应用数学和力学，第 5 卷第 1 期（1984年 1 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

Cayley-Hamilton定理的两种简单证法和两个表现定理

郑泉水　　戴天民

（江西工学院）（西南交通大学和辽宁大学）

（1982年10月 7 日收到）

摘　　要

本文对 Cayley-Hamilton 定理提出两种简单证法并应用该定理和罗必塔法则给出两个有关二阶张量函数的表现定理.

一、引　　言

设$\mathbf{A}$为任意二阶张量，则 n 次 Cayley-Hamilton 定理表述为

$$\mathbf{A}^n-I_1\mathbf{A}^{n-1}+I_2\mathbf{A}^{n-2}-\cdots+(-1)^nI_n\mathbf{I}=0 \tag{1.1}$$

其中 I_1，I_2，…，I_n 分别为 $\mathbf{A}$ 的第一，第二，…，第 n 主不变量. 众所周知，Cayley-Hamilton 定理在张量函数理论和连续统力学中占有十分重要的地位. 关于 Cayley-Hamilton 定理可有几种证法，例如：

证法 1　郭仲衡[1]从第一，第二和第三主不变量出发证明了Cayley-Hamilton 定理；

证法 2　C. Truesdell 和 W. Noll[2]从主不变量梯度出发给出 Cayley-Hamilton 定理；

证法 3　A. J. M. Spencer 和 R. S. Rivlin[3]从

$$\begin{vmatrix} \delta^{i_1}{}_{j_1} & \delta^{i_1}{}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_1}{}_{j_{n+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta^{i_{n+1}}{}_{j_1} & \delta^{i_{n+1}}{}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_{n+1}}{}_{j_{n+1}} \end{vmatrix} A^{i_1}{}_{j_1}A^{i_2}{}_{j_2}\cdots A^{i_n}{}_{j_n}=0 \tag{1.2}$$

出发，通过直接展开得到 Cayley-Hamilton 定理，其中 $\delta^i{}_j$ 和 $A^i{}_j$ 分别为 Kronecker 符号和 $\mathbf{A}$ 的分量；

证法 4　A. C. Eringen[4] 从

$$A^{[i_1}{}_{[i_1}A^{i_2}{}_{i_2}\cdots A^{i_n}{}_{i_n}\delta^{i_{n+1}]}{}_{l]}=0 \tag{1.3}$$

出发，通过展开上下指标证得 Cayley-Hamilton 定理.

证法 1 和证法 2 过程简洁，但需较多的数学准备；而证法 3 和证法 4 形式直观，但要采取直接展开或展开上下指标的办法，过程太繁，特别是当 $n>3$ 时更繁. 正是由于这些原

因，所以在一些著作中对 Cayley-Hamilton 定理常常只是引用而避不证明．

针对上述情况，本文提出两种 Cayley-Hamilton 定理的简单证法，它们既具有形式直观，而又无需多少数学准备的优点．本文还利用 Cayley-Hamilton 定理和罗必塔法则证明了 A 的 n 次幂 $\mathbf{A}^n$ 和 $\mathbf{A}$ 的各向同性解析张量函数 $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ 的表现定理．

下面简述一下本文所用到的符号和记法．

设空间由基矢为 $\{\mathbf{g}_i\}$ 的坐标系所复盖．我们引用新的简洁的张量并矢记法，例如：

$$\mathbf{T}\overset{\mathrm{df}}{=}T^{ijk}{}_{lmn}\mathbf{g}_{ijk}{}^{lmn} \tag{1.4a}$$

其中

$$\mathbf{g}_{ijk}{}^{lmn}=\mathbf{g}_i\mathbf{g}_j\mathbf{g}_k\mathbf{g}^l\mathbf{g}^m\mathbf{g}^n \tag{1.4b}$$

