非线性弹性理论的泛变分原理*

郑　泉　水

（江西工学院土建系，1983年4月18日收到）

摘　　要

本文从泛能量泛函[注]出发，提出并证明了非线性弹性理论静力学（或动力学）的非保守、有跳变和分区问题的统一变分原理——泛变分原理[注]．由泛能量待定泛函出发可直接得出各种变分原理．

一、前　　言

近代，由于新材料、新工艺的采用提出了大量非线性问题，促使国际范围内对非线性力学研究的蓬勃发展和普遍重视．在古典弹性理论中，为简化讨论起见，常常假设体系是保守的，即荷载做功与路径无关．经过几十年的努力，现在对这一类问题已建立了一套较完整的变分理论[1]-[7]．但是，对非线性问题，尤其是大位移问题，体系却常常是非保守的，即荷载在使物体发生位移和变形的过程中，其“输入功”与路径有关．严格来讲，力学问题绝大多数是非保守的．本文认为，能够将这一类荷载表征出来，从而仍然可借助于变分法这一数学工具．虽然这样做又将增加一些变分意义下的近似项，但却提出了解决非线性力学非保守问题的一条新途径．已见文献[8]也是沿这一思路对古典线性弹性理论中非保守问题作了讨论，故沿用文献[8]的叫法，称这种变分原理为**拟变分原理**．本文尚进一步导出包含有跳变项的分区的**泛变分原理**，可望用于位错理论、断裂理论；可有助于建立有关上述方面的非线性问题的有限元理论．

泛变分原理是无约束的变分原理，它的建立是通过用Lagrange待定乘子构造出泛能量待定泛函，取拟驻值完成的．我们尚进一步对各种变分原理：广义的（或经典的）、完全的（或非完全的）作了统一论述，看出它们出自一体——泛能量待定泛函．我们还将看到如何用拟变分原理来构造混合边界问题的变分泛函．相应于动力学问题则给出各种泛Hamilton原理．本文所用符号主要引自文献[2]～[4]，文中一般不再另加说明．

二、非线性弹性理论的泛变分原理

我们称分区的、有跳变的、广义完全的和非保守的变分原理为**泛变分原理**．本节只对静

* 郭仲衡推荐．

[注]　此系作者所命名的术语．

力学问题作出讨论．研究初始在面A_0紧邻的两个体域$\overset{1}{V}$，$\overset{2}{V}$给出结果，但不难推广到N个分域问题．

1．基本关系与边界条件

本文一律采用Lagrange坐标描述法．设$\mathbf{T}$为Kirchhoff应力张量；$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$为Piola应力张量；变形梯度$\mathbf{F}=(\mathbf{I}+\mathbf{u}\nabla)$；$\mathbf{E}$为应变张量；$\mathbf{I}$,$\mathbf{u}$和$\nabla$分别为单位张量、位移矢量和Hamilton微分算子；ρ_0代表拖带体积元素质量密度．我们知道，处于真实状态下的应力$\boldsymbol{\tau}$，$\mathbf{T}$和位移$\mathbf{u}$与应变$\mathbf{E}$满足下列关系和条件：

平衡条件

平衡方程　$\overset{\alpha}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\nabla+\rho_0\overset{\alpha}{\mathbf{f}}=0$　（在$\overset{\alpha}{V}$内，$\alpha=1,\ 2$）

下面为了简化起见，不至于混淆问题，有时省写方程中的顶标“α”，故上式写成

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla+\rho_0\mathbf{f}=0\qquad(\text{在}\overset{\alpha}{V}\text{内})\tag{2.1a}$$

或

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\rho_0\mathbf{f}=0\qquad(\text{在}\overset{\alpha}{V}\text{内})\tag{2.1b}$$

力的边界条件

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_N\qquad(\text{在}\overset{\alpha}{A}_t\text{上})\tag{2.2a}$$

或

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_N\qquad(\text{在}\overset{\alpha}{A}_t\text{上})\tag{2.2b}$$

其中A_t和$\mathbf{N}$分别为力边界界面和边界面外法向单位矢量．

连续条件　在$\overset{1}{V}$，$\overset{2}{V}$内无跳变，$\mathbf{u}$和$\mathbf{T}$是连续的

应变位移关系

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla)\qquad(\text{在}\overset{\alpha}{V}\text{内})\tag{2.3}$$

位移边界条件

$$\mathbf{u}=\mathring{\mathbf{u}}\qquad(\text{在}\overset{\alpha}{A}_u\text{上})\tag{2.4}$$

跳变条件

位移跳变条件

$$\overset{1}{\mathbf{u}}-\overset{2}{\mathbf{u}}=[\mathbf{u}]\qquad(\text{在}A_0\text{上})\tag{2.5}$$

应力跳变条件

$$\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{1}{\mathbf{N}}+\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{2}{\mathbf{N}}=[\mathbf{T}_N]\qquad(\text{在}A_0\text{上})\tag{2.6}$$

