

文章编号: 1000-0887(2004)11-1169-13

具时滞的人类呼吸系统模型的稳定性与分支*

沈启宏^{1,2}, 魏俊杰²

(1. 迈阿密大学 数学系, P. O. Box 249085, 迈阿密 美国;
2. 哈尔滨工业大学 数学系, 哈尔滨 150001)

(我刊原编委林宗池推荐)

摘要: 研究了描述人类呼吸系统的具时滞的二维微分方程的平凡解的稳定性和 Hopf 分支. 利用规范型理论和中心流形定理给出了关于分支周期解的稳定性及 Hopf 分支方向等的计算公式, 且进行了数值模拟计算.

关键词: 呼吸系统; 时滞; 稳定性; 分支

中图分类号: O175.13 文献标识码: A

1 引言与模型

许多动力学的系统都可以用具时滞的微分方程对其加以数学刻画. 如专著[1]介绍了机械动力系统中提出的具两个时滞的微分方程的研究. 本文主要对描述人类呼吸系统的二维时滞微分方程进行定性分析. 为方便, 我们首先叙述模型的建立.

人类的呼吸系统可以由两个功能单位来描述(见图 1):“工厂”和“调节器”. 在“工厂”中, CO_2 进行交换,“调节器”调节身体中 CO_2 的部分压力.“工厂”由两部分组成(见图 2):“组织”(体积 V_T , CO_2 浓度 C_T)和“肺”(体积 V_L , CO_2 浓度 C_L). 在“组织”中进行新陈代谢产生 CO_2 (新陈代谢过程中 CO_2 产率为 M), 在“肺”中肺内 CO_2 与外界 CO_2 进行交换(外界进入肺的 CO_2 为 $\mathcal{V}C_I$, 肺中输出 CO_2 为 $\mathcal{V}C_L$). 再由血流 Q 从“组织”中把 CO_2 运输到“肺”中(静脉血流运输的 CO_2 为 QC_V) 且把“肺”中 CO_2 运输到“组织”中(动脉血流运输的 CO_2 为 QC_A).

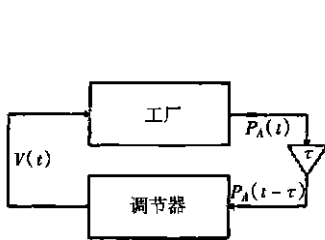


图 1 呼吸系统的简图

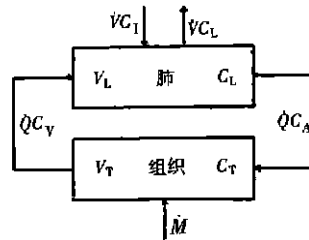


图 2 “工厂”的图解式结构

* 收稿日期: 2003_03_06; 修订日期: 2004_07_15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19831030)

作者简介: 沈启宏(1976—),女,吉林省吉林市人,美国迈阿密大学博士(联系人, E-mail: sqh11@yahoo.com).

由于“组织”中和“肺”中 CO_2 的质量守恒可以列出方程组

$$\begin{cases} \frac{d(V_T C_T(t))}{dt} = Q C_A(t) - Q C_V(t) + M, \\ \frac{d(V_L C_L(t))}{dt} = Q C_V(t) - Q C_A(t) + V(t) C_I - V(t) C_L(t). \end{cases} \quad (1)$$

若令在组织, 动脉血, 静脉血中的浓度 C 与相应的部分压力 P 的关系为

$$C_{T,A,V}(t) = \alpha P_{T,A,V}(t) + \beta, \quad (2)$$

其中 α, β 是常数, 描述 CO_2 的分离曲线.

动脉血和“肺”之间的平衡, 静脉血和“组织”之间的平衡分别为

$$P_A(t) = P_L(t), \quad P_V(t) = P_T(t). \quad (3)$$

外界和“肺”中的 CO_2 浓度和相应的部分压力之间的关系为

$$C_{I,L}(t) = \frac{P_{I,L}(t)}{B}, \quad (4)$$

其中 B 是大气压减去水蒸汽压力.

控制函数 F 通过动脉血中的部分压力控制着“肺”中的空气流:

$$V(t) = F(P_A(t - \tau)). \quad (5)$$

则系统(1)被转化为

$$\begin{cases} \frac{dP_T(t)}{dt} = -\frac{Q}{V_T} P_T(t) + \frac{Q}{V_T} P_L(t) + \frac{M}{\alpha V_T}, \\ \frac{dP_L(t)}{dt} = \frac{\alpha Q \beta}{V_L} P_T(t) - \frac{\alpha Q \beta}{V_L} P_L(t) - \\ \quad \frac{1}{V_L} (P_L(t) - P_I) F(P_L(t - \tau)), \end{cases} \quad (6)$$

其中 $Q, M, V_T, V_L, \alpha, B, P_I > 0, \tau \geq 0$.

由于生理上的特征, 我们有下面两条限制:

$$(C1) \quad P_A = P_L, \quad P_A > P_I$$

(C2) 控制函数 $F(x)$ 是定义在 \mathbf{R}^+ 上的连续的正函数. 当 $x \leq x_0$ 时, 它等于零, 当 $x > x_0$ 时它有严格正导数.

关于模型(6)的更详细的解释参阅文献[2].

本文中, 我们取线性控制:

$$F(x) = \delta(x - \gamma), \quad \text{当 } x \geq \gamma; \quad F(x) = 0, \quad \text{当 } 0 \leq x \leq \gamma,$$

其中 $\delta > 0$ 为人呼吸到的空气流, γ 为窒息域.

对系统(6), 文[2]和[3]以时滞 τ 为参数分别讨论了其平凡解的稳定性和不稳定性. 从上述模型的意义不难看出, 对不同的个体, 呼吸到的空气流是不同的. 地域不同, 吸进的气体的气压不同. 本文将以 δ, P_I 为参数, 讨论系统(6)的平凡解的稳定性与 Hopf 分支存在性及 Hopf 分支性质的计算. 另外我们还进行了计算机数值模拟计算.

