

涡旋流动的空间不稳定性分析*

马 晖 扬**

(中国科学技术大学力学系, 1983年3月5日收到)

摘 要

本文研究无粘、不可压缩流体的涡旋流动的空间不稳定性, 假定扰动波的波数 $k = k_r + ik_i$ 是一复数, 而它的频率 ω 为一给定的实数. 这一假定意味着扰动沿涡旋流动的轴向随距离的增长而增长, 但不随时间而增长. 这种扰动的产生称之为空间不稳定性; 与之相对应的是时间不稳定性, 扰动波的波数 k 为一实数, 而频率 $\omega = \omega_r + i\omega_i$ 是一复数. 本文的结果表明空间不稳定性分析是全面认识涡旋流动不稳定性的一种有用的工具.

一、引 言

近几年来, 涡旋流动的不稳定性为许多作者所研究^{[1],[2],[3]}. 但是, 至今, 所有的作者都研究时间模式的不稳定性. 在稳定性分析中, 如果波数 k 为一给定的实数, 需要确定的是频率 $\omega = \omega_r + i\omega_i$, 此即所谓的时间增长模式 (或时间模式), 通过因子 $\exp[\omega_i t]$ 来决定扰动的增长率. 如果 ω_i 为正, 运动是不稳定的; 反之, 若 ω_i 为负, 运动是稳定的; 若 ω_i 为零, 称之为中性稳定模式.

与时间模式相反, 若频率 ω 为一给定的实数, 需要确定的是波数 $k = k_r + ik_i$ (一般, 它是一个复数), 那末称之为空间增长模式. 这样, 除非 $k_i = 0$, 运动将随着距离 x 的增长而指数地增长或衰减, 即扰动增加或衰减的因子为 $\exp[-k_i x]$. 将空间模式应用于流体力学稳定性分析, 如果 k_i 对所有的实频率都为正值, 该运动认为是稳定的.

Landau 和 Lifshitz (1959) 首先建议使用空间模式分析方法. J. Watson (1962) 使用空间模式研究了平面 Poiseuille 流动的弱非线性稳定性, M. Gaster (1962) 考察了时间模式和空间模式之间的关系. 此后, 空间模式被用于研究多种平行流动的稳定性问题, 例如, 射流 (J. B. Keller (1972)), 二元尾流 (W. O. Criminale (1972)) 以及平面 Poiseuille 流动 (N. Itoh (1973)).

在流体运动稳定性的实验研究中, 人们常采用某种形式的具有给定频率的强迫振荡来激发扰动. 例如, Schubauer 和 Skramstad 在 1947 年所进行的今天已经成为经典性的实验

* 周恒推荐.

** 本文是作者 1981 年在美国康奈尔大学进修期间完成的. 作者对 S. Leibovich 教授的指导与帮助表示衷心的感谢.

中, 使用振动簧片在平板边界层中激发扰动波. 在此种实验中, 频率 ω 为一给定的实数, 当扰动波列离开扰动源向外传播时, 它们沿空间将增强或衰减. 由此看来, 为了与实验结果进行比较, 稳定性的空间模式分析方法比时间模式要好一些. 但是, 迄今为止, 空间模式的使用在数学方面还没有以一种完全令人信服或完备的形式所证实. 我们知道, 空间模式分析方法不能满足上游和下游的边界条件, 因此就数学而言是可疑的. 然而, 我们应该记住, 空间模式 (实际上, 时间模式也一样) 它所以有意义, 是因为它们在描述初值问题中的作用. 空间模式本身由于在无穷远处是无界的, 是不能被认为是问题的解, 但它可以描述具有给定频率的局部扰动源激发后一段长时间的解. 我们必须正确地选择波数 k_r 的值, 使它们代表一个波包或一个波群 (对波包或波群而言, 存在着一个中心波数 k_0 , 当波数 k_r 偏离 k_0 时, 相应的波的波幅 (或强度) 衰减得很快). 因为波群以有限的速度——群速度前进, 这样当 $x \rightarrow \infty$ 时扰动的无界性只可能产生于 $t \rightarrow \infty$. 用这种方法我们可以克服扰动在无穷远处为无穷大所带来的困难, 使得空间模式的特性较之时间模式更接近于实验中观察到的稳定性性质.