关于跳变条件(2.5)、(2.6)，我们约定，在A_0上：

$$[\mathbf{u}]\neq0,\ \text{则}[\mathbf{T}_N]=0\tag{2.7a}$$

和

$$[\mathbf{T}_N]\neq0,\ \text{则}[\mathbf{u}]=0\tag{2.7b}$$

本构关系　假设只讨论超弹性体[2]，此时$\mathbf{T}\sim\mathbf{E}$为可逆对应，存在应变能（密度）$\Sigma^p(\mathbf{E})$和余能（密度）$\Sigma^c(\mathbf{T})$：

$$\Sigma^p(\mathbf{E})+\Sigma^c(\mathbf{T})=\mathbf{T}:\mathbf{E}=\mathbf{E}:\mathbf{T}\qquad(\text{在}\overset{\alpha}{V}\text{内})\tag{2.8}$$

应变能型，本构方程（Ⅰ）

$$\mathbf{T}=\frac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}\qquad(\text{在}\overset{\alpha}{V}\text{内})\tag{2.9a}$$

余能型，本构方程（Ⅱ）

$$\mathbf{E}=\frac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}\qquad(\text{在}\overset{\alpha}{V}\text{内})\tag{2.9b}$$

我们时常用到的几个数学公式如下：

Green**积分公式**　对任意连续可微的张量场$\boldsymbol{\varphi}$

$$\int_V \boldsymbol{\varphi}\cdot\nabla dV=\oint_A \boldsymbol{\varphi}\cdot d\mathbf{A}=\oint_A \boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{N}dA \tag{2.10}$$

恒等式　$\boldsymbol{\tau}:(\mathbf{u}\nabla)=(\mathbf{u}\nabla):\boldsymbol{\tau}=\mathbf{E}:\mathbf{T}+\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla):\mathbf{T}$　(2.11)

$$\boldsymbol{\tau}:(\delta\mathbf{u}\nabla)=(\delta\mathbf{u}\nabla):\boldsymbol{\tau}=\delta\mathbf{E}:\mathbf{T} \tag{2.12}$$

最后指出，由于作了(2.7)的假设，跳变条件(2.5)：$[\mathbf{u}]\neq 0$ 和 (2.6)：$[\mathbf{T}_N]\neq 0$ 将不会同时出现。但为了讨论方便、协调起见，总是对(2.5)和(2.6)一并加于论述。

2．全能量泛函Π

$$\Pi\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{a=1}^{2}\left\{\int_V \boldsymbol{\tau}:\mathbf{u}\nabla dV-\int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA\right\} \tag{2.13}$$

利用(2.8)和(2.11)，可将Π分成Π^p和Π^c两部分：

$$\Pi^p\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{a=1}^{2}\left\{\int_V[\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma^c(\mathbf{T})]dV-\int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA\right\} \tag{2.14a}$$

$$\Pi^c\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{a=1}^{2}\left\{\int_V[\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^p(\mathbf{E})]dV+\int_V \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla):\mathbf{T}dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA\right\} \tag{2.14b}$$

分别叫作**势能（型）泛函和余能（型）泛函**。可以证明，对无跳变：$[\mathbf{u}]=[\mathbf{T}_N]=0$的真实应力、应变和位移情况，上述泛函必定满足

互补关系　$\Pi=\Pi^p+\Pi^c\overset{\mathrm{r}}{=}0$　(2.15)

拟驻值条件　$\delta\Pi^p+\delta Q+\delta P\overset{\mathrm{r}}{=}0$　(2.16)

$$\delta\Pi^c-\delta Q-\delta P\overset{\mathrm{r}}{=}0 \tag{2.17}$$

其中

$$\delta P=\sum_a\int_V \mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{f}\rho_0 dV \tag{2.18a}$$

$$\delta Q=\sum_a\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\delta\mathring{\mathbf{T}}_N dA \tag{2.18b}$$

反之，若满足(2.16)、(2.17)式，则约束条件(2.1)～(2.4)，(2.8)和(2.9)得以满足，故$\mathbf{u}$，$\mathbf{E}$和$\mathbf{T}$必为真实的。方程(2.16)和(2.17)分别叫**势能拟变分原理**和**余能拟变分原理**。在保守问题中，可设$\delta\mathbf{f}=\delta\mathring{\mathbf{T}}_N=0$，则(2.16)和(2.17)化为经典变分原理。

3．泛能量待定泛函

采用Lagrange**待定乘子法**[1]，我们可将(2.13)推广至不受任何约束的泛能量泛函。注意到此时独立变量$\mathbf{u}$，$\mathbf{E}$和$\mathbf{T}$两个域共30个分量；约束方程(2.1)～(2.9)共36个。取Lagrange待定乘子：

$\boldsymbol{\sigma}$：定义在$\overset{a}{V}$内的对称二阶张量场；

$\boldsymbol{\xi}$：定义在$\overset{a}{V}$内的矢量场；

$\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{\zeta}$：分别定义在$\overset{a}{A}_u$，$\overset{a}{A}_t$上的矢量场；