2 平凡解的稳定性与 Hopf 分支的存在性

命题 2.1 系统(6)有唯一平衡解 (P_T, P_L) .

证明 设系统(6)的平衡解为 $(P_T(t), P_L(t)) \equiv (P_T, P_L)$,

则有

$$-\frac{Q}{V_T}P_T + \frac{Q}{V_T}P_L + \frac{M}{\alpha V_T} = 0,$$

$$\frac{\alpha B}{V_L}P_T - \frac{\alpha B}{V_L}P_L - \frac{1}{V_L}(P_L - P_1)F(P_L) = 0,$$

即 $P_T = P_L + M/(\alpha Q)$,

$$F(P_L) = \frac{BM}{P_L - P_1}.$$

因为 $B > 0, M > 0, P_L > P_1$ (由限制(C1)), F 满足限制(C2), 所以第二个方程有唯一解 P_L , 所以系统(6)有唯一平衡解 $(P_L + M/(\alpha Q), P_L)$. 证毕.

令 $x(t) = P_T(t) - P_T, y(t) = P_L(t) - P_L$, 代入(6)有

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + ay(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - (b+c)y(t) - ly(t-\tau) - dy(t)y(t-\tau), \end{cases} \quad (7)$$

其中 $a = \frac{Q}{V_T} > 0, b = \frac{\alpha B}{V_L} > 0, c = \frac{BM}{V_L(P_L - P_1)} > 0,$

$$l = \frac{\delta(P_L - P_1)}{V_L} > 0, d = \frac{\delta}{V_L} > 0.$$

(7)的线性部分为

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + ay(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} = bx(t) - (b+c)y(t) - ly(t-\tau). \end{cases} \quad (8)$$

以 l 为参数(这是合理的, 我们可以使 P_1, δ 改变, 而 $P_L - P_1$ 恒定.)

系统(8)的特征方程为

$$\Delta(\lambda, l) = \begin{vmatrix} -a - \lambda & a \\ b & -(b+c) - l e^{-\lambda\tau} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda(a+b+c) + ac + (\lambda + al)e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (9)$$

引理 2.1 当 $l = 0$ 时, $\Delta(\lambda, l)$ 的零点具严格负实部.

证明 当 $l = 0$ 时, $\Delta(\lambda, 0) = \lambda^2 + \lambda(a+b+c) + ac = 0,$

$$\operatorname{Re}(\lambda) = -\frac{a+b+c}{2} < 0.$$

证毕.

引理 2.2 方程(9)当 $l = l_j$ 时有唯一一对简单的纯虚根 $\pm i\omega_j$; 且当 $l \in [0, l_0)$ 时方程(9)所有根都具严格负实部. 其中 $l_0 = \min\{l_j\},$

$$l_j = \frac{\omega_j}{\sin \omega_j \tau} + \frac{ab\omega_j}{(\omega_j + a^2)\sin \omega_j \tau},$$

$\omega_j \in (2(j-1)\pi/\tau, 2j\pi/\tau), 2(j-1)\pi/\tau < \omega_j < 2j\pi/\tau, j = 1, 2, \dots$ 是方程

$$\tan \omega\tau = -\frac{\omega^3 + (a^2 + ab)\omega}{(b+c)\omega^2 + a^2c} \quad (10)$$

的根; $l = l_0$ 时, (9)的根除 $\pm i\omega_0$ 外其它根都具严格负实部.

证明 $i\omega (\omega > 0)$ 为(9)的纯虚根, 当且仅当 ω 满足

$$\Delta(i\omega, l) = -\omega^2 + i\omega(a+b+c) + ac + (i\omega + al)e^{-i\omega\tau} = 0.$$

实、虚部分开:

$$\begin{aligned} \omega(a + b + c) + \omega l \cos \omega \tau - a l \sin \omega \tau &= 0, \\ -\omega^2 + ac + a l \cos \omega \tau + \omega l \sin \omega \tau &= 0. \end{aligned}$$

解得

$$\begin{cases} l \cos \omega \tau = -c - \frac{b\omega^2}{\omega^2 + a^2}, & l \sin \omega \tau = \omega + \frac{ab\omega}{\omega^2 + a^2}, \\ \tan \omega \tau = \frac{\omega + \frac{ab\omega}{\omega^2 + a^2}}{-c - \frac{b\omega^2}{\omega^2 + a^2}} = -\frac{\omega^3 + (a^2 + ab)\omega}{(b+c)\omega^2 + a^2c}. \end{cases} \quad (11)$$

用 Γ_1 和 Γ_2 分别表示函数 $y = \tan \omega \tau$ 和 $y = -\frac{\omega^3 + (a^2 + ab)\omega}{(b+c)\omega^2 + a^2c}$ 的位于 ωy 平面右半平面的曲线, 于是 Γ_1 和 Γ_2 的交点 (ω_j, y_j) 中的 ω 即为(11)的根.

由(11)知 $\cos \omega \tau < 0, \sin \omega \tau > 0$, 所以 $\omega_j \in (2(j-1)\pi \tau, \pi \tau + 2\pi \tau, 2(j-1)\pi \tau + \pi \tau)$, $j = 1, 2, \dots$

如图 3 所示, Γ_1 和 Γ_2 有可列个交点 (ω_j, y_j) .