一些研究结果业已证实, 空间模式分析方法正确地揭示了诸如渠道流, 边界层流动, 射流, 自由剪切流以及管流的稳定特性.

为了深入地认识涡旋流动的不稳定性, 我们用空间模式分析了无粘、不可压缩流体的涡旋流动的不稳定性.

二、问题的数学描述

我们考察无粘、不可压缩流体的涡旋流动的不稳定性. 基本流动的速度分布在圆柱坐标系中为 (见图1):

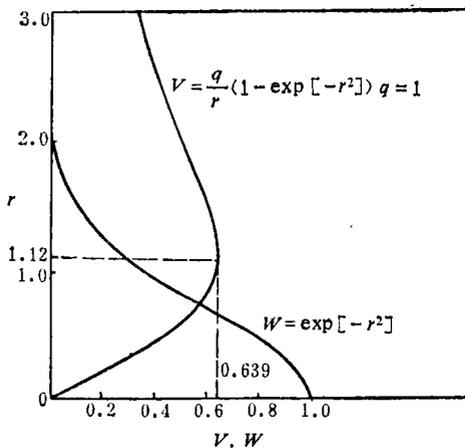


图1 基本流动速度分布

$$\left. \begin{aligned} V_r = U = 0, \quad V_x = W = \exp[-r^2] \\ V_\theta = V = \frac{q}{r}(1 - \exp[-r^2]) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

此处 q 为一常数, 它是切向速度分量和轴向速度分量相对重要性的量度. 上述速度分布类似于 Batchelor (1964) 所得到的飞机尾涡的速度分布.

该涡旋流动的基本方程是:

连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.2)$$

欧拉方程

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.3)$$

假定扰动速度为

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u}(r) \exp[i(kx + m\theta - \omega t)] \\ v &= i\bar{v}(r) \exp[i(kx + m\theta - \omega t)] \\ w &= i\bar{w}(r) \exp[i(kx + m\theta - \omega t)] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

这里, k , m 分别为轴向和切向波数, ω 是频率.

因为要研究空间模式的不稳定性, 我们取 ω 为一给定的实数, 那末波数

$$k = k_r + ik_i$$

一般为一复数。

将(2.4)式代入基本方程(2.2), (2.3), 经过一番运算以后, 得到径向扰动速度 $\bar{u}(r)$ 的二阶常微分方程:

$$G^2(r) \frac{d}{dr} \left[\frac{S(r)}{r} \frac{d}{dr} (r\bar{u}(r)) \right] - [G^2(r) + G(r)A(r) + B(r)]\bar{u}(r) = 0 \quad (2.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} G(r) &= kW(r) + \frac{mV(r)}{r} - \omega, & S(r) &= r^2/(m^2 + k^2r^2) \\ A(r) &= r \frac{d}{dr} \left[S(r) \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (G(r)) + \frac{2m}{r^3} V(r) \right) \right] \\ B(r) &= -\frac{1}{r^2} - 2kS(r)V(r) \left[k \frac{d}{dr} (rV(r)) - m \frac{dW(r)}{dr} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$\bar{u}(r)$ 的边界条件是:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(0) &= 0 & \text{当 } |m| \neq 1 \text{ 时} \\ \frac{d\bar{u}(0)}{dr} &= 0 & \text{当 } |m| = 1 \text{ 时} \\ \bar{u}(\infty) &= 0 & \text{对所有的 } m \text{ 值} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

三、数值方法

方程(2.5)加上边界条件(2.7)构成本征值问题。现已有一些解决本征值问题的数值方法, 例如, 打靶法^[1], 有限差分方法^[2], 变分法^[3]。变分法有不少优点, 它是一种直接方法, 并且能按本征值绝对值大小排列给出整个本征值谱。对于涡旋流动不稳定性时间模式分析方法, 频率 ω 作为本征值线性地出现在特征方程中, 很适于使用变分法来确定本征值。然而, 对于空间模式分析方法, 波数 k 作为本征值非线性地出现在方程(2.5)中(波数 k 出现在项 $G(r)$ 中以及在项 $S(r)$ 的分母中), 不可能用变分法来得到本征值。

