应用数学和力学，第5卷第2期（1984年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法——(Ⅱ)缺口群的计算

欧阳鬯　　朱　涵

（上海复旦大学数学系，1983年2月27日收到）

摘　　要

本文是欧阳鬯所作文“关于任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法　（Ⅰ）解析方法”[1]的继续．这里我们利用该文提出的理论和公式对缺口群问题进行了实际计算．在计算中对该文陈述的参数平面上边界条件计算方法作了改动．数值计算实例表明：在所研究的特征参数，例如本文中的L_j的适当范围内，所叙述的方法是行之有效的．

一、参数平面上边界条件的处理

下面我们仅罗列文[1]中所提出的公式而不加以说明．只对改动部份详加说明．由文[1]可知：图1所示问题的解可用区域D_z^-中的两个解析函数$\varphi(z)$，$\psi(z)$来表示：

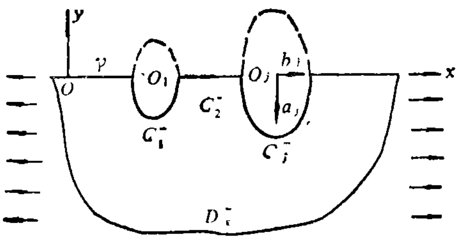

图　1

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}]$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi'(z)]$$

$$2\mu(u+iv)=K\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}$$

其中　σ_x，σ_y，τ_{xy}为应力；u,v为位移；$\mu=E/(1+\nu)$；ν为泊松比；E为弹性模量．

$$K=\begin{cases}3-4\nu & \text{（平面应变）}\\ (3-\nu)/(1-\nu) & \text{（平面应力）}\end{cases}$$

把边界力表示成

$$f(s)=[\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}]\Big|_{z(0)}^{z(s)}$$

式中s是弧长．

利用解析开拓：

$$\varphi(z)=-z\overline{\varphi'(\bar{z})}-\overline{\psi(\bar{z})}\qquad z\in D_z^+$$

可将$\varphi(z)$开拓为$D=D_z^-+\gamma+D_z^+$中的解析函数，而在边界上的应力边界条件就化为仅用$\varphi(z)$来表示：

$$N_j-iT_j=\varphi'(z)+\overline{\varphi'(\bar{z})}-\exp[2i\alpha_j][(\bar{z}-z)\varphi''(z)-\varphi'(z)-\varphi'(\bar{z})]\qquad z\in C_j^-$$

进一步设：

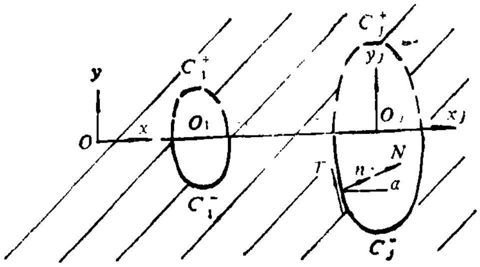

图 2

$$\varphi'(z)=\frac{\sigma_\infty}{4}+\sum_{k=1}^{N}\varphi_k(z_k)$$

$$\varphi_k(z_k)=\sum_{n=0}^{\infty}F_{n,k}z_k^{-(n+1)}$$

$$F_{n,k}=F^{(1)}_{n,k}+iF^{(2)}_{n,k}$$

$F^{(1)}_{n,k}$、$F^{(2)}_{n,k}$ 均为实数，且 $\varphi'(z)$ 在各缺口$C_j^-+C_j^+$ $(j=1,2,\cdots,N)$周围可进行局部Laurent展开，表达式为：

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(F_{n,j}z_j^{-(n+1)}+M_{n,j}z_j^{n}\right)\\
&M_{n,j}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k\neq j}^{N}(-1)^{p+1}\gamma_{jk}^{-(n+p+1)}\binom{n+p}{n}F_{p,k}+\frac{\sigma_\infty}{4}\Delta_n^0\\
&\Delta_n^0=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases},\qquad \gamma_{jk}=z_j-z_k
\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

利用共形映照 $z_j=\omega(\zeta)=\frac{e_j}{2}\left(R_j\zeta-\frac{1}{R_j\zeta}\right)$，可把 $C_j^-+C_j^+$ 的外部区域映照到参数平面单位圆周 $|\zeta|=1$ 的外部区域．这时 $\varphi'(z)$ 可在参数平面 $|\zeta|=1$ 附近展开为：

$$\Phi(\zeta)=\varphi'(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}(\alpha_{m,j}+i\beta_{m,j})\zeta^m$$