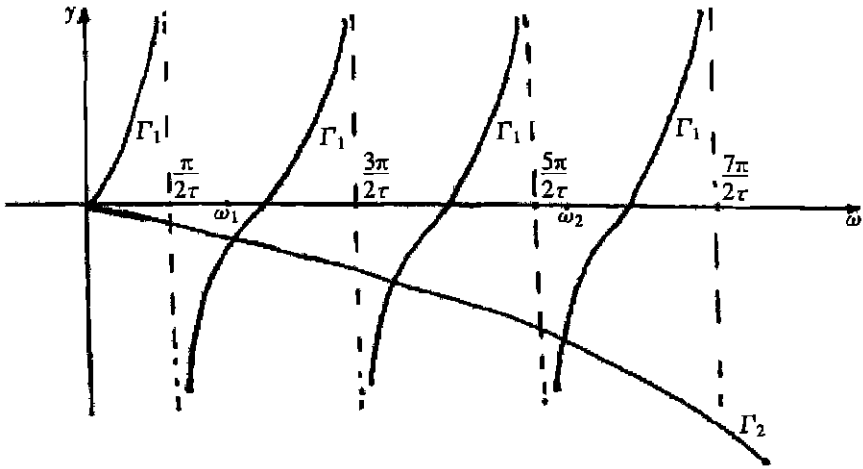


图 3

$$\text{此时 } l_j = \frac{\omega_j}{\sin \omega_j \tau} + \frac{ab\omega_j}{(\omega_j^2 + a^2) \sin \omega_j \tau}. \quad (12)$$

显然 $j \rightarrow +\infty$ 时, $l_j \rightarrow +\infty$. 定义 $l_0 = \min\{l_j\}$, $\omega_0 = \omega_{j_0}$, 则 l_0 是第一个使方程(9)产生纯虚根的参数值. 由引理 2.1 根据指数多项式的 D -划分法(参阅专著[4]), 方程(9)当 $l \in [0, l_0)$ 时所有根都具严格负实部. 当 $l = l_0$ 时, 若(9)的根除 $\pm i\omega_0$ 外有具正实部的根, 记其为 $\lambda(l)$, 即 $\text{Re } \lambda(l_0) > 0$, 由根关于参数连续性知当 $l < l_0$ 且充分靠近 l_0 时仍有 $\text{Re } \lambda(l) > 0$ 矛盾. 所以当 $l = l_0$ 时(9)的根除 $\pm i\omega_0$ 外, 其它根都具严格负实部. 证毕.

记

$$\lambda(l) = \alpha(l) + i\omega(l)$$

为(9)的满足

$$\alpha(l_j) = 0, \quad \omega(l_j) = \omega_j$$

的根, 其中 l_j 由(12)定义, 则有

引理 2.3 若 $a > b + c$ 成立, 则

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d\lambda(l)}{dl} \Big|_{l=l_j} \right] > 0$$

证明 将 $\lambda(l)$ 代入(9), 两端对 l 求导, 整理得

$$\frac{d\lambda}{dl} = \frac{\lambda + a}{\tau(\lambda + a) - l - [2i\omega + (a + b + c)]e^{i\lambda\tau}}$$

将 $l = l_j$ 代入:

$$\frac{d\lambda(l)}{dl} \Big|_{l=l_j} = \frac{i\omega_j + a}{D_1},$$

$$\text{式中 } D_1 = a l_j \tau - l_j - (a + b + c) \cos \omega_j \tau + 2 \omega_j \sin \omega_j \tau + [\tau \omega_j l_j - 2 \omega_j \cos \omega_j \tau - (a + b + c) \sin \omega_j \tau] i$$

所以

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d\lambda}{dl} \Big|_{l=l_j} \right] = \frac{1}{D_2} \left\{ [(a^2 + \omega_j^2) \tau - a] l_j - [a(a + b + c + 2\omega_j^2) \cos \omega_j \tau + [a - (b + c)] \omega_j \sin \omega_j \tau] \right\},$$

其中

$$D_2 = [a l_j \tau - l_j - (a + b + c) \cos \omega_j \tau + 2 \omega_j \sin \omega_j \tau]^2 + [\tau \omega_j l_j - 2 \omega_j \cos \omega_j \tau - (a + b + c) \sin \omega_j \tau]^2.$$

由图 3 不难发现

$$(a^2 + \omega_j^2) \tau - a > \left[a^2 + \left(\frac{\pi}{2\tau} \right)^2 \right] \tau - a = a^2 \tau - a + \frac{\pi^2}{4\tau}$$

由 $\tau > 0, 1 - 4\tau^2 < 0$ 知一元二次多项式 $a^2 \tau - a + \frac{\pi^2}{4\tau} > 0$, 所以 $(a^2 + \omega_j^2) \tau - a > 0$, 且 $\lim_{j \rightarrow +\infty} \omega_j = +\infty$, 所以对所有的 ω_j 有 $(a^2 + \omega_j^2) \tau - a > 0$. 又 $\cos \omega_j \tau < 0, \sin \omega_j \tau > 0$, 且已知 $a > b + c$, 所以有

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d\lambda}{dl} \Big|_{l=l_j} \right] > 0$$

证毕.

由 $\lim_{j \rightarrow +\infty} l_j = +\infty$, 故不妨设 $l_{j+1} > l_j$, 于是有

引理 2.4 当 $l \in (l_j, l_{j+1}]$, $j = 0, 1, 2, \dots$ 时, (9) 有 $2(j+1)$ 个具严格正实部的根.

于是由引理 2.1, 引理 2.2, 引理 2.3, 引理 2.4 和 J. Hale 在 [5] 中的第十一章的定理 1.1 可得

定理 2.1

- i) $l \in [0, l_0)$ 时, (6) 的平衡解 (P_T, P_L) 是渐近稳定的,
- ii) $l > l_0$ 时, (6) 的平衡解 (P_T, P_L) 是不稳定的,
- iii) $l_j \in \{l_j\}, j = 1, 2, \dots$ 是系统(6)的 Hopf 分支值.

3 Hopf 分支方向及稳定性

本节我们将用 [6] 中介绍的规范型方法给出系统(7)的 Hopf 分支方向, 分支周期解的稳定性的计算公式.