在本文中, 我们选择了有限差分方法, 它在某种程度上类似于 P. W. Duck^[2]曾用来解决涡旋流动时间不稳定性时所用的方法。

将方程(2.5)改写为:

$$\frac{d^2\bar{u}(r)}{dr^2} + p(r) \frac{d\bar{u}(r)}{dr} + q(r)\bar{u}(r) = 0 \quad (3.1)$$

用常规的二阶差分格式, (3.1)式的有限差分近似是:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\Delta r p_i(r)\right)\bar{u}_{i+1} + (-2 + \Delta r^2 q_i(r))\bar{u}_i + \left(1 - \frac{1}{2}\Delta r p_i(r)\right)\bar{u}_{i-1} = 0 \quad (i=1 \sim N) \quad (3.2)$$

此处下标 i 代表在第 i 个节点上的数值, Δr 是有限差分近似的步长, N 为总节点数。

有限差分方程(3.2)的边界条件是:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_0 &= 0 & \text{当 } |m| \neq 1 \text{ 时} \\ \bar{u}_0 &= \bar{u}_1 & \text{当 } |m| = 1 \text{ 时} \\ \bar{u}_{N+1} &= 0 & \text{对所有 } m \text{ 值} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

该有限差分方程组可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_N & \beta_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

其中

$$\alpha_i = 1 - \frac{1}{2} \Delta r p_i(r), \quad \beta_i = -2 + q_i(r) \Delta r^2, \quad \gamma_i = 1 + \frac{1}{2} \Delta r p_i(r) \quad (3.5)$$

方程 (3.4) 为一齐次线性方程组, 当且只当该方程组的系数行列式的值为零时, 即

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & & & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_N & \beta_N \end{vmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

它有非平凡解。

因为线性方程组 (3.4) 是三对角线型的, 使用高斯消元法 (从最下面一行开始), 它可以很容易转化为下三角型。这样, 行列式的值等于主对角线元素的乘积, 在该乘积中包括本征值 k 。这就是说, 可以将方程 (3.6) 视作是以波数 k 为未知数的非线性高次代数方程。为此, 我们使用 Muller 方法来寻找该方程的根。P. W. Duck^[2] 是选择牛顿迭代法来确定该代数方程的根。因为 Muller 方法是二次插值方法, 所以它比牛顿法更有效; Muller 方法的另一个重要优点是它对于根的初始猜测值要求不苛刻。基于上述原因, 我们选取 Muller 方法来寻找本征值。

表 1 列出本征值的数值结果以检验它们随径向距离 R 的收敛性。

表 1

m	q	ω	Δr	R	k_r	k_i
-2.0	0.7	0.1	0.01	3.0	1.773829	-0.2720953
				4.5	1.773992	-0.2721057
				6.0	1.77387	-0.2721104
				7.5	1.773979	-0.2721170
				9.0	1.773970	-0.2721252
-1.0	0.4	0.3	0.01	3.0	0.7933409	-0.3580140
				4.5	0.7893400	-0.3757217
				6.0	0.7906173	-0.3767459
				7.5	0.7907400	-0.3766937
				8.5	0.7907399	-0.3766881
9.0	0.7907389	-0.3766878				

结果表明, 如得到收敛到足够精确的本征值 k , 取 $R=3$ 是适宜的, 但对于 $m=-1$, 则需要取 $R=9$ 。

表 2 给出本征值随步长大小的收敛性。

总的来说, 当步长 $\Delta r=0.01$ 时, 本征值收敛得很好。与时间模式分析的结果^[2]相比较, 空间模式的本征值收敛得慢得多。其原因在于对空间模式, 本征值波数 k 非线性地出现在特

表 2

m	q	ω	R	Δr	k	k
-2.0	0.7	-0.3	3.0	0.03	1.078665	-0.5614859
				0.025	1.074279	-0.4868572
				0.015	1.033412	-0.8519922
				0.012	1.233523	-0.8513540
				0.011	1.233564	-0.8512679
				0.010	1.233597	-0.8511961

征方程(2.5)中. 所以涡旋流动稳定性的空间模式分析方法较之时间模式要困难一些, 计算费用也相应的高一些.