$\alpha_{m,j}$．$\beta_{m,j}$ 均为实数．

这时缺口 C_j^- 的应力边界条件在参数平面上就变为：

$$\left.\begin{aligned}
&(R_j+R_j^{-1}\sigma^2)(\Phi(\sigma)+\overline{\Phi(\sigma)})-\{(R_j+R_j^{-1})(\sigma-\sigma^3)\Phi'(\sigma)\\
&\quad-(R_j^{-1}+R_j\sigma^2)(\Phi(\sigma)+\bar{\Phi}(\sigma))\}=F_j(\sigma),\quad \sigma=e^{i\theta},\quad \pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\
&F_j(\sigma)=(R_j+R_j^{-1}\sigma^2)(N_j-iT_j)
\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

其中 N_j,T_j 为作用在第 j 个缺口边界上的外法向应力与切向应力．将$\Phi(\zeta)$表达式代入(1.2)，得：

$$\begin{aligned}
&(R_j+R_j^{-1}\sigma^2)\sum_{-\infty}^{\infty}\left[(\alpha_{m,j}+i\beta_{m,j})\sigma^m+(\alpha_{m,j}-i\beta_{m,j})\sigma^{-m}\right]\\
&\quad-(R_j+R_j^{-1})(\sigma-\sigma^3)\sum_{-\infty}^{\infty}m(\alpha_{m,j}+i\beta_{m,j})\sigma^{m-1}\\
&\quad+2(R_j^{-1}+R_j\sigma^2)\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{m,j}\sigma^m=F_j(\sigma),\quad \sigma=e^{i\theta},\quad \pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi
\end{aligned}\tag{1.3}$$

为了确定系数 $\alpha_{m,j}$，$\beta_{m,j}$，我们必须把 $F_j(\sigma)$ 也展为 Fourier 级数，这也就是说必须给定 $F_j(\sigma)$ 在单位圆周$|\zeta|=1$ 上半部的值．这个值表面上看似乎可任意给定而不影响(1.3)的成立，但事实上由于$\Phi(\zeta)$是由下半单位圆外部 $|\zeta|>1$ 开拓到上半单位圆外部，对于真实物理解，$\Phi(\zeta)$由下半单位圆边界条件确定，当$\Phi(\zeta)$ 从下半圆外部开拓到上半部时，上半圆的

边界条件必然与下半圆边界条件有某种内在联系．下面来考察这种联系．为此把 (1.3) 中等号左边的 σ 值用上半单位圆的值代入，看看等于什么？

令 $\sigma=e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$; $\sigma_1=\bar{\sigma}=e^{-i\theta}$

又设：

$$
\begin{aligned}
H(\sigma)=&(R_j+R_j^{-1}\sigma^2)\sum_{-\infty}^{\infty}[(\alpha_{m,j}+i\beta_{m,j})\sigma^m+(\alpha_{m,j}-i\beta_{m,j})\sigma^{-m}]\\
&-(R_j+R_j^{-1})(\sigma-\sigma^3)\sum_{-\infty}^{\infty}m(\alpha_{m,j}+i\beta_{m,j})\sigma^{m-1}\\
&+2(R_j^{-1}+R_j\sigma^2)\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_{m,j}\sigma^m\\
=&\overline{(R_j+R_j^{-1}\sigma_1^2)}\sum_{-\infty}^{\infty}\overline{[\alpha_{m,j}(\sigma_1^m+\sigma_1^{-m})-i\beta_{m,j}(\sigma_1^m-\sigma_1^{-m})]}\\
&-\overline{(R_j+R_j^{-1})(\sigma-\sigma_1^3)}\sum_{-\infty}^{\infty}\overline{m(\alpha_{m,j}-i\beta_{m,j})\sigma_1^{m-1}}\\
&+\overline{2(R_j\sigma_1^2+R_j^{-1})}\sum_{-\infty}^{\infty}\overline{\alpha_{m,j}\sigma_1^m}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

利用(1.3)消去(1.4)中带有 $\alpha_{m,j}$ 系数的项：

$$
\begin{aligned}
H(\sigma)=&\overline{F_j(\sigma_1)}-\overline{2i\{(R_j+R_j^{-1}\sigma_1^2)}\sum_{-\infty}^{\infty}\overline{\beta_{m,j}(\sigma_1^m-\sigma_1^{-m})}\\
&-\overline{(R_j+R_j^{-1})(\sigma_1-\sigma_1^3)}\sum_{-\infty}^{\infty}\overline{m\beta_{m,j}\sigma_1^{m-1}}\\
=&\bar{F}_j(\sigma)+2i\{(R_j+R_j^{-1}\sigma^2)\sum_{-\infty}^{\infty}\beta_{m,j}(\sigma^m-\sigma^{-m})\\
&-(R_j+R_j^{-1})(\sigma-\sigma^3)\sum_{-\infty}^{\infty}m\beta_{m,j}\sigma^{m-1}\}
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