$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\mu}$：定义在A_0上的矢量场．

共36个分量来解除全部约束，并构造得

泛能量待定泛函：

$$\overset{*}{\Pi}=\sum\Big\{\int_V \boldsymbol{\tau}:\mathbf{u}\nabla dV-\int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA$$

$$+\int_V\Big[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla)-\mathbf{E}\Big]:\boldsymbol{\sigma}dV+\int_V(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla+\rho_0\mathbf{f})\cdot\boldsymbol{\xi}dV$$

$$+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\eta}dA+\int_{A_t}(\mathring{\mathbf{T}}_N-\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N})\cdot\boldsymbol{\zeta}dA\Big\}$$

$$+\int_{A_0}\boldsymbol{\lambda}\cdot[[\mathbf{u}]-(\overset{1}{\mathbf{u}}-\overset{2}{\mathbf{u}})]dA+\int_{A_0}\boldsymbol{\mu}\cdot[[\mathring{\mathbf{T}}_N]-(\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{1}{\mathbf{N}}+\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{2}{\mathbf{N}})]dA$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=}\overset{*}{\Pi}{}^p+\overset{*}{\Pi}{}^c \tag{2.19}$$

其中$\overset{*}{\Pi}{}^p$，$\overset{*}{\Pi}{}^c$分别叫作**泛势能待定泛函和泛余能待定泛函**：

$$\overset{*}{\Pi}{}^p=\sum\Big\{\int_V[\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma^c(\mathbf{T})]dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA$$

$$+\int_V\Big[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla)-\mathbf{E}\Big]:\boldsymbol{\sigma}dV+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\eta}dA\Big\}$$

$$+\int_{A_0}[[\mathbf{u}]-(\overset{1}{\mathbf{u}}-\overset{2}{\mathbf{u}})]\cdot\boldsymbol{\lambda}dA \tag{2.20a}$$

$$\overset{*}{\Pi}{}^c=\sum\Big\{\int[\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^p(\mathbf{E})]dV+\int_V\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla):\mathbf{T}dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA$$

$$+\int_V[\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla+\rho_0\mathbf{f}]\cdot\boldsymbol{\xi}dV+\int_{A_t}(\mathring{\mathbf{T}}_N-\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N})\cdot\boldsymbol{\zeta}dA\Big\}$$

$$+\int_{A_0}\boldsymbol{\mu}\cdot[[\mathbf{T}_N]-(\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{1}{\mathbf{N}}+\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{2}{\mathbf{N}})]dA \tag{2.20b}$$

4．泛能量变分原理

下面就来确定上述待定乘子．对(2.20a)作变分

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}^p=\sum\Big\{\int_V\Big[\mathbf{E}-\frac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}\Big]:\delta\mathbf{T}dV+\int_V(\mathbf{T}-\boldsymbol{\sigma}):\delta\mathbf{E}dV$$

$$+\int_V\Big[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla)-\mathbf{E}\Big]:\delta\boldsymbol{\sigma}dV+\int_V\delta\mathbf{u}\nabla:(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})dV$$

$$-\int_V \delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_V \mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}_N dA-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\delta\mathring{\mathbf{T}}_N dA$$

$$-\int_{A_u}\delta\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\eta}dA+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\delta\boldsymbol{\eta}dA\Big\}+\int_{A_0}[[\mathbf{u}]-(\overset{1}{\mathbf{u}}-\overset{2}{\mathbf{u}})]\cdot\delta\boldsymbol{\lambda}dA$$

$$+\int_{A_0}\boldsymbol{\lambda}\cdot[\delta[\mathbf{u}]-(\delta\overset{1}{\mathbf{u}}-\delta\overset{2}{\mathbf{u}})]dA$$

因为 $\int_V(\delta\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla}):(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})dV=\oint_A\delta\mathbf{u}\cdot(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{N}dA-\int_V\delta\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{\nabla}]dV$

故可将上式整理写成

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}^p=\sum\Big\{\int_V\Big[\mathbf{E}-\frac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}\Big]:\delta\mathbf{T}dV+\int_V(\mathbf{T}-\boldsymbol{\sigma}):\delta\mathbf{E}dV$$

$$+\int_V\Big[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla})-\mathbf{E}\Big]:\delta\boldsymbol{\sigma}dV+\int_{A_t}\delta\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{N}-\mathring{\mathbf{T}}_N]dA$$

$$+\int_{A_u}\delta\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\eta}]\,dA-\int_V\delta\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})+\rho_0\mathbf{f}]dV\Big\}$$

$$+\int_{A_0}\delta\boldsymbol{\lambda}\cdot[[\mathbf{u}]-(\overset{1}{\mathbf{u}}-\overset{2}{\mathbf{u}})]dA+\int_{A_0}\delta\overset{1}{\mathbf{u}}\cdot[(\overset{1}{\mathbf{F}}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\overset{1}{\mathbf{N}}-\boldsymbol{\lambda}]dA$$

$$+\int_{A_0}\delta\overset{2}{\mathbf{u}}\cdot[(\overset{2}{\mathbf{F}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\overset{2}{\mathbf{N}}+\boldsymbol{\lambda}]dA-\sum\int_V\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{f}\rho_0 dV-\sum\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\delta\mathring{\mathbf{T}}_N dA$$

$$+\int_{A_0}\boldsymbol{\lambda}\cdot\delta[\mathbf{u}]dA$$

令 $\delta\overset{*}{\Pi}{}^p+\delta P+\delta Q+\delta R=0$

其中 $\delta P=\sum\int_V\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{f}\rho_0 dV,\ \delta Q=\sum\int_A\mathbf{u}\cdot\delta\mathring{\mathbf{T}}_N dA,\ \delta R=-\int_{A_0}\boldsymbol{\lambda}\cdot\delta[\mathbf{u}]dA$