这里“df”表示定义，$T^{ijk}{}_{lmn}$ 为三阶逆变三阶协变的（绝对）张量（分量），我们称 $\mathbf{g}_{ijk}{}^{lmn}$ 为并矢基张量．

两个任意张量 $\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{F}$ 的并积定义为

$$\mathbf{FG}\overset{\mathrm{df}}{=}(F^{ij}{}_k\mathbf{g}_{ij}{}^k)(G^{pq}{}_r\mathbf{g}_{pq}{}^r)=F^{ij}{}_kG^{pq}{}_r\mathbf{g}_{ij}{}^k{}_{pq}{}^r$$

$$\overset{\mathrm{df}}{=}T^{ij}{}_k{}^{pq}{}_r\mathbf{g}_{ij}{}^k{}_{pq}{}^r=\mathbf{T} \tag{1.5}$$

$\mathbf{G}$ 和 $\mathbf{F}$ 的点积定义为

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\overset{\mathrm{df}}{=}T^{ij}{}_k{}^{pq}{}_r\mathbf{g}_{ij}\mathbf{g}^k\cdot\mathbf{g}_p\mathbf{g}_q{}^r=T^{ij}{}_p{}^{pq}{}_r\mathbf{g}_{ijq}{}^r \tag{1.6}$$

设 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 均为二阶张量，由定义

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A^i{}_mB^m{}_j\mathbf{g}_i{}^j\overset{\mathrm{df}}{=}\mathbf{C} \tag{1.7}$$

$\mathbf{C}$ 也是二阶张量．特别地，下面定义的记法有意义：

$$\mathbf{A}^n=\overbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\cdots\cdot\mathbf{A}}^{n\text{个}}=A^i{}_jA^j{}_k\cdots A^l{}_s\mathbf{g}_i{}^s \tag{1.8}$$

本文采用惯用的反称化记号，例如：

$$T_{[ijk]}=\frac{1}{3!}(T_{ijk}+T_{jki}+T_{kij}-T_{jik}-T_{kji}-T_{ikj}) \tag{1.9}$$

结果是反对称张量．显然，反对称张量的反称化不变．例如，设 S_{ijkl} 为反对称张量，则

$$S_{[ijkl]}=S_{ijkl} \tag{1.10}$$

利用反称化记法可把行列式写成简洁形式．

现定义任意二阶张量 $\mathbf{A}$ 的第 p 主不变量 I_p 如下：

$$I_p=A^{[i_1}{}_{i_1}A^{i_2}{}_{i_2}\cdots A^{i_p]}{}_{i_p}=A^{i_1}{}_{[i_1}A^{i_2}{}_{i_2}\cdots A^{i_p}{}_{i_p]}$$

$$=\frac{1}{p!}\begin{vmatrix}A^{i_1}{}_{i_1} & \cdots & A^{i_1}{}_{i_p}\\ \vdots & & \vdots\\ A^{i_p}{}_{i_1} & \cdots & A^{i_p}{}_{i_p}\end{vmatrix}. \tag{1.11}$$

当 $p=n$ 时，则

$$I_n=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix}A^{i_1}{}_{i_1} & \cdots & A^{i_1}{}_{i_n}\\ \vdots & & \vdots\\ A^{i_n}{}_{i_1} & \cdots & A^{i_n}{}_{i_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A^1{}_1 & \cdots & A^1{}_n\\ \vdots & & \vdots\\ A^n{}_1 & \cdots & A^n{}_n\end{vmatrix}$$

$$=\det A^m{}_n \tag{1.12}$$

二、Cayley-Hamilton 定理的两种简单证法

下面给出 Cayley-Hamilton 定理的两种简单证法.