记 $C^k[-\tau, \bar{0}] = \{ \varphi \mid \varphi: [-\tau, \bar{0}] \rightarrow R^2, \varphi \text{ 的每个分量有 } k \text{ 阶连续导数} \}$. 为方便, 记 $C[-\tau, \bar{0}]$ 为 $C^0[-\tau, \bar{0}]$, 在 $C[-\tau, \bar{0}]$ 上定义算子族 L_l : 对 $\varphi(\theta) = (\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta))^T \in C[-\tau, \bar{0}]$,

$$L_l \varphi = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -(b+c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(0) \\ \varphi_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(-\tau) \\ \varphi_2(-\tau) \end{pmatrix}.$$

显然 L_l 是 $C[-\tau, \bar{0}]$ 到 R^2 上的有界线性算子族. 由 Riesz 表示定理, 存在一个二阶的, 分量为有界变差函数的矩阵函数

$$\eta(\cdot, l) = [-\tau, \bar{0}] \rightarrow R^2,$$

使对任意 $\varphi \in C[-\tau, \bar{0}]$, 有

$$L_l \varphi = \int_{-\tau}^0 d\eta(\theta, l) \varphi(\theta). \tag{13}$$

事实上, 取

$$\eta(\theta, l) = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -(b+c) \end{pmatrix} \delta(\theta) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -l \end{pmatrix} \delta(\theta + \tau), \tag{14}$$

即得(13)式, 其中 $\delta(\theta)$ 是 Dirac δ -函数.

对 $\varphi \in C^1[-\tau, \bar{0}]$, 定义

$$A(l) \varphi = \begin{cases} d\varphi(\theta)/d\theta, & -\tau \leq \theta < 0, \\ \int_{-\tau}^0 d\eta(s, l) \varphi(s), & \theta = 0. \end{cases}$$

和

$$R \varphi = \begin{cases} 0, & \tau \leq \theta < 0, \\ f(l, \varphi), & \theta = 0, \end{cases}$$

其中 $f(l, \varphi) = -d \begin{pmatrix} 0, \varphi_2(0) \varphi_2(-\tau) \end{pmatrix}^T$ 为(7)右端的非线性部分.

同时, 由于对 $u_t = u(t + \theta) \in C^1[-\tau, \bar{0}]$, 有 $\frac{du_t}{dt} = \frac{du_t}{d\theta}$, 记 $u = (x, y)^T$, 从而由 $L_l, A(l)$ 和 R 的定义知系统(7)可以化为抽象的常微分方程

$$\dot{u}_t = A(l) u_t + R u_t. \tag{15}$$

对 $\phi \in C([0, \bar{0}], (C^2)^*)$ 和 $\varphi \in C[-\tau, \bar{0}], C^2$, 定义内积

$$\langle \phi, \varphi \rangle = \phi(0) \varphi(0) - \int_{\theta=-\tau}^0 \int_{\xi=0}^0 \phi^T(\xi - \theta) d\eta(\theta) \varphi(\xi) d\xi$$

其中 $\eta(\theta) = \eta(\theta, l_0)$, C^2 为复平面.

对 $\alpha \in C^1([0, \bar{0}], C^2)$ 定义

$$(A^* \alpha)(s) = \begin{cases} -\frac{d\alpha(s)}{ds}, & 0 < s \leq \tau, \\ \int_{-\tau}^0 d\eta^T(t, l_0) \alpha(-t), & s = 0, \end{cases}$$

其中 η 由(14)定义, 那么算子 A^* 与算子 $A(l_0)$ 为共轭算子.

引理 3.1 向量

$$q(\theta) = \left[1, \frac{a + i\omega_0}{a} \right]^T e^{i\omega_0 \theta} \text{ 与 } q^*(s) = B \left[1, \frac{a - i\omega_0}{b} \right]^T e^{i\omega_0 s}$$

分别是 $A(l_0)$ 的关于 $i\omega_0$ 和 A^* 关于 $-i\omega_0$ 的特征向量, 并且 $\langle q^*, q \rangle = 1, \langle q^*, q \rangle = 0$, 其中

$$B = \frac{ab}{ab + (a + i\omega_0)^2 - l_0 \tau (a + i\omega_0)^2 e^{-i\omega_0 \tau}}$$

证明 设 $q(\theta)$, $q_1^*(s)$ 分别是 $A(l_0)$ 与 A^* 关于 $i\omega_0$ 和 $-i\omega_0$ 的特征向量。

则 $q(0)$ 满足

$$\begin{pmatrix} i\omega_0 & 0 \\ 0 & i\omega_0 \end{pmatrix} q(0) = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -(b+c) \end{pmatrix} q(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -l_0 \end{pmatrix} q(0) e^{-i\omega_0 \tau}$$

解得 $q(0) = \left[1, \frac{a + i\omega_0}{a} \right]^T$, 于是得

$$q(\theta) = \left[1, \frac{a + i\omega_0}{a} \right]^T e^{i\omega_0 \theta}$$

同理, $q_1^*(0)$ 满足

$$\begin{pmatrix} -i\omega_0 & 0 \\ 0 & -i\omega_0 \end{pmatrix} q_1^*(0) = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & -(b+c) \end{pmatrix} q_1^*(0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -l_0 \end{pmatrix} q_1^*(0) e^{i\omega_0 \tau}$$

解得 $q_1^*(0) = \left[1, \frac{a - i\omega_0}{b} \right]^T$, 所以 $q_1^*(s) = \left[1, \frac{a - i\omega_0}{b} \right]^T e^{i\omega_0 s}$.

下面求 B .

$$\begin{aligned} \langle q_1^*(s), q(\theta) \rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a + i\omega_0}{b} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a + i\omega_0}{a} \end{pmatrix} - \\ &\int_{\theta=0}^{\tau} \int_{\xi=0}^{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a + i\omega_0}{b} \end{pmatrix} e^{-i\omega_0(\xi-\theta)} d\eta(\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a + i\omega_0}{a} \end{pmatrix} e^{i\omega_0 \xi} d\xi = \\ &\frac{ab + (a + i\omega_0)^2 - l_0 \tau (a + i\omega_0)^2 e^{-i\omega_0 \tau}}{ab} = \frac{1}{B} \end{aligned}$$

所以 $B = \frac{ab}{ab + (a + i\omega_0)^2 - l_0 \tau (a + i\omega_0)^2 e^{-i\omega_0 \tau}}$.