立即得出

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{E}=\frac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}\Big|_{\overset{a}{V}};\quad \boldsymbol{\sigma}=\mathbf{T}\Big|_{\overset{a}{V}}\\
&(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\boldsymbol{\nabla}+\rho_0\mathbf{f}=0\Big|_{\overset{a}{V}};\quad (\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_N\Big|_{\overset{a}{A}_t}\\
&\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla})\Big|_{\overset{a}{V}};\quad \mathbf{u}=\mathring{\mathbf{u}}\Big|_{\overset{a}{A}_u}\\
&\boldsymbol{\eta}=(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N})\Big|_{\overset{a}{A}_u};\quad \overset{1}{\mathbf{u}}-\overset{2}{\mathbf{u}}=[\mathbf{u}]\Big|_{A_0}\\
&\boldsymbol{\lambda}=(\overset{1}{\mathbf{F}}\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\overset{1}{\mathbf{N}}=-(\overset{2}{\mathbf{F}}\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\overset{2}{\mathbf{N}}\Big|_{A_0}
\end{aligned}\right\}\tag{2.21a}$$

最后一项表明$[\mathbf{T}_N]=0|_{A_0}$，这解释了为什么增加(2.7a)的一项约束．归纳起来，便得到下述定理：

定理 1 （泛势能拟驻值原理）无约束泛势能泛函 $\overset{*}{\Pi}{}^p_0$：

$$\overset{*}{\Pi}{}^p_0\overset{\text{df}}{=}\sum\Big\{\int_V[\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma^c(\mathbf{T})]\,dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA$$

$$+\int_V\left[\frac{1}{2}(\nabla u+u\nabla+\nabla u\cdot u\nabla)-E\right]:T\,dV-\int_{A_u}(\mathring{u}-u)\cdot(F\cdot T)\cdot N\,dA\Big\}$$

$$+\int_{A_0}[[u]-(\overset{1}{u}-\overset{2}{u})]\cdot(F\cdot T)\cdot N\,dA \tag{2.22}$$

取拟驻值时

$$\delta\,\overset{*}{\Pi}{}_0^{p}+\delta P+\delta Q+\delta R=0 \tag{2.23}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\delta P&=\sum\int_V u\cdot\delta f\rho_0\,dV\\ \delta Q&=\sum\int_{A_t} u\cdot\delta\mathring{T}_N\,dA\\ \delta R&=-\int_{A_0}[(\overset{1}{F}\cdot\overset{1}{T})\cdot\overset{1}{N}]\cdot\delta[u]\,dA\end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

给出的是真实应力、应变和位移.即满足

$$\left.\begin{aligned}&\text{平衡条件:}\\ &\quad \tau\cdot\nabla+\rho_0 f=0\Big|_{\overset{o}{V}},\quad \tau\cdot N=\mathring{T}_N\Big|_{A_t}\\ &\text{连续性条件:}\\ &\quad E=\frac{1}{2}(\nabla u+u\nabla+\nabla u\cdot u\nabla)\Big|_{\overset{o}{V}},\quad u=\mathring{u}\Big|_{A_u}\\ &\text{位移跳变条件:}\\ &\quad \overset{1}{u}-\overset{2}{u}=[u]\Big|_{A_0}\qquad([T_N]=0)\\ &\text{余能型,本构方程(II):}\\ &\quad E=\frac{d\Sigma^c(T)}{dT}\Big|_{\overset{o}{V}}\end{aligned}\right\} \tag{2.21b}$$

的解.

对$\overset{*}{\Pi}{}^c$:(2.20b)式作变分得

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}^c=\sum\Big\{\int_V\left[T-\frac{d\Sigma^p(E)}{dE}\right]:\delta E\,dV+\int_V\left(E+\frac{1}{2}\nabla u\cdot u\nabla\right):\delta T\,dV$$

$$+\int_V\delta u\nabla:[(\nabla u)\cdot T]\,dV+\int_V\delta\xi\cdot[\tau\cdot\nabla+\rho_0 f]\,dV-\int_V\delta\tau:(\xi\nabla)\,dV$$

$$+\int_{A_0+A_u+A_t}\xi\cdot(\delta\tau)\cdot N\,dA-\int_{A_u}\mathring{u}\cdot\delta\tau\cdot N\,dA$$

$$+\int_{A_t}\delta\zeta\cdot(\mathring{T}_N-\tau\cdot N)\,dA-\int_{A_t}\zeta\cdot(\delta\tau)\cdot N\,dA$$

$$+\int_V\xi\cdot\delta f\rho_0\,dV+\int_{A_t}\zeta\cdot\delta\mathring{T}_N\,dA\Big\}+\int_{A_0}\mu\cdot\delta[\mathring{T}_N]\,dA$$

$$+\int_{A_0}\delta\mu\cdot[[T_N]-(\overset{1}{\tau}\cdot\overset{1}{N}+\overset{2}{\tau}\cdot\overset{2}{N})]\,dA-\int_{A_0}\mu\cdot(\delta\overset{1}{\tau}\cdot\overset{1}{N}+\delta\overset{2}{\tau}\cdot\overset{2}{N})\,dA$$