设 Γ_j^-，Γ_j^+ 分别代表下、上半单位圆周，综合(1.3)，(1.5)我们有：

$$
H(\sigma)=\begin{cases}\bar{F}_j(\sigma)+2i\Big((R_j+R_j^{-1}\sigma^2)\sum\limits_{-\infty}^{\infty}\beta_{m,j}(\sigma^m-\sigma^{-m})\\ \qquad -(R_j+R_j^{-1})(\sigma-\sigma^3)\sum\limits_{-\infty}^{\infty}m\beta_{m,j}\sigma^{m-1}\Big) & \sigma\in\Gamma_j^+\\ F_j(\sigma) & \sigma\in\Gamma_j^-\end{cases}
\tag{1.6}
$$

这时再设：

$$
F_j^*(\sigma)=\begin{cases}\bar{F}_j(\sigma) & \sigma\in\Gamma_j^+\\ F_j(\sigma) & \sigma\in\Gamma_j^-\end{cases}
$$

并将其展为 Fourier 级数（这里我们假设载荷函数 F_j 具有一定的解析性质）：

$$
F_j^*(\sigma)=\sum_{-\infty}^{\infty}(\gamma_{m,j}+i\delta_{m,j})\sigma^m
\tag{1.7}
$$

$\gamma_{m,j}$，$\delta_{m,j}$ 均为实数．将(1.7)代入 (1.6)，并通过移项将具有实系数的部份与具有虚系数的部份分别放在等号的两边，这样我们得到如下关系：

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_{m,j}\sigma^m = \begin{cases} i\sum_{-\infty}^{\infty} B_m\sigma^m & \sigma\in\Gamma_j^+ \\ -i\sum_{-\infty}^{\infty} B_m\sigma^m & \sigma\in\Gamma_j^- \end{cases} \tag{1.8}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned} A_{m,j} &= R_j[(1-m)\alpha_{m,j}+\alpha_{-m,j}+m\alpha_{m-2,j}]+R_j^{-1}[(2-m)\alpha_{m,j} \\ &\quad +(m-1)\alpha_{m-2,j}+\alpha_{-m+2,j}]-\gamma_{m,j} \\ B_{m,j} &= R_j[(m-2)\beta_{m-2,j}+(1-m)\beta_{m,j}-\beta_{-m,j}] \\ &\quad +R_j^{-1}[(m-1)\beta_{m-2,j}-\beta_{-m+2,j}-m\beta_{m,j}]-\delta_{m,j} \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

我们再对(1.8)中等号右边进行 Fourier 展开，它的展开系数为：

$$A_{m,j} = -\frac{2}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n+1}B_{2n+m+1,j} \qquad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1.10}$$

这是由边界应力条件得出的一个简练关系.

二、问题的基本代数方程组

在实际计算中，将 $\varphi_k(z_k)$ 截为有限项：

$$\varphi_k(z_k) = \sum_{n=0}^{2M-1} F_{n,k} z_k^{-(n+1)}$$

这时，在第 j 个缺口附近，$\varphi'(z)$ 为：

$$\varphi'(z) = \sum_{n=0}^{2M-1}(F_{n,j}z_j^{-(n+1)}+M_{n,j}z_j^n) \tag{2.1}$$

利用文[1]中的(2.11)以及：

$$z_j^{-(n+1)} = \left(\frac{e_j}{2}R_j\zeta\right)^{-(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}(R\zeta)^{-2k}$$

代入(2.1)，我们有如下关系：

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{2m+1,j}+i\beta_{2m+1,j} &= \sum_{n=m}^{M-1}(-1)^{m-n}\left(\frac{e_j}{2}\right)^{2n+1}\binom{2n+1}{n-m}R_j^{2m+1}M_{2n+1,j} \\ \alpha_{2m+2,j}+i\beta_{2m+2,j} &= \sum_{n=m+1}^{M-1}(-1)^{m+1-n}\left(\frac{e_j}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n-m-1}R_j^{2m+2}M_{2n,j} \\ \alpha_{0,j}+i\beta_{0,j} &= M_{0,j}+\sum_{m=1}^{M-1}\binom{2m}{m}(-1)^m\left(\frac{e_j}{2}\right)^{2m}M_{2m,j} \\ \alpha_{-(2m+1),j}+i\beta_{-(2m+1),j} &= \sum_{n=0}^{m}\left(\frac{e_j}{2}\right)^{-(2n+1)}\binom{m+n}{m-n}R_j^{-(2m+1)}F_{2n,j} \\ &\quad -\sum_{n=m}^{M-1}(-1)^{m-n}\left(\frac{e_j}{2}\right)^{2n+1}\binom{2n+1}{n-m}R_j^{-(2m+1)}M_{2n+1,j} \\ \alpha_{-(2m+2),j}+i\beta_{-(2m+2),j} &= \sum_{n=0}^{m}\left(\frac{e_j}{2}\right)^{-(2n+2)}\binom{m+n+1}{m-n}R_j^{-(2m+2)}F_{2n+1,j} \\ &\quad +\sum_{n=m+1}^{M-1}(-1)^{m+1-n}\left(\frac{e_j}{2}\right)^{2n}\binom{2n}{n-m-1}R_j^{-(2m+2)}M_{2n,j} \\ &\qquad (m=0,1,\cdots,M-1) \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