令 $q^*(s) = B q_1^*(s) = B \left[1, \frac{a - i\omega_0}{b} \right]^T e^{i\omega_0 s}$, 则 $\langle q^*, q \rangle = 1$.

证毕.

下面, 我们仍采用与 [6, 7] 相同的记号.

令

$$z(t) = \langle q^*, u \rangle,$$

其中 $u_t = (x_t, y_t)$ 是方程(15) 当 $l = l_0$ 时的解.

$$\dot{z}(t) = \langle q^*, u_t \rangle = i\omega_0 z(t) + q_1^*(0) f(z, z), \quad (16)$$

其中 $f(z, z) = f(l_0, W(z, z) + 2\text{Re}\{zq\})$,

$$W(z, z) = u_t - 2\text{Re}\{zq\},$$

而

$$W(z, z) = W_{20} \frac{z^2}{2} + W_{11} z z + W_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (17)$$

再把(16) 写为

$$z\dot{x}(t) = i\omega_0 z(t) + g(z, z),$$

其中

$$g(z, z) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\dot{z} + g_{02} \frac{\dot{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \dot{z}}{2} + \dots \quad (18)$$

把(15)和(16)代入

$$\dot{W} = u\dot{x} - z\dot{q} - \dot{z}q$$

中,有

$$\dot{W} = \begin{cases} AW - 2\operatorname{Re}\left\{q^*(0)f(q(\theta))\right\}, & -\tau \leq \theta < 0, \\ AW - 2\operatorname{Re}\left\{q^*(0)f(q(0))\right\} + f, & \theta = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} AW + H(z, z, \theta),$$

其中

$$H(z, z, \theta) = H_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + H_{11}(\theta) z\dot{z} + H_{02}(\theta) \frac{\dot{z}^2}{2} + \dots \quad (20)$$

且有

$$\dot{W} = W_z z\dot{x} - W_{\dot{z}} \dot{z} = AW + H(z, z, \theta).$$

将上述相应级数展式代入,比较系数得

$$\begin{aligned} (A - 2i\omega_0)W_{20}(\theta) &= -H_{20}(\theta), \\ AW_{11}(\theta) &= -H_{11}(\theta), \\ \dots &\dots \end{aligned} \quad (21)$$

$$u_t(\theta) = W(z, z, \theta) + zq(\theta) + zq(\theta),$$

$$g(z, z) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\dot{z} + g_{02} \frac{\dot{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \dot{z}}{2} + \dots =$$

$$\begin{aligned} q^*(0)f(z, z) &= - \begin{bmatrix} B \\ a + i\omega_0 B \\ b \end{bmatrix}^T d \begin{bmatrix} 0 \\ y(t)y(t-\tau) \end{bmatrix} = \\ &= -B \frac{(a + i\omega_0)d}{b} y(t)y(t-\tau) = \\ &= -B \frac{(a + i\omega_0)d}{b} \left[W_{20}^{(2)}(0) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(0) z\dot{z} + \right. \\ &\quad \left. W_{02}^{(2)}(0) \frac{\dot{z}^2}{2} + \dots + \frac{a + i\omega_0}{a} \frac{z}{z} + \frac{a - i\omega_0}{a} \frac{\dot{z}}{\dot{z}} \right] + \\ &\quad \left[W_{20}^{(2)}(-\tau) \frac{z^2}{2} + W_{11}^{(2)}(-\tau) z\dot{z} + W_{02}^{(2)}(-\tau) \frac{\dot{z}^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{a + i\omega_0}{a} e^{-2i\omega_0 \tau} \frac{z}{z} + \frac{a - i\omega_0}{a} e^{i\omega_0 \tau} \frac{\dot{z}}{\dot{z}} \right]. \end{aligned}$$

比较系数,有

$$\begin{aligned} g_{20} &= - \frac{2B(a + i\omega_0)^3 e^{-i\omega_0 \tau} d}{a^2 b}, \\ g_{11} &= - \frac{B(a + i\omega_0)(a^2 + \omega_0^2) d}{a^2 b} (e^{i\omega_0 \tau} + e^{-i\omega_0 \tau}), \\ g_{02} &= - \frac{2B(a^2 + \omega_0^2)(a - i\omega_0) d e^{i\omega_0 \tau}}{a^2 b}, \end{aligned}$$

$$g_{21} = - Bd \frac{a + i\omega_0}{b} \left[\frac{a - i\omega_0}{a} e^{i\omega_0\tau} W_{20}^{(2)}(0) + \frac{a - i\omega_0}{a} W_{20}^{(2)}(-\tau) + \frac{2(a + i\omega_0)}{a} e^{-i\omega_0\tau} W_{11}^{(2)}(0) + \frac{2(a + i\omega_0)}{a} W_{11}^{(2)}(-\tau) \right].$$

下面求 $\theta \in [-\tau, 0)$ 时的 $W_{20}(\theta)$, $W_{11}(\theta)$.

由(19),

$$H(z, z, \theta) = - 2\text{Re} \left\{ \mathbf{q}^*(0) \mathbf{f} \mathbf{q}(\theta) \right\} = - \mathbf{q}^* \mathbf{f} \mathbf{q}(\theta) - \mathbf{q}^*(0) \mathbf{f} \mathbf{q}(\theta) = - g_{20} \mathbf{q}(\theta) - g_{02} \mathbf{q}(\theta),$$

与(20)比较系数, 得

$$H_{20}(\theta) = - g_{20} \mathbf{q}(\theta) - g_{02} \mathbf{q}(\theta), \tag{22}$$

和

$$H_{11}(\theta) = - g_{11} \mathbf{q}(\theta) - g_{11} \mathbf{q}(\theta). \tag{23}$$

由(21)和(22), 得

$$W_{20}(\theta) = 2i\omega_0 W_{20}(\theta) + g_{20} \mathbf{q}(\theta) + g_{02} \mathbf{q}(\theta),$$