因为$-\int_V \delta\boldsymbol{\tau}:(\boldsymbol{\xi}\nabla)dV=-\int_V(\delta\mathbf{u}\nabla):[(\boldsymbol{\xi}\nabla)\cdot\mathbf{T}]dV-\int_V(\nabla\boldsymbol{\xi}+\nabla\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u}\nabla):\delta\mathbf{T}dV$，上述经整理便成为

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}^{c}=\sum\Big\{\int_V\Big[\mathbf{T}-\frac{d\Sigma^{p}(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}\Big]:\delta\mathbf{E}dV+\int_V\delta\mathbf{u}\nabla:[((\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi})\nabla)\cdot\mathbf{T}]dV$$
$$+\int_V\Big[\mathbf{E}-(\nabla\boldsymbol{\xi}+\nabla\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u}\nabla)+\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla)\Big]:\delta\mathbf{T}dV$$
$$+\int_V\delta\boldsymbol{\xi}[\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla+\rho_0\mathbf{f}]dV+\int_{A_u}(\boldsymbol{\xi}-\mathring{\mathbf{u}})\cdot\delta\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA+\int_A(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\delta\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA$$
$$+\int_{A_0}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\mu})\cdot\delta\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA+\int_{A_t}\delta\boldsymbol{\zeta}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_N-\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N})dA\Big\}+\sum\int_V\boldsymbol{\xi}\cdot\delta\mathbf{f}\rho_0dV$$
$$+\sum\int_{A_t}\boldsymbol{\zeta}\cdot\delta\mathring{\mathbf{T}}_NdA+\int_{A_0}\boldsymbol{\mu}\cdot\delta[\mathring{\mathbf{T}}_N]dA$$

再令 $\delta\overset{*}{\Pi}{}^{c}-\sum\int_V\boldsymbol{\xi}\cdot\delta\mathbf{f}\rho_0dV-\sum\int_{A_t}\boldsymbol{\zeta}\cdot\delta\mathring{\mathbf{T}}_NdA-\int_{A_0}\boldsymbol{\mu}\cdot\delta[\mathbf{T}_N]dA=0$

得

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{T}=\frac{d\Sigma^{p}(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}\Big|_{\overset{a}{V}};\ \boldsymbol{\xi}=\mathbf{u}\Big|_{\overset{a}{V}}\\&\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla+\rho_0\mathbf{f}=0\Big|_{\overset{a}{V}};\ \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_N\Big|_{\overset{a}{A_t}}\\&\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla)\Big|_{\overset{a}{V}};\ \boldsymbol{\zeta}=\mathbf{u}\Big|_{\overset{a}{A}};\ \boldsymbol{\mu}=\mathbf{u}\Big|_{A_0}\end{aligned}\right\}\qquad(2.25a)$$

最后一个条件表明：$[\mathbf{u}]=0$，再次说明了为什么作假设(2.7b)。从而得到如下定理：

定理 2 （**泛余能拟驻值原理**）无约束泛余能泛函$\overset{*}{\Pi}{}^{c}_{0}$：

$$\overset{*}{\Pi}{}^{c}_{0}=\sum\Big\{\int_V[\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^{p}(\mathbf{E})]dV+\int_V\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla):\mathbf{T}dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA$$
$$+\int_V(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla+\rho_0\mathbf{f})\cdot\mathbf{u}dV+\int_{A_t}(\mathring{\mathbf{T}}_N-\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N})\cdot\mathbf{u}dA\Big\}$$
$$+\frac{1}{2}\int_{A_0}(\overset{1}{\mathbf{u}}+\overset{2}{\mathbf{u}})[[\mathbf{T}_N]-(\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{1}{\mathbf{N}}+\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{2}{\mathbf{N}})]dA\qquad(2.26)$$

取拟驻值时

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}^{c}_{0}-\delta P-\delta Q-\delta S=0\qquad(2.27)$$

其中

$$\delta S\overset{\text{df}}{=}\frac{1}{2}\int_{A_0}(\overset{1}{\mathbf{u}}+\overset{2}{\mathbf{u}})\cdot\delta[\mathbf{T}_N]dA\qquad(2.28)$$

给出的是真实应力、应变和位移状态，即满足

$$\left.\begin{aligned}&\text{平衡条件：}\quad\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla+\rho_0\mathbf{f}=0\Big|_{\overset{a}{V}},\ \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_N\Big|_{\overset{a}{A_t}}\\&\text{连续条件：}\quad\mathbf{E}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla)\Big|_{\overset{a}{V}},\mathbf{u}=\mathring{\mathbf{u}}\Big|_{\overset{a}{A_u}}\\&\text{应力跳变条件：}\quad\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{1}{\mathbf{N}}+\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{2}{\mathbf{N}}=[\mathbf{T}_N]\Big|_{A_0},\ ([\mathbf{u}]=0)\end{aligned}\right\}\qquad(2.25b)$$

应变能型，本构方程(Ⅰ)： $\mathbf{T}=\left.\dfrac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}\right|_{\overset{a}{V}}$