四、摄动技术

如前所述, Muller 方法是一种迭代方法, 它的效率在很大程度上取决于方程之根的初始猜测值. 若有一个较好的初始值, 方程的根收敛得很快; 反之, 它将收敛得很慢, 甚至可能不收敛. 同时, 在有限差分近似中, 方程(3.6)有大量的根, 事实上, 当节点数 N 趋于无穷时, 根的数目也将趋于无穷. 没有必要将所有这些根都找出来, 因为我们的目的是确定最大增长率, 也就是最不稳定的模式, 所以能够有一个较好的、最终能导至最不稳定性模式的特征值的初始猜测值是十分有意义的.

我们使用摄动技术以获得一个较好的初始猜测值.

引进如下的涡旋流动基本速度分布的摄动形式:

$$U=0, \quad W=\exp[-r^2\varepsilon], \quad V=(1-\varepsilon)r + \frac{q}{r}(1-\exp[-r^2\varepsilon]) \tag{4.1}$$

其中 ε 为一小参数. 可以注意到, 当 $\varepsilon=1$ 时, 它们正是原来涡旋流动的速度分布. 当 $\varepsilon=0$ 时,

$$U=0, \quad W=1, \quad V=r \tag{4.2}$$

它们是所谓刚体涡系的速度分布. 对刚体涡系, 基本方程(2.2), (2.3)简化为修正的贝塞尔方程:

$$\frac{d^2\bar{w}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{w}(r)}{dr} - \left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\bar{w}(r) = 0 \tag{4.3}$$

其中, $\bar{w}(r)$ 是轴向扰动速度分量,

$$\alpha^2 = \frac{k^2}{G^2}(G^2 - 4) \tag{4.4}$$

方程(4.3)的解是 m 阶修正贝塞尔函数. 令在 $r=R^*$ (R^* 很大, 例如 $R^*=3$) 处满足无穷远处的边界条件,

$$\bar{w}(R^*) = 0 \tag{4.5}$$

那末,

$$K_m(\alpha R^*) = 0 \tag{4.6}$$

此处 K_m 是 m 阶修正的贝塞尔函数. 已知 R_0 是 m 阶修正贝塞尔函数的零点, 则

$$\alpha R^* = R_0 \tag{4.7}$$

方程(4.7)的根很容易得到, 可以用来作为本征值问题的初始猜测值; 逐渐地增大 ε , 当

$\varepsilon=1$ 时, 即得到所欲求得的本征值 k .

五、数值结果分析

现有的涡旋流动不稳定性的时间模式分析结果表明, 负的切向波数模式, $m < 0$, 较之正的切向模数更不稳定. 可以确定, 对空间模式分析方法, 这一结论也应成立, 因为空间模式和时间模式只是描述同一种流动的稳定特性的两种分析方法而已. 基于此, 我们仅考虑负的切向波数的情形, 即 $m < 0$.

图 2(a) 表示空间增长率 $-k_i$ 随频率 ω 的变化. $m = -2$, 螺旋因子 $q = 0.7$. 曲线 1 相应于最不稳定的模式, 曲线 2 相应于第二个最不稳定模式. 图 2(b) 给出本征值的实部——波数 k_r . 值得注意的是, 沿整个频率 ω 的范围, 对应于最大增长率 $-k_i$ 的波数 k_r 几乎和时间模式给出的结果一致 (见 [2]).