再将(1.10)改写为：

$$\left.\begin{aligned} A_{2m+1} &= \sum_{n=-(M+m)}^{M-m-1}\left(-\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{2n+1}B_{2m+2n+2,j} \qquad (m=-M,-M+1,\cdots,M-1) \\ A_{2m} &= \sum_{n=-(M+m)}^{M-m-1}\left(-\frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{2n+1}B_{2m+2n+1,j} \qquad (m=-M,-M+1,\cdots,M-1) \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

综合(1.1)，(1.9)，(2.2)，(2.3)，我们以 $F_{n,j}$，$M_{n,j}$，$\alpha_{m,j}$，$\beta_{m,j}$ 为未知数，计有N个缺口，共得以 $16\times M\times N$个未知数的 $16\times M\times N$ 个方程，故方程组可解。

三、缺 口 群 的 计 算

运用上节的基本代数方程组，对两个具体例子做了数值计算，结果分别以图表示出如下：

首先，我们计算了二个相同半圆缺口的无限远拉伸情况（图3）．计算结果如表1所示，其中$L=R/d$.

表 1　　缺口底部A点处的应力σ_x

L	0.48	0.45	0.4	0.3	0.2	0.1	0.075	0.05	0.01	0.001
σ_x/σ_∞	2.6101	2.6211	2.6404	2.7004	2.8117	2.9789	2.9996	3.0267	3.0610	3.0651

由上述结果看出，多个边界缺口的存在削弱了应力集中．又当$L\ll 1$时，应力集中向单边

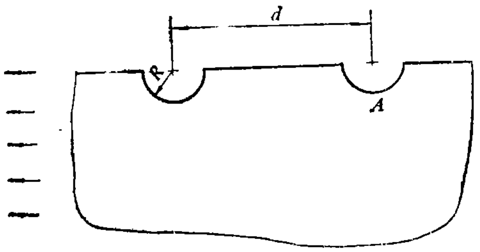

图 3　二个相同的半圆缺口

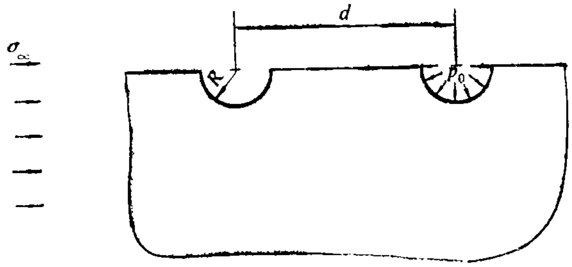

图 4　一个半圆缺口上作用有分布力

缺口时情况趋近。这与 O. L. Bowie[2]得到的单边半圆缺口结果完全吻合。

其次，对于二个相同半圆缺口其中一个作用有正压力 p_0，另一为自由的情况也作了计算，结果示如表2。$L=R/d$。

表 2　　缺口底部A点处的应力σ_x

L	0.46	0.45	0.4	0.35	0.3	0.25	0.2	0.1	0.05	0.01	0.005
σ_x/p_0	0.8213	0.7913	0.6826	0.5718	0.4638	0.3554	0.2495	0.0748	0.0187	0.0007	0.0000

由计算结果看出，当二个缺口邻近时，一个缺口上受分布力将在另一缺口上引起同量级的应力σ_x，而当二个缺口离散开来时，一个缺口上受分布力几乎不影响到另一缺口。

在上述计算过程中，我们把基本代数方程组最后归化成只含系数 $F_{n,k}$ 的方程组。当$M=10$时，$F_{n,k}$的最后一项的数量级为 $10^{-4}\sim10^{-5}$，计算结果已达到足够的精度。这样就说明这里所提供的方法是行之有效的。

参 考 文 献

[1] 欧阳鬯，关于任意边界缺口或裂纹群问题的一类解法(Ⅰ)解析方法，应用数学和力学，1,2(1980)，159—166.

[2] Bowie, O. L., Analysis of edge notches in a semi-infinite region, *J. Math. and Phys.*, 45(1966), 356.

On a Class of Method for Solving Problems with Random Boundary Notches and/or Cracks——(Ⅱ) Computations for Boundary Notches

Ouyang Chang Zu Hang

(*Department of Mathematics, Fudan University, Shanghai*)

Abstract

This work is the continuation of the discussion of [1] by C. Ouyang (Appl. Math. & Mech., Vol. 1, No.2, 1980). Here computations for boundary notches are made by using the method of [1]. Numerical results show that the method presented here is quite workable in practical computations.