我们尚不难验证下述定理成立：

定理 3 (拟互补定理) $\overset{*}{\Pi}{}^p$和$\overset{*}{\Pi}{}^c$满足如下关系

$$\overset{*}{\Pi}{}^p+\overset{*}{\Pi}{}^c\overset{r}{=}\sum\int_{A_0}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA \tag{2.29}$$

这只需考虑到，在真实情况下，(2.19)示的$\overset{*}{\Pi}$只剩下

$$\overset{*}{\Pi}=\sum\left\{\int_V\boldsymbol{\tau}:\mathbf{u}\nabla dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA\right\}$$

再利用Green积分公式(2.10)就能看出成立。

当有跳变时，由假设(2.7)，故(2.29)又可写成

系3.1 (有位移跳变$[\mathbf{u}]\neq0$，$[\mathbf{T}_N]=0$)

$$\overset{*}{\Pi}{}^p+\overset{*}{\Pi}{}^c\overset{r}{=}\int_{A_0}[\mathbf{u}]\cdot\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{1}{\mathbf{N}}dA=-\int_{A_0}[\mathbf{u}]\cdot\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{2}{\mathbf{N}}dA \tag{2.30a}$$

系3.2 (有应力跳变$[\mathbf{T}_N]\neq0$，$[\mathbf{u}]=0$)

$$\overset{*}{\Pi}{}^p+\overset{*}{\Pi}{}^c\overset{r}{=}\int_{A_0}\overset{1}{\mathbf{u}}\cdot[\mathbf{T}_N]dA=\int_{A_0}\overset{2}{\mathbf{u}}\cdot[\mathbf{T}_N]dA \tag{2.30b}$$

系3.3 (**互补定理**，无跳变：$[\mathbf{u}]=0$，$[\mathbf{T}_N]=0$)

$$\overset{*}{\Pi}{}^p+\overset{*}{\Pi}{}^c\overset{r}{=}0 \tag{2.30c}$$

到此，我们讨论的都是两个域的分区问题．但不难看出，讨论的思路及结果均易推广至N个分区问题．

三、非线性弹性理论变分原理的统一理论

我们不难验证下述定理成立：

定理 4 在一个(或几个)约束给定的情况下的变分泛函，等价于在泛能量待定泛函$\overset{*}{\Pi}$ (或$\overset{*}{\Pi}{}^p$和$\overset{*}{\Pi}{}^c$) 中命相应于这个(些)约束的 Lagrange 待定乘子为零，而其它乘子仍按(2.21a)、(2.25a)给出

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{T}\big|_{\overset{a}{V}},\quad \boldsymbol{\eta}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}\big|_{\overset{a}{A_u}},\quad \boldsymbol{\lambda}=\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{1}{\mathbf{N}}=-\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{2}{\mathbf{N}}\big|_{A_0}\\&\boldsymbol{\xi}=\mathbf{u}\big|_{\overset{a}{V}},\quad \boldsymbol{\zeta}=\mathbf{u}\big|_{\overset{a}{A_t}},\quad \boldsymbol{\mu}=\mathbf{u}\big|_{A_0}\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

所得的特殊泛函．其中$\boldsymbol{\lambda}$，$\boldsymbol{\mu}$仍是(2.7a)、(2.7b)意义下的乘子．

该定理可作为各种完全的(或不完全的)等变分原理的基础．即可以直接利用定理 4 写出各种变分泛函．例如

1. 势能方面

系4.1：本构方程(Ⅰ)约束下所有的许可$\mathbf{u}$和$\mathbf{E}$(或$\mathbf{T}$)中，实际的$\mathbf{u}$和$\mathbf{E}$(或$\mathbf{T}$)必使下

述泛函取拟驻值.

$$\overset{*}{\Pi}{}_1^p=\sum\left\{\int_V \Sigma^p(\mathbf{E})\,dV-\int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})dA\right.$$

$$\left.+\int_V\left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla)-\mathbf{E}\right]:\mathbf{T}dV\right\}$$

$$+\int_{A_0}\left[[\mathbf{u}]-(\overset{1}{\mathbf{u}}-\overset{2}{\mathbf{u}})\right]\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA \tag{3.2}$$

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}_1^p+\delta P+\delta Q+\delta R\overset{r}{=}0 \tag{3.3}$$

若在系1中令$\delta P=\delta Q=\delta R=0$，且无跳变，就又得

系4.2 （胡海昌-鹫津久一朗广义变分原理）

本构方程（Ⅰ）约束下所有的许可u和E（或T）中，实际的u和E（或T）必使下述泛函取驻值

$$\overset{*}{\Pi}{}_2^p=\sum\left\{\int_V \Sigma^p(\mathbf{E})dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA\right.$$

$$\left.+\int_V\left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla)-\mathbf{E}\right]:\mathbf{T}dV+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA\right\} \tag{3.4}$$

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}_2^p=0 \tag{3.5}$$

在系 2 的基础上再设变形为线性小变形，又得

系4.3 （Reissner广义变分原理）线性弹性理论中，真实状态必定使得下述泛函取驻值

$$\overset{*}{\Pi}{}_3^p=\sum\left\{\int_V\left[\mu\mathrm{tr}\mathbf{E}^2+\frac{\lambda}{2}(\mathrm{tr}\mathbf{E})^2\right]dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA\right.$$

$$\left.+\int_V\left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla)-\mathbf{E}\right]:\mathbf{T}dV+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA\right\} \tag{3.6}$$

其中μ，λ均为拉梅系数.