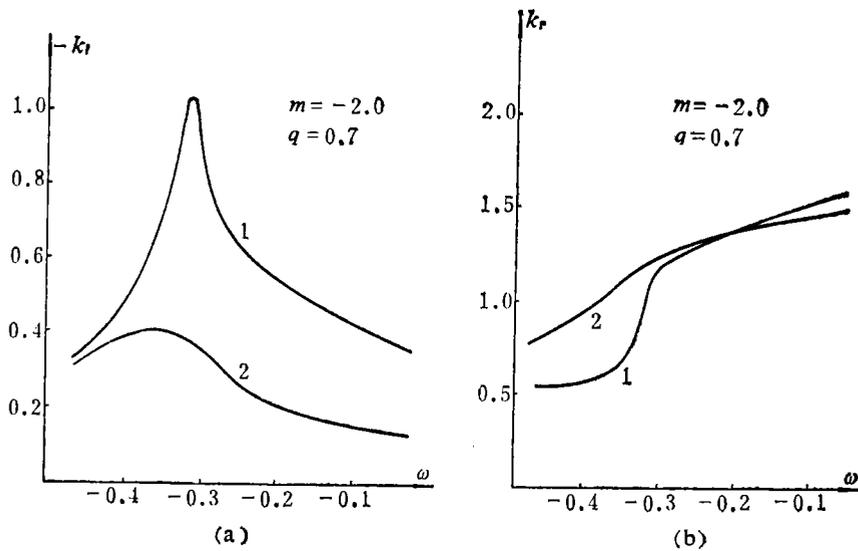


图 2 空间增长率随频率的变化 ($m = -2$)

图 3 表示 $m = -3$ 时空间增长率 $-k_i$ 随频率 ω 的变化. 螺旋因子 $q = 0.7$. 与 $m = -2$ 的结果比较, 最大的空间增长率要比 $m = -2$ 时大, 也就是说, 更不稳定些. 这一结论也是和时间模式一致的. 在图 3(b) 中表示出本征值的实部——波数 k_r . 同样, 对应于最不不稳定模式的波数对空间模式和时间模式是一致的.

图 4 为 $m = -1$ 时的空间增长率. 螺旋因子 q 分别为 0.4 和 0.7.

空间增长率 $-k_i$ 随螺旋因子 q 的变化规律示于图 5. 对于 $m = -2$, $\omega = -0.3$, 最不稳定的情形发生于 $q = 0.7$ (曲线 1 表示最不不稳定模式, 曲线 2 表示第二个最不稳定模式). 当 q 偏离 0.7 时 (增加或减小), 空间增长率 $-k_i$ 将减小, 并且有可能最终变成为负值, 即从不稳定情形转变为稳定的情形 (参考 [2]).

从涡旋流动不稳定性的空间模式分析的数值结果, 我们发现一些十分令人感兴趣的现象. 图 6 表示 $m = -2$, $m = -3$, $q = 0.7$ 时的相速度和群速度. 群速度 c_g 的定义为

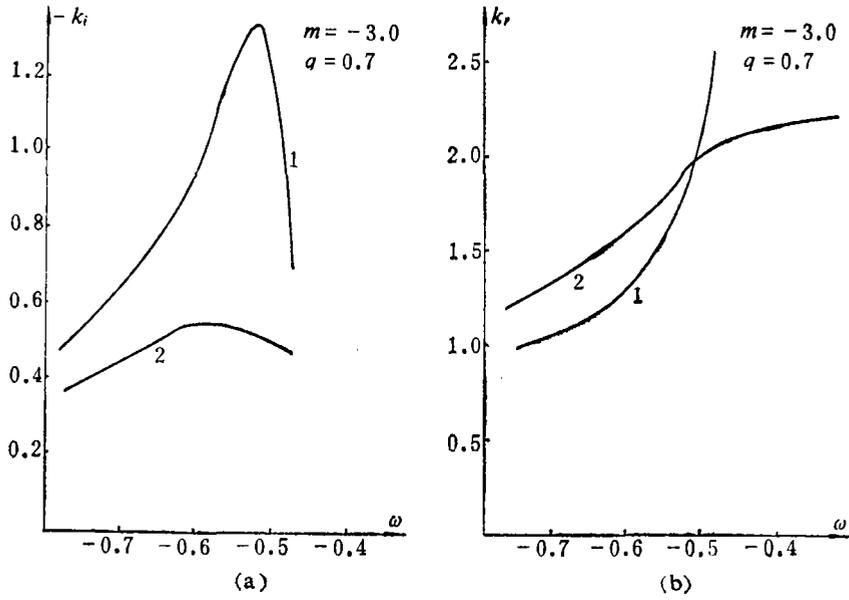


图3 空间增长率随频率的变化($m = -3$)