又 $\mathbf{q}(\theta) = \mathbf{q}(0) e^{i\omega_0\theta}$, 所以

$$W_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\omega_0} \mathbf{q}(0) e^{i\omega_0\theta} + \frac{ig_{02}}{3\omega_0} \mathbf{q}(0) e^{-i\omega_0\theta} + E_1 e^{2i\omega_0\theta}. \tag{24}$$

同理, 由(21)和(23), 得

$$W_{11}(\theta) = g_{11} \mathbf{q}(\theta) + g_{11} \mathbf{q}(\theta),$$

且 $\mathbf{q}(\theta) = \mathbf{q}(0) e^{i\omega_0\theta}$,

$$\text{所以 } W_{11}(\theta) = - \frac{ig_{11}}{\omega_0} \mathbf{q}(0) e^{i\omega_0\theta} + \frac{ig_{11}}{\omega_0} \mathbf{q}(0) e^{-i\omega_0\theta} + E_2. \tag{25}$$

现在只要求出(24)中的 E_1 和(25)中的 E_2 .

$$\theta = 0 \text{ 时, } H(z, z, \theta) = - 2\text{Re} \left\{ \mathbf{q}^*(0) \mathbf{f} \mathbf{q}(\theta) \right\} + \mathbf{f},$$

$$\text{其中 } \mathbf{f} = \mathbf{f}_z^2 \frac{z^2}{2} + \mathbf{f}_{zzz} + \mathbf{f}_z^2 \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

与(20)比较系数, 得

$$H_{20}(0) = - g_{20} \mathbf{q}(0) - g_{02} \mathbf{q}(0) + \mathbf{f}_z^2,$$

和

$$H_{11}(0) = - g_{11} \mathbf{q}(0) - g_{11} \mathbf{q}(0) + \mathbf{f}_{zz}.$$

再由 A 的定义及(21)有

$$\int_{-\tau}^0 d\eta(\theta) W_{20}(\theta) = 2i\omega_0 W_{20}(\theta) + g_{20} \mathbf{q}(0) + g_{02} \mathbf{q}(0) - \mathbf{f}_z^2, \tag{26}$$

和

$$\int_{-\tau}^0 d\eta(\theta) W_{11}(\theta) = g_{11} \mathbf{q}(0) + g_{11} \mathbf{q}(0) - \mathbf{f}_{zz}. \tag{27}$$

将(24)代入(26), 且注意到

$$\left[i\omega_0 I - \int_{-\tau}^0 e^{i\omega_0\theta} d\eta(\theta) \right] \mathbf{q}(0) = 0$$

和

$$\left[- i\omega_0 I - \int_{-\tau}^0 e^{-i\omega_0\theta} d\eta(\theta) \right] \mathbf{q}(0) = 0,$$

所以有

$$\text{即 } \begin{cases} \left[2i\omega_0 I - \int_{-\tau}^0 e^{2i\omega_0\theta} d\eta(\theta) \right] \mathbf{E}_1 = \mathbf{f}_z^2 \\ \left[\begin{array}{cc} 2i\omega_0 - a & -a \\ -b & 2i\omega_0 + b + c + l_0 e^{-i\omega_0\tau} \end{array} \right] \mathbf{E}_1 = \\ - \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{2d(a + i\omega_0)^2}{a^2} e^{-i\omega_0\tau} \end{array} \right] \cdot \end{cases}$$

得

$$E_1^{(1)} = \frac{-2d(a + i\omega_0)^2 e^{-i\omega_0\tau}}{(2i\omega_0 + b + c + l_0 e^{-i\omega_0\tau})(2i\omega_0 - a)a - a^2 b},$$

$$E_1^{(2)} = \frac{-2d(a + i\omega_0)^2 (2i\omega_0 - a) e^{-i\omega_0\tau}}{(2i\omega_0 + b + c + l_0 e^{-i\omega_0\tau})(2i\omega_0 - a)a^2 - a^3 b}.$$

将(25)代入(27), 同样方法, 得

$$\text{即 } \begin{cases} \left[\int_{-\tau}^0 d\eta(\theta) \right] \mathbf{E}_2 = -\mathbf{f}_z \\ \left[\begin{array}{cc} -a & a \\ b & -(b + c) - l_0 \end{array} \right] \mathbf{E}_2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{(a^2 + \omega_0^2)d}{a^2} (e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}) \end{array} \right] \cdot \end{cases}$$

得

$$E_2^{(1)} = -\frac{(a^2 + \omega_0^2)d}{a^2(c + l_0)} (e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}),$$

$$E_2^{(2)} = -\frac{(a^2 + \omega_0^2)d}{a^2(c + l_0)} (e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}).$$

所以

$$W_{20}^{(2)}(0) = -\frac{2B(a + i\omega_0)^4 e^{-i\omega_0\tau} di}{a^3 b\omega_0} - \frac{2B(a^2 + \omega_0^2) e^{-i\omega_0\tau} di}{3a^3 b\omega_0} -$$

$$\frac{2d(a + i\omega_0)^2 (2i\omega_0 - a) e^{-i\omega_0\tau}}{(2i\omega_0 + b + c + l_0 e^{-i\omega_0\tau})(2i\omega_0 - a)a^2 - a^2 b},$$

$$W_{20}^{(2)}(-\tau) = -\frac{2B(a + i\omega_0)^4 e^{-3i\omega_0\tau} di}{a^3 b\omega_0} - \frac{2B(a^2 + \omega_0^2) e^{-3i\omega_0\tau} di}{3a^3 b\omega_0} -$$

$$\frac{2d(a + i\omega_0)^2 (2i\omega_0 - a) e^{-3i\omega_0\tau}}{(2i\omega_0 + b + c + l_0 e^{-i\omega_0\tau})(2i\omega_0 - a)a^2 - a^3 b},$$

$$W_{11}^{(2)}(0) = -\frac{B(a + i\omega_0)^2 (a^2 + \omega_0^2) di}{a^3 b\omega_0} (e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}) -$$

$$\frac{dB(a - i\omega_0)^2 (a^2 + \omega_0^2) i}{a^3 b\omega_0} (e^{-i\omega_0\tau} + e^{i\omega_0\tau}) -$$

$$\frac{(a^2 + \omega_0^2)d}{a^2(c + l_0)} (e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}),$$

$$W_{11}^{(2)}(-\tau) = -\frac{B(a + i\omega_0)^2 (a^2 + \omega_0^2) di}{a^3 b\omega_0} (e^{-i\omega_0\tau} + e^{-3i\omega_0\tau}) -$$

$$\frac{B(a - i\omega_0)^2 (a^2 + \omega_0^2) di}{a^3 b\omega_0} (e^{-i\omega_0\tau} + e^{-3i\omega_0\tau}) -$$

$$\frac{(a^2 + \omega_0^2)d}{a^2(c + l_0)}(e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}) \cdot$$