系4.4 （拟广义势能原理）当无跳变时，本构方程约束下真实状态必定使下述泛函取拟驻值

$$\overset{*}{\Pi}{}_4^p=\sum\left\{\int_V \Sigma^p(\mathbf{E})dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}\,dA\right.$$

$$\left.+\int_V\left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla)-\mathbf{E}\right]:\mathbf{T}dV\right\} \tag{3.7}$$

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}_4^p+\delta P+\delta Q\overset{r}{=}0 \tag{3.8}$$

2. 余能方面

系4.5 本构方程（Ⅱ）约束下，真实u和E（或T）必使下述泛函取拟驻值

$$\overset{*}{\Pi}{}_1^c=\sum\left\{\int_V\Sigma^c(\mathbf{T})\,dV+\int_V\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla):\mathbf{T}dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA+\int_V(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla+\rho_0\mathbf{f})\cdot\mathbf{u}dV\right.$$

$$\left.+\int_{A_t}(\mathring{\mathbf{T}}_N-\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}]\cdot\mathbf{u}dA\right\}+\int_{A_0}\overset{1}{\mathbf{u}}\cdot\left[[\mathbf{T}_N]-(\overset{1}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{1}{\mathbf{N}}+\overset{2}{\boldsymbol{\tau}}\cdot\overset{2}{\mathbf{N}})\right]dA \tag{3.9}$$

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}_{1}^{c}-\delta P-\delta Q-\delta S\overset{\text{r}}{=}0 \tag{3.10}$$

系4.6 （拟广义余能原理）当无跳变时，本构方程（Ⅱ）约束下，真实u和E（或T）必使下述泛函取拟驻值

$$\overset{*}{\Pi}{}_{4}^{c}=\sum\left\{\int_{V}\Sigma^{c}(\mathbf{T})dV+\int_{V}\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla):\mathbf{T}dV-\int_{A}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA\right.$$

$$\left.+\int_{V}(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla+\rho_{0}\mathbf{f})\cdot\mathbf{u}dV+\int_{A_{t}}(\mathring{\mathbf{T}}_{N}-\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N})\cdot\mathbf{u}dA\right\} \tag{3.11}$$

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}_{4}^{c}-\delta P-\delta Q=0 \tag{3.12}$$

3. 动力学问题．泛Hamilton 原理

在动力学问题中，静力学平衡方程(2.1)需用Boussinesq动量方程所代替

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla+\rho_{0}(\mathbf{f}-\mathbf{a})=0 \qquad (\text{在}\overset{a}{V}\text{内}) \tag{3.13}$$

其中$\mathbf{a}=\ddot{\mathbf{u}}=\frac{d^{2}\mathbf{u}}{dt^{2}}$是加速度．假设始末时刻$t_1$，$t_2$的位移u及速度$\dot{\mathbf{u}}=\frac{d\mathbf{u}}{dt}$是给定的，即要求

$$\delta\mathbf{u}\Big|_{t_1}=\delta\mathbf{u}\Big|_{t_2}=0;\quad \delta\dot{\mathbf{u}}\Big|_{t_1}=\delta\dot{\mathbf{u}}\Big|_{t_2}=0 \tag{3.14}$$

利用这些条件，分部积分就可得到

$$\left.\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{a}\rho_{0}dt&=-\int_{t_1}^{t_2}\delta\left(\frac{1}{2}\rho_{0}\dot{\mathbf{u}}^{2}\right)dt\\ \int_{t_1}^{t_2}\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\rho_{0}dt&=-\int_{t_1}^{t_2}\delta\left(\frac{1}{2}\rho_{0}\dot{\mathbf{u}}^{2}\right)dt\end{aligned}\right\} \tag{3.15a}$$

合起来也就是

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\rho_{0}dt=-2\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{1}{2}\rho_{0}\dot{\mathbf{u}}^{2}\right)dt \tag{3.15b}$$

易见等式右边括号中的项正是动能密度，系统动能为

$$T=\sum\int_{V}\frac{1}{2}\rho_{0}\dot{\mathbf{u}}^{2}dV \tag{3.16}$$

分析$\overset{*}{\Pi}{}_{0}^{p}$，并以f－a代替其中的f，立即得到下述定理：

定理5 （泛Hamilton原理Ⅰ）真实状态必定使得下述无约束泛函取拟驻值．

$$\overset{*}{H}{}_{0}^{p}\overset{\text{df}}{=}\int_{t_1}^{t_2}(\overset{*}{\Pi}{}_{0}^{p}-T)dt \tag{3.17}$$

$$\delta\overset{*}{H}{}_{0}^{p}+\int_{t_1}^{t_2}(\delta P+\delta Q+\delta R)dt=0 \tag{3.18}$$

其中$\overset{*}{\Pi}{}_{0}^{p}$，$\delta P$，$\delta Q$和$\delta R$仍由(2.22)和(2.24)给出．

同法，可通过$\overset{*}{\Pi}{}_{0}^{c}$得

定理 6 （泛Hamilton原理Ⅱ）真实状态必定使得下述无约束泛函取拟驻值.

$$\overset{*}{H}{}_0^c \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{t_1}^{t_2}(\overset{*}{\Pi}{}_0^c+T)dt \tag{3.19}$$

$$\delta\overset{*}{H}{}_0^c-\int_{t_1}^{t_2}(\delta P+\delta Q+\delta S)dt=0 \tag{3.20}$$

通过下述定理，我们将看到定理 6 与定理 5 是等价的.