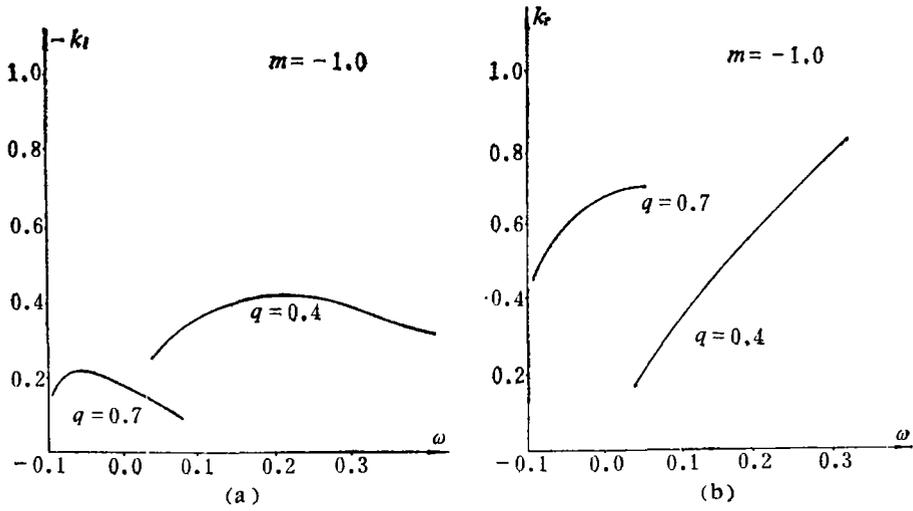


图4 空间增长率随频率的变化($m = -1$)

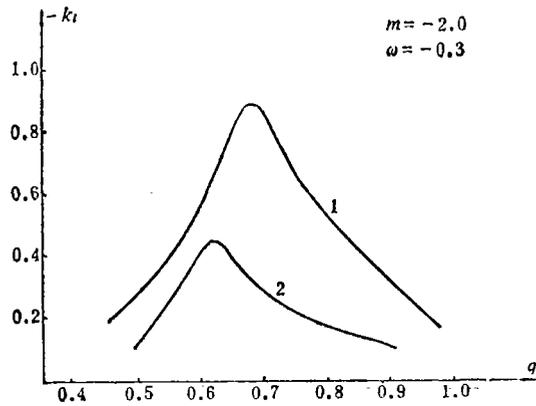


图5 空间增长率随螺旋因子 q 的变化

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_r} \quad (5.1)$$

值得注意的是，对应于最不稳定情形的群速度的值最小，几乎等于零，即波群接近于驻波。图7显示群速度 c_g 随螺旋因子 q 的变化。在频率 ω 和波数 m 的一定范围内，群速度可能为负值。例如，当 $m = -2$ ， $\omega = -0.3$ ，螺旋因子 q 从 1.0 减小到 0.63，则群速度从正值减小为零。若 q 值小于 0.63，群速度可能为负值。所以，固定频率 ω 和波数 m ，改变 q ，波群将首先向下游前进，然后，向上游前进。在这种情形下，将会发生涡旋破裂。群速度随螺旋因子 q 的变化可以预计何时将有涡旋破裂现象发生。