证法 I 实际上，n 次 Cayley-Hamilton 定理与下列行列式等价：

$$\begin{vmatrix} A^{i_1}{}_{i_1} & \cdots & A^{i_1}{}_{i_n} & \mathbf{g}^{i_1}{}_l \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A^{i_n}{}_{i_1} & \cdots & A^{i_n}{}_{i_n} & \mathbf{g}^{i_n}{}_l \\ A^{l}{}_{i_1} & \cdots & A^{l}{}_{i_n} & \mathbf{g}^{l}{}_l \end{vmatrix} = 0 \tag{2.1}$$

这是因为对于 $n+1$ 个指标取 n 个数码时上列行列式至少有两行元素相同之故.

例如，当 $n=3$ 时，由(2.1)按最后一列展开，则有

$$\begin{aligned} &3!I_3\mathbf{g}^l{}_l-3\left[2!I_2A^l{}_m\mathbf{g}^m{}_l-2\begin{vmatrix} A^i{}_i & A^i{}_mA^m{}_n\mathbf{g}^n{}_l \\ A^l{}_i & A^l{}_mA^m{}_n\mathbf{g}^n{}_l \end{vmatrix}\right] \\ &=3!\,(I_3\mathbf{g}^l{}_l-I_2A^l{}_m\mathbf{g}^m{}_l+I_1A^l{}_mA^m{}_n\mathbf{g}^n{}_l-A^l{}_iA^i{}_mA^m{}_n\mathbf{g}^n{}_l) \\ &=0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

即

$$\mathbf{A}^3-I_1\mathbf{A}^2+I_2\mathbf{A}-I_3\mathbf{I}=0 \tag{2.3}$$

此即三次 Cayley-Hamilton 定理.

一般地，由(2.1)按最后一列展开，则有

$$\begin{aligned} &n!I_n\mathbf{g}^l{}_l-n\left[(n-1)!I_{n-1}A^l{}_m\mathbf{g}^m{}_l-(n-1)\begin{vmatrix} A^{i_1}{}_{i_1} & \cdots & A^{i_1}{}_{i_{n-2}} & A^{i_1}{}_m\mathbf{g}^m{}_l \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A^l{}_{i_1} & \cdots & A^l{}_{i_{n-2}} & A^l{}_m\mathbf{g}^m{}_l \end{vmatrix}\right] \\ &=\cdots \\ &=n!\,[I_n\mathbf{g}^l{}_l-I_{n-1}A^l{}_m\mathbf{g}^m{}_l+I_{n-2}A^l{}_mA^m{}_n\mathbf{g}^n{}_l-\cdots+(-1)^nA^l{}_mA^m{}_n\cdots A^t{}_s\mathbf{g}^s{}_l] \\ &=0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

即

$$\mathbf{A}^n-I_1\mathbf{A}^{n-1}+I_2\mathbf{A}^{n-2}-\cdots+(-1)^nI_n\mathbf{I}=0 \tag{2.5}$$

此即 n 次 Cayley-Hamilton 定理. 证毕.

证法 II n 次 Cayley-Hamilton 定理与下式等价：

$$A^{i_1}{}_{[i_1}\cdots A^{i_n}{}_{i_n}\delta^{i_{n+1}}{}_{l]}=0 \tag{2.6}$$

事实上，这是对前述 Eringen[4] 证法 4 的简化，即本文只对上式的下标展开.

当 $n=3$ 时，对式(2.6)展开下标，则有

$$A^i{}_{[i}A^j{}_jA^k{}_k\delta^s{}_{l]}=\frac{1}{4}(A^i{}_{[i}A^j{}_jA^k{}_{k]}\delta^s{}_l-3A^i{}_{[i}A^j{}_jA^k{}_{l]}\delta^s{}_k)=0 \tag{2.7}$$

