zhong

(Department of Mathematics, Yancheng Normal College, Yancheng)

Li Li

(Tianjin University, Tianjin)