许多作者曾经研究过时间增长率 ω_i 和空间增长率 $-k_i$ 之间的关系。在中性稳定边界的邻域，它们是借助于扰动波的群速度而互相联系的，

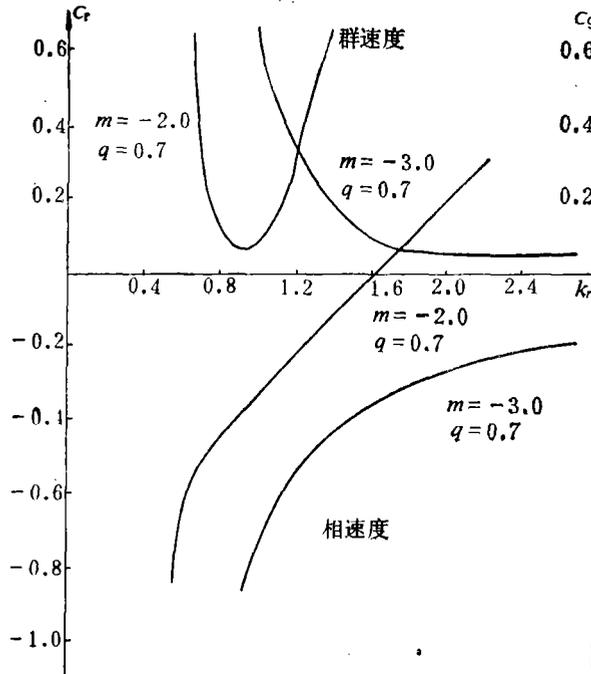


图6 相速度和群速度

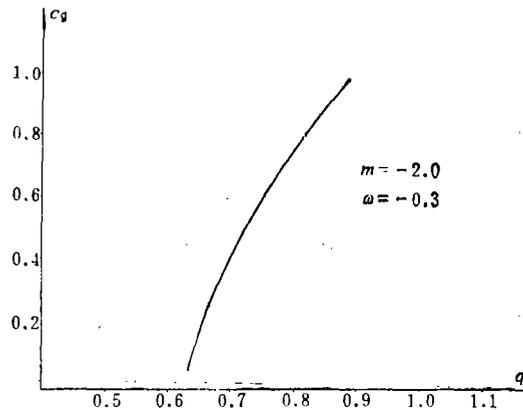


图7 群速度随螺旋因子 q 的变化

$$\omega_i = -c_g \cdot (-k_i) \quad (5.2)$$

但是, 在本文中, 我们所感兴趣的是最不稳定的情形, 它们远远地偏离中性稳定边界。此时, 时间增长率 ω , 和空间增长率 $-k_i$ 之间不再具有简单的关系式。然而, 从我们所得到的数值结果, 可以发现, 相应于最大空间增长率的波数 $k_r(S)$ 近似地等于对应于最大时间增长率时的波数 $k_r(T)$, 即有

$$k_r(S) \approx k_r(T) \quad (5.3)$$

因此, 当研究最不稳定的情形时, 波数 k_r 是将空间模式和时间模式加以联系参数。

从上述分析结果, 可以得到如下结论: 利用空间模式分析方法研究涡旋流动的不稳定性, 我们所得到的流动的不稳定性质, 和用时间模式得到的结果是一致的。因此, 空间模式分析方法, 和时间模式一样, 是一种研究流体运动稳定性的有用工具。

参 考 文 献

- [1] Lessen, M., P. J. Singh and F. Paillet, The stability of a trailing line vortex, Part I. Inviscid theory, *J. Fluid Mech.*, **63**, 4(1974), 753—763.
- [2] Duck, P. W. and M. R. Foster, The inviscid stability of a trailing line vortex, *J. Appl. Math. and Phys.*, (ZAMP), **31** (1980), 524—532.
- [3] Leibovich, S., *The Instability of a Swirling Flow*, Unpublished, (1981).

Spatial Instability of a Swirling Flow

Ma Hui-yang

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

The instability of a swirling flow of an inviscid and incompressible fluid is studied on the assumption that the wave number $k = k_r + ik_i$ of the disturbance is complex while its frequency ω is real. This implies that the disturbance increases with distance along the axis of the swirling flow, but it does not grow with time. The occurrence of such disturbance is called spatial instability, in contrast to the temporal instability, in which k is a real number and $\omega = \omega_r + i\omega_i$ is complex. The results show that spatial instability analysis is a useful tool for the comprehensive understanding of the instability behaviours of a swirling flow.