这样可以得到 g_{21} 的公式。代入

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left[g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right] + \frac{g_{21}}{2},$$

得

$$c_1(0) = \frac{B^2 d^2 (a + i\omega_0)^4 (a^2 + \omega_0^2) i}{a^4 b^2 \omega_0} (3 + e^{-i\omega_0\tau} + 2e^{-2i\omega_0\tau} + 2e^{-3i\omega_0\tau}) +$$

$$\frac{d^2 |B|^2 (a^2 + \omega_0^2)^3 i}{3a^4 b^2 \omega_0} [4 + 3e^{-i\omega_0\tau} + 3e^{-2i\omega_0\tau} + 4e^{-3i\omega_0\tau} +$$

$$2(6\cos^2 \omega_0\tau - 1)] + \frac{Bd^2 (a^2 + \omega_0^2) (a^2 + i\omega_0)^2 (2i\omega_0 - a)}{(2i\omega_0 + b + c + l_0 e^{-2i\omega_0\tau}) (2i\omega_0 - a) a^3 b - a^4 b^2} \times$$

$$(1 + e^{-3i\omega_0\tau}) + \frac{Bd^2 (a + i\omega_0)^2 (a^2 + \omega_0^2)}{a^3 b (c + l_0)} \times$$

$$(1 + e^{-i\omega_0\tau} + e^{-2i\omega_0\tau} + e^{2i\omega_0\tau}) \cdot$$

定理 3.1 $l = l_0$ 是系统(7)的 Hopf 分支值, 分支方向由

$$\mu_2 = -\operatorname{Re} c_1(0) / \alpha'(l_0)$$

确定; 分支周期解的稳定性由

$$\beta_2 = 2\operatorname{Re} c_1(0)$$

确定。

上述结果为计算 Hopf 分支的性质提供了清晰的公式。当 a, b, c 满足引理 2.3 时, 就可以用计算机进行模拟计算。

下面给出三个数值计算的例子。

例 1 取 $B = 713 \text{ mmHg}$, $M = 4.75 \text{ mLCO}_2\text{s}^{-1}$, $P_1 = 0.3 \text{ mmHg}$,

$$Q = 100 \text{ mLs}^{-1}, V_L = 3200 \text{ mL}, V_T = 1500 \text{ mL},$$

$$\alpha = 0.00065 \text{ mLCO}_2\text{mL}^{-1}\text{mmHg}, \tau = 6.1 \text{ s},$$

$$\delta = 27.4 \text{ mLs}^{-1}\text{mmHg}^{-1}, \gamma = 36.9 \text{ mmHg} \cdot$$

由(7)有 $a \approx 0.067$, $b \approx 0.014$, $c \approx 0.027$, $d \approx 0.0086$ 。

由引理 2.2 得 $\omega_0 \approx 0.27796$, $l_0 \approx 0.283352$ 。

应用 [10] 中介绍的软件系统, 可算得

$$c_1(0) \approx -0.0332751 + 0.0490205i \cdot$$

该计算结果表明, 在上述数据下, 分支周期解是具渐近相位的轨道渐近稳定的。又由 $\alpha'(l_0) > 0$, 故分支方向为 $\mu > 0$, 即 $l > l_0$, 所以分支是上临界的。

例 2 取 $B = 710 \text{ mmHg}$, $M = 4.62 \text{ mLCO}_2\text{s}^{-1}$, $P_1 = 0.5 \text{ mmHg}$,

$$Q = 120 \text{ mLs}^{-1}, V_L = 3400 \text{ mL}, V_T = 1600 \text{ mL},$$

$$\alpha = 0.00072 \text{ mLCO}_2\text{mL}^{-1}\text{mmHg}^{-1}, \tau = 7.1 \text{ s},$$

$$\delta = 26.3 \text{ mLs}^{-1}\text{mmHg}^{-1}, \gamma = 35.1 \text{ mmHg} \cdot$$

由(7), $a \approx 0.075$, $b \approx 0.081$, $c \approx 0.025$, $d \approx 0.0077$ 。

由引理 2.2 得 $\omega_0 \approx 0.239777$, $l_0 \approx 0.247042$ 。

同理可算得 $c_1(0) \approx -0.0185366 + 0.027206i \cdot$

在上述数据下, 分支周期解是具渐近相位的轨道渐近稳定的. 又 $\alpha'(l_0) > 0$ 故分支方向为 $\mu > 0$, 即 $l > l_0$, 所以分支是上临界的.