但是

$$A^i{}_{[i}A^j{}_jA^k{}_{l]}=\frac{1}{3}(A^i{}_{[i}A^j{}_{j]}A^k{}_l-2A^i{}_{[i}A^j{}_{l]}A^k{}_j) \tag{2.8}$$

$$A^i{}_{[i}A^j{}_{l]}=\frac{1}{2}(A^i{}_iA^j{}_l-A^i{}_lA^j{}_i) \tag{2.9}$$

所以

$$A^i{}_{[i}A^j{}_jA^k{}_k\delta^s{}_{l]}=\frac{1}{4}(A^i{}_{[i}A^j{}_jA^k{}_{k]}\delta^s{}_l-A^i{}_{[i}A^j{}_{j]}A^s{}_l$$

$$+A^i{}_iA^j{}_lA^s{}_j-A^i{}_lA^j{}_iA^s{}_j)=0 \tag{2.10}$$

或者

$$\mathbf{A}^3-I_1\mathbf{A}^2+I_2\mathbf{A}-I_3\mathbf{I}=0 \tag{2.11}$$

一般地，考虑到

$$A^{i_1}{}_{[i_1}\cdots A^{i_p}{}_{i_p}\delta^{i_{p+1}}{}_{l]}=\frac{1}{p+1}(A^{i_1}{}_{[i_1}\cdots A^{i_p}{}_{i_p]}\delta^{i_{p+1}}{}_l$$

$$-pA^{i_1}{}_{[i_1}\cdots A^{i_{p-1}}{}_{i_{p-1}}A^{i_p}{}_{l]}\delta^{i_{p+1}}{}_{i_p} \tag{2.12}$$

则可得到 n 次 Cayley-Hamilton 定理.

三、关于$\mathbf{A}^n$和$\mathbf{F}(\mathbf{A})$的表现定理

关于任意二阶张量 $\mathbf{A}$ 的 n 次幂$\mathbf{A}^n$和各向同性解析张量函数 $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ 的表现问题，有的文献提到过，例如［1］和［2］，但我们尚未见到能够给出具体表现形式的表现定理. 本文利用 Cayley-Hamilton 定理和罗必塔法则给出三维空间的$\mathbf{A}^n$和$\mathbf{F}(\mathbf{A})$的表现定理并对各种可能情况进行了讨论，从而解决了具体计算问题. 这里给出的证明过程可直接推广到N维空间的情形. 下面一并给出 $\mathbf{A}^n$ 和 $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ 的表现定理并一并加以证明.

关于$\mathbf{A}^n$的表现定理 设$\mathbf{A}$为N维空间的任意二阶张量，它的特征值为$\lambda_1, \cdots, \lambda_N$，它的主不变量为$I_1, I_2, \cdots, I_N$, $I_N\neq0$，则 $\mathbf{A}^n$ 可用最高次数为 $N-1$ 的张量多项式表现. 例如，当 $N=3$ 时，有

$$\mathbf{A}^n=\alpha_{n-2}\mathbf{A}^2-\beta_{n-2}\mathbf{A}+\gamma_{n-2}\mathbf{I} \tag{3.1}$$

其中：

（i）当 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$ 时，

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n&=\left.\frac{\lambda_1^{n+2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\right|_{(1,2,3)}\\ \beta_n&=\left.\frac{\lambda_1^{n+2}(\lambda_2+\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\right|_{(1,2,3)}\\ \gamma_n&=\left.\frac{\lambda_1^{n+2}\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\right|_{(1,2,3)}\end{aligned}\right\} \tag{3.2a,b,c}$$

这里$(\ )|_{(1,2,3)}$表示对$(\ )$中指标 1,2,3 循环置换相加；

（ii）当$\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$时，

$$\left.\begin{aligned}\alpha_n&=\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_1)^2}[\lambda_1^{n+2}-(n+2)\lambda_1\lambda_0^{n+1}+(n+1)\lambda_0^{n+2}]\\ \beta_n&=\frac{\lambda_0}{(\lambda_0-\lambda_1)^2}[2\lambda_1^{n+2}-(n+2)\lambda_1^2\lambda_0^n+n\lambda_0^{n+2}]\\ \gamma_n&=\frac{\lambda_0^2\lambda_1}{(\lambda_0-\lambda_1)^2}[\lambda_1^{n+1}-(n+1)\lambda_1\lambda_0^n+n\lambda_0^{n+1}]\end{aligned}\right\} \tag{3.3a,b,c}$$