定理 7 $\overset{*}{H}{}_0^p$和$\overset{*}{H}{}_0^c$满足关系

$$\overset{*}{H}{}_0^p+\overset{*}{H}{}_0^c \overset{\mathrm{r}}{=} \sum\int_{t_1}^{t_2}\int_{A_0}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dAdt \tag{3.21}$$

定理8, 9 (Hamilton 原理Ⅲ, Ⅳ) 满足本构方程、动量方程、连续条件、力边界条件和跳变条件的真实状态必定使得下列泛函取拟驻值:

(Ⅲ) $$H_1^p=\sum\int_{t_1}^{t_2}dt\left\{\int_V\Sigma^p(\mathbf{E})dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA-T\right\} \tag{3.22}$$

$$\delta H_1^p+\int_{t_1}^{t_2}(\delta P+\delta Q+\delta R)dt=0 \tag{3.23}$$

(Ⅳ) $$H_1^c=\sum\int_{t_1}^{t_2}dt\left\{\int_V\Sigma^c(\mathbf{T})dV+\int_V\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\nabla):\mathbf{T}dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA-T\right\} \tag{3.24}$$

$$\delta H_1^c-\int_{t_1}^{t_2}(\delta P+\delta Q+\delta S)dt=0 \tag{3.25}$$

定理10 $$H_1^p+H_1^c=\sum\int_{t_1}^{t_2}dt\left\{\int_{A_0}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{N}dA+2T\right\} \tag{3.26}$$

4. 混合边界问题

为简化讨论起见，本文只考虑单个区域的静力学问题，且只考虑势能变分. 设混合边界为A_m，我们先把它看成力边界的一部分，故得

$$\overset{*}{\Pi}{}_5^p=\int_V\Sigma^p(\mathbf{E})dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t+A_m}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA \tag{3.27}$$

$$\delta\overset{*}{\Pi}{}_5^p+\delta P+\int_{A_t+A_m}\mathbf{u}\cdot\delta\mathring{\mathbf{T}}_NdA=0$$

本文想解释，我们是如何利用拟变分原理来直接得出含有混合边界的拟变分原理的. 为此假设

$$\mathring{\mathbf{T}}_N=\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{a}\qquad(\text{在}A_m\text{上}) \tag{3.28}$$

其中$\mathbf{K}=\mathbf{K}^T$为常对称张量场，$\mathbf{a}$为常矢量场.这是极一般的弹性支承情况. 注意到下式成立

$$\int_{A_m}\mathbf{u}\cdot\delta\mathring{\mathbf{T}}_NdA=\int_{A_m}\mathbf{u}\cdot\mathbf{K}\cdot\delta\mathbf{u}dA=\frac{1}{2}\delta\int_{A_m}\mathbf{u}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}dA$$

定理11 （混合边界势能拟变分原理）

$$\overset{*}{\Pi}{}_6^p=\int_V\Sigma^p(\mathbf{E})dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA-\frac{1}{2}\int_{A_m}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}+2\mathbf{a})dA \tag{3.29}$$

$$\delta \overset{*}{\Pi}{}^{r}_{6}+\delta P+\delta Q\overset{r}{=}0 \tag{3.30}$$

从构造$\overset{*}{\Pi}{}^{r}_{6}$的过程易见，我们实际上是将贮于弹性支承的能量考虑到系统中来，从而定理11是一个扩大系统的势能原理。

作者专此感谢郭仲衡、戴天民、杨桂通和杨德品老师的鼓励和指导。

参 考 文 献

[1] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，力学与实践，2(1979).
[2] 郭仲衡，《非线性弹性理论》，科学出版社，(1980).
[3] 郭仲衡，非线性弹性理论变分原理的统一理论，应用数学和力学，1，1(1980).
[4] 戴天民，论非线性弹性理论的各种变分原理，应用数学和力学，3，5(1982).
[5] 胡海昌，弹塑性理论中的一些变分原理，中国科学，4(1955).
[6] 钱伟长，《变分法及有限元》上册，科学出版社，(1980).
[7] 胡海昌，《弹性力学中的变分原理及其应用》，科学出版社，(1980).
[8] 刘殿魁、张其浩，弹性理论中非保守问题的一般变分原理，力学学报，6(1981).

Extended Variational Principle in Non-Linear Theory of Elasticity

Zheng Quan-shui

(Department of Civil Engineering, Jiangxi Institute of Technology)

Abstract

From the extended energy functional*, a unified variational principle an extended variational principle*, is given and proved in this paper. It is about the nonconservative, abrupt and divided domains static (or kinetic) system. Using the undetermined energy functional, we can immediately deduce various variational principles.

* These terms are named by the author.