例3 取 $B = 708 \text{ mmHg}$, $\dot{M} = 4.68 \text{ mLCO}_2\text{s}^{-1}$, $P_1 = 0.4 \text{ mmHg}$,

$$Q = 130 \text{ mLs}^{-1}, V_L = 3\,600 \text{ mL}, V_T = 1\,700 \text{ mL},$$

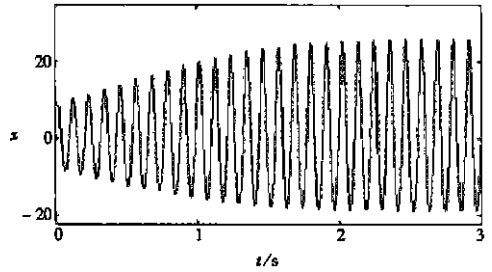
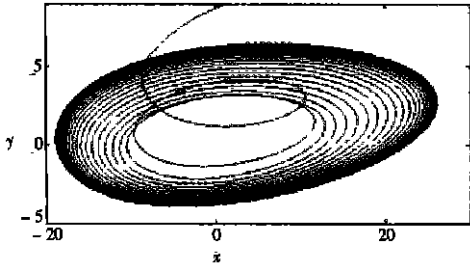
$$\alpha = 0.000\,68 \text{ mLCO}_2\text{mL}^{-1}\text{mmHg}^{-1}, \tau = 6.5 \text{ s},$$

$$\delta = 26.6 \text{ mLs}^{-1}\text{mmHg}^{-1}, \gamma = 35.6 \text{ mmHg}.$$

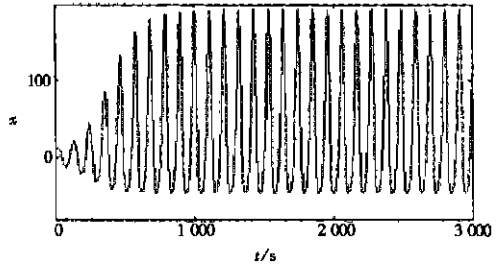
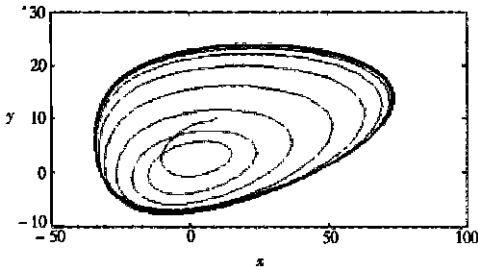
由(7), $a \approx 0.076$, $b \approx 0.017$, $c \approx 0.024$, $d \approx 0.007\,4$.

由引理 2.2 得 $\omega_0 \approx 0.242$, $l_0 \approx 0.267\,019$.

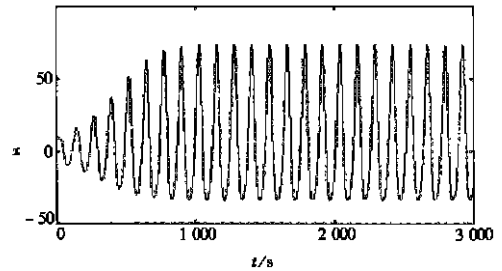
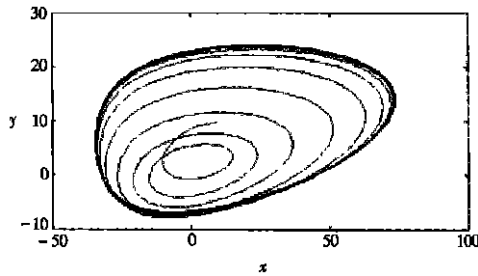
同理可算得 $c_1(0) \approx -0.019\,697\,8 + 0.028\,997\,2 i$.



(a) $a = 0.067$, $b = 0.014$, $c = 0.027$, $d = 0.086$, $l = 0.3$



(b) $a = 0.075$, $b = 0.081$, $c = 0.025$, $d = 0.007\,7$, $l = 0.3$



(c) $a = 0.076$, $b = 0.017$, $c = 0.024$, $d = 0.074$, $l = 0.3$

图4 方程(7)的实域图和相图

在上述例题中, 分支周期解是具渐近相位的轨道渐近稳定的. 又 $\alpha'(l_0) > 0$ 故分支方向为 $\mu > 0$, 即 $l > l_0$, 所以分支是上临界的.

基于以上三组数据, 下面用 Matlab 分别绘出了图4的(a), (b), (c). 相应的初始值分别为 $x(t) = 10$, $y(t) = 10$; $x(t) = 12$, $y(t) = 12$; $x(t) = 10$, $y(t) = 10$.

[参 考 文 献]

- [1] 刘正荣, 李继彬. 哈密顿系统与带时滞微分方程的周期解[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [2] Vielle B, Chauvet G. Delay equation analysis of human respiratory stability[J]. *Mathematical Biosciences*, 1998, **152**: 105—122.
- [3] Vielle B, Chauvet G. Mathematical study of periodic breathing as an instability of the respiratory system[J]. *Mathematical Biosciences*, 1993, **114**: 149.
- [4] 秦元勋, 王联, 刘永清, 等. 带有时滞的动力系统的运动的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1989.
- [5] Hale J, Lunel S V. *Introduction to Functional Differential Equations* [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [6] Hassard B, Kazarinoff N, Wan Y H. *Theory of Applications of Hopf Bifurcation* [M]. London Math. Soc Lect Notes Series, **41**. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [7] Kazarinoff N, Wan Y H, Van den Driessche P. Hopf bifurcation and stability of periodic solutions of differential-difference and integro-differential equations[J]. *J Inst Math Appl*, 1978, **21**: 461—477.
- [8] 裘宗燕. *Mathematica 数学软件系统的应用及其程序设计*[M]. 北京: 北京大学出版社, 1996.
- [9] Glass L, Mackey M C. Pathological conditions resulting from instabilities in physiological control system[J]. *Ann NY Acad. Sci*, 1979, **316**: 214.
- [10] Cooke K, Grossman Z. Discrete delay, distributed delay and stability switches[J]. *J Math Anal Appl*, 1982, **86**: 592—627.

Stability and Bifurcation of a Human Respiratory System Model With Time Delay

SHEN Qi_hong^{1,2}, WEI Jun_jie²

(1. Department of Mathematics, University of Miami, P. O. Box 249085,

Coral Gables, FL 331244_4250, U S A;

2. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: The stability and bifurcation of the trivial solution in the two-dimensional differential equation of a model describing human respiratory system with time delay were investigated. Formulas about the stability of bifurcating periodic solution and the direction of Hopf bifurcation were exhibited by applying the normal form theory and the center manifold theorem. Furthermore, numerical simulation was carried out.

Key words: respiratory system; time delay; stability; bifurcation