（iii）当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$ 时，

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= \binom{n+2}{2}\lambda_0^n \\ \beta_n &= n(n+2)\lambda_0^{n+1} \\ \gamma_n &= \binom{n+1}{2}\lambda_0^{n+2} \end{aligned}\right\} \tag{3.4a,b,c}$$

关于F(A)的表现定理　设 **F**(**A**) 为各向同性解析张量函数，则在N维空间中它可用最高次数为$N-1$的张量多项式表现，例如，当$N=3$时，有

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}) = \xi_2\mathbf{A}^2 - \xi_1\mathbf{A} + \xi_0\mathbf{I} \tag{3.5}$$

其中：

(i) 当$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$时，

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{F(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\bigg|_{(1,2,3)} \\ \xi_1 &= \frac{F(\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\bigg|_{(1,2,3)} \\ \xi_0 &= \frac{F(\lambda_1)\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\bigg|_{(1,2,3)} \end{aligned}\right\} \tag{3.6a,b,c}$$

(ii) 当 $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$ 时，

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)^2}[F(\lambda_1) - F(\lambda_0) - (\lambda_1-\lambda_0)F^{(1)}(\lambda_0)] \\ \xi_1 &= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)^2}[2\lambda_0\{F(\lambda_1)-F(\lambda_0)\} - (\lambda_1^2-\lambda_0^2)F^{(1)}(\lambda_0)] \\ \xi_0 &= \frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)^2}[\lambda_0^2F(\lambda_1) - \lambda_1(\lambda_1-2\lambda_0)F(\lambda_0) - \lambda_0\lambda_1(\lambda_1-\lambda_0)F^{(1)}(\lambda_0)] \end{aligned}\right\} \tag{3.7a,b,c}$$

(iii) 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$ 时，

$$\left.\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{1}{2}F^{(2)}(\lambda_0) \\ \xi_1 &= \lambda_0F^{(2)}(\lambda_0) - F^{(1)}(\lambda_0) \\ \xi_0 &= \frac{1}{2}\lambda_0^2F^{(2)}(\lambda_0) - \lambda_0F^{(1)}(\lambda_0) + F(\lambda_0) \end{aligned}\right\} \tag{3.8a,b,c}$$

这里 $F(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$，而$F^{(k)}$表示标量函数 F 的 k 次导数。

证明　由(2.3)，即 $\mathbf{A}^3 = I_1\mathbf{A}^2 - I_2\mathbf{A} + I_3\mathbf{I}$ 可知，$\mathbf{A}^n$ 总可用 $\mathbf{A}^2$，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{I}$ 及三个主不变量表示，故可设

$$\mathbf{A}^n = \alpha_{n-2}\mathbf{A}^2 - \beta_{n-2}\mathbf{A} + \gamma_{n-2}\mathbf{I} \tag{3.9}$$

这里假设$I_3 \neq 0$. 对上式两边各点乘以**A**，则

$$\mathbf{A}^{n+1} = \alpha_{n-2}(I_1\mathbf{A}^2 - I_2\mathbf{A} + I_3\mathbf{I}) - \beta_{n-2}\mathbf{A}^2 - \gamma_{n-2}\mathbf{A} = \alpha_{n-1}\mathbf{A}^2 - \beta_{n-1}\mathbf{A} + \gamma_{n-1}\mathbf{I} \tag{3.10}$$

比较两边系数，则得下列递推公式：

$$\left.\begin{aligned} \alpha_n &= I_1\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} = I_1\alpha_{n-1} - I_2\alpha_{n-2} + I_3\alpha_{n-3} \\ \beta_n &= I_2\alpha_{n-1} - \gamma_{n-1} = I_1\alpha_n - \alpha_{n+1} = I_2\alpha_{n-1} - I_3\alpha_{n-2} \\ \gamma_n &= I_3\alpha_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{3.11a,b,c}$$

注意到$\alpha_1=I_1$，$\beta_1=I_2$，$\gamma_1=I_3$，则由上式可得下列低次系数表(表1)：

表 1

n	2	1	0	-1	-2	-3
α_n	$I_1^2-I_2$	I_1	1	0	0	$1/I_3$
β_n	$I_1I_2-I_3$	I_2	0	-1	0	I_1/I_3
γ_n	I_1I_3	I_3	0	0	1	I_2/I_3

现引进生成函数

$$G(x)=\frac{1}{(1-I_1x+I_2x^2-I_3x^3)} \tag{3.12}$$

这里$1-I_1x+I_2x^2-I_3x^3=0$的根$r_1=1/\lambda_1$，$r_2=1/\lambda_2$，$r_3=1/\lambda_3$均不为零。把$G(x)$在零的邻域展为台劳级数：

$$G(x)=\frac{1}{(1-I_1x+I_2x^2-I_3x^3)}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \tag{3.13}$$

比较系数，则有

$$b_0=1,\quad b_1=I_1,\quad b_2=I_1^2-I_2$$

再设$b_{-1}=b_{-2}=0$，$b_{-3}=1/I_3$，则得递推公式如下：

$$b_n=I_1b_{n-1}-I_2b_{n-2}+I_3b_{n-3} \tag{3.14}$$

与(3.11a)比较可知，$b_a=\alpha_n$。于是，下面分三种情形加以讨论。

(i) 设$\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$，则

$$G(x)=\left.\frac{(r_1-x)^{-1}}{I_3(r_1-r_2)(r_1-r_3)}\right|_{(1,2,3)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left.\frac{\lambda_1^{n+2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\right|_{(1,2,3)}x^n \tag{3.15}$$

故得

$$\alpha_n=\left.\frac{\lambda_1^{n+2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\right|_{(1,2,3)} \tag{3.2a}$$

由(3.11b, c)可得

$$\beta_n=I_1\alpha_n-\alpha_{n+1}=(I_1-\lambda_1)\left.\frac{\lambda_1^{n+2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\right|_{(1,2,3)}=\left.\frac{\lambda_1^{n+2}(\lambda_2+\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\right|_{(1,2,3)} \tag{3.2b}$$

$$\gamma_n=I_3\alpha_{n-1}=\frac{I_3}{\lambda_1}\left.\frac{\lambda_1^{n+2}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\right|_{(1,2,3)}=\left.\frac{\lambda_1^{n+2}\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\right|_{(1,2,3)} \tag{3.2c}$$

(ii) 设$\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$，则对(3.2a)应用罗必塔法则，可得

$$\alpha_n=\lim_{\lambda_2\to\lambda_3=\lambda_0}\frac{\lambda_1^{n+2}(\lambda_3-\lambda_2)+\lambda_2^{n+2}(\lambda_1-\lambda_3)+\lambda_3^{n+2}(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)}$$

$$=\frac{1}{(\lambda_0-\lambda_1)^2}[\lambda_1^{n+2}-(n+2)\lambda_1\lambda_0^{n+1}+(n+1)\lambda_0^{n+2}] \tag{3.3a}$$

类似地，得

$$\beta_n=\frac{\lambda_0}{(\lambda_0-\lambda_1)^2}[2\lambda_1^{n+2}-(n+2)\lambda_1^2\lambda_0^n+n\lambda_0^{n+2}] \tag{3.3b}$$

$$\gamma_n=\frac{\lambda_0^2\lambda_1}{(\lambda_0-\lambda_1)^2}[\lambda_1^{n+1}-(n+1)\lambda_1\lambda_0^n+n\lambda_0^{n+1}] \tag{3.3c}$$

(iii) 设 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$，则对(3.3a,b,c)再应用罗必塔法则，即得(3.4)。

若 $\mathbf{F}(\mathbf{A})$为各向同性的解析张量函数，则可把它展成幂级数如下：

$$\mathbf{F}(\mathbf{A})=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\mathbf{A}^n \tag{3.16}$$

由 $\mathbf{A}^n$ 的表现定理可知上式可表现为下列形式：

$$\mathbf{F}(\mathbf{A})=\xi_2\mathbf{A}^2-\xi_1\mathbf{A}+\xi_0\mathbf{I} \tag{3.17}$$

其中：

(i) 当 $\lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3$ 时，

$$\xi_2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\alpha_{n-2}\overset{(3\cdot2a)}{=\!=\!=}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lambda_1^n\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg|_{(1,2,3)}$$

$$=\frac{F(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg|_{(1,2,3)} \tag{3.6a}$$

$$\xi_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\beta_{n-2}\overset{(3\cdot2b)}{=\!=\!=}\frac{F(\lambda_1)(\lambda_2+\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg|_{(1,2,3)} \tag{3.6b}$$

$$\xi_0=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\gamma_{n-2}\overset{(3\cdot2c)}{=\!=\!=}\frac{F(\lambda_1)\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\Bigg|_{(1,2,3)} \tag{3.6c}$$

(ii) 当 $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$ 时，由 (3.6a,b,c)，利用罗必塔法则可得

$$\xi_2=\lim_{\lambda_2\to\lambda_3=\lambda_0}\left[\frac{F(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}+\frac{F(\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)+F(\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_3-\lambda_1)}\right]$$

$$=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_0)^2}[F(\lambda_1)-F(\lambda_0)-(\lambda_1-\lambda_0)F^{(1)}(\lambda_0)] \tag{3.7a}$$

类似地，可得(3.7b,c)；

(iii) 当$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_0$时，对(3.7a,b,c)再应用罗必塔法则即得(3.8)。

最后给一个最简单的例子．当 $N=2$ 时，由(3.6b,c)可直接写出

$$\xi_1=\frac{F(\lambda_1)-F(\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)},\qquad \xi_0=\frac{\lambda_2F(\lambda_1)-\lambda_1F(\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2)} \tag{3.18a,b}$$

于是 $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ 的具体表现形式为

$$\mathbf{F}(\mathbf{A})=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)}[\{F(\lambda_1)-F(\lambda_2)\}\mathbf{A}-\{\lambda_2F(\lambda_1)-\lambda_1F(\lambda_2)\}\mathbf{I}] \tag{3.19}$$

若 $\mathbf{F}(\mathbf{A})=e^{\mathbf{A}}$，则

$$e^{\mathbf{A}}=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)}[(e^{\lambda_1}-e^{\lambda_2})\mathbf{A}-(\lambda_2e^{\lambda_1}-\lambda_1e^{\lambda_2})\mathbf{I}] \tag{3.20}$$

参 考 文 献

[1] 郭仲衡，《非线性弹性理论》，科学出版社，(1980).
[2] Truesdell, C. and W. Noll, The Non-Linear Field Theories of Mechanics, *Handbuch der Physik*, Bd. Ⅲ/3, Springer(1965).
[3] Spencer, A. J. M. and R. S. Rivlin, The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2(1959), 309—336.
[4] 爱林根，A. C.，《张量分析》. 钱伟长译，江苏科学技术出版社，(1981).

Two Simple Proofs of Cayley-Hamilton Theorem and Two Representation Theorems

Zheng Quan-shui
(*Jiangxi Institute of Technology, Jiangxi*)

Tai Tien-min
(*Southwestern Jiaotong University and Liaoning University*)

Abstract

In this paper two simple proofs of Cayley-Hamilton theorem are given and by making use of Cayley-Hamilton theorem and l'Hopital's two representation theorems concerning tensor functions of an arbitrary second-order tensor are given.