应用数学和力学，第5卷第1期（1984年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

论变形介质经典电动力学中的能量守恒定律——Poynting定理的推广

余 燊

（华南工学院，1982年2月28日收到）

摘 要

为了阐明电磁场和变形介质之间能量传递的详细机理，这篇论文选取整体的场方程作为出发点，给出变形介质电动力学的广义Poynting定理．然后按照对电磁体积力的一些特殊的假设，推导出这个定理的几种特殊的形式

"理论不是一种绝对的真理，而是对支配某一类自然现象的一些关系所提出的自相一致的分析表述而已"．

——J．A．Stratton

一、引 言

在变形介质经典电动力学的各色各样宏观表述中，我们可以提到三个主要的学派：(A) Toupin-Coleman 理论[1]-[8]，(B) Maugin-Collet 理论[9]-[11]和(C) Sedov 理论[12]-[17]，在所有这些理论中，能量守恒定律(L．E．C)都起着十分重要的作用．然而，在进行详细分析后，人们常常发现对于任意给定的一组要研究的场变量，不同的学派（甚至有时是同一学派的不同作者）由于采用不同的能量守恒定律，因而得到的最终结果是不一致的．这主要是由于能量守恒定律本身具有普遍的特性，同时又有含糊不清的地方．在考虑任何一类已定的物理现象时，在这些现象发生的过程中，所有有关的能量的总和必须保持不变．这样的先验性原理我们认为一定要遵守的，而且这个原理一定与场的方程和变形介质的运动方程无关．但是，在变形介质电动力学中，对于机-电能量的精确表达形式还没有普遍一致的看法．而且，在能量平衡方程中，哪些项的能量要加以考虑，哪些项要忽略，这都是要判断的事情．因而，可以带有相当大的任意性．

在这样的情况下，另方面我们有经典的Poynting定理，这个定理可以看作是电磁场的能量守恒定律．尽管Poynting定理没有考虑变形介质的机械能，因而只对静止的刚性介质有效．然而，差别在于Poynting定理是从场方程直接导出的，对各个项可能给予诸如此类的解释，但从本质上是正确的．在这里，我们不是对各种理论的优点作出评价，而是仿照Poynting的方法，从场方程逻辑地推导，得到电磁场和变形介质相互作用的能量守恒定律的

一种形式。这个结果（我们称它为广义的Poynting定理）可以阐明电磁场、能源和变形介质之间的能量传递的详细机理。

二、广义的Poynting定理

这篇论文我们只是考虑低速的变形介质的宏观电动力学。因此，相对论性的影响可以忽略不计。且为了简单起见，我们也不考虑介质中的奇异线和奇异面。于是，机-电的场完全通过场矢量$\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$，电流密度矢量 $\mathbf{J}$，变形介质的速度场$\mathbf{v}$，机-电总应力张量$\boldsymbol{\sigma}$，体积力$\rho\mathbf{f}$，耦合应力张量$\boldsymbol{\mu}$，体积力偶 $\rho\mathbf{c}$，和自旋角动量 $\rho\boldsymbol{\phi}$ 等场变量来描述。它们组成了以下的数学关系：

$$\oint_{\partial S}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=-\frac{d}{dt}\int_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} \tag{2.1}$$

$$\oint_S\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}=0 \tag{2.2}$$

$$\oint_{\partial S}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=\frac{d}{dt}\int_S\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}+\oint_S\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \tag{2.3}$$

$$\oint_{\partial V}\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}=\int_V q\,dV \tag{2.4}$$

$$\oint_{\partial V}\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}+\frac{d}{dt}\int_V q\,dV=0 \tag{2.5}$$

$$\oint_{\partial V}\boldsymbol{\sigma}\cdot d\mathbf{S}+\int_V\rho\mathbf{f}\,dV=\frac{d}{dt}\int_V(\rho\mathbf{v}+\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})\,dV \tag{2.6}$$

$$\oint_{\partial V}(\boldsymbol{\mu}+\mathbf{r}\wedge\boldsymbol{\sigma})\cdot d\mathbf{S}+\int_V\rho(\mathbf{c}+\mathbf{r}\wedge\mathbf{f})\,dV$$
$$=\frac{d}{dt}\int_V\rho(\mathbf{r}\wedge\mathbf{v}+\boldsymbol{\phi})\,dV+\frac{d}{dt}\int_V\mathbf{r}\wedge(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})\,dV \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dt}\int_V\rho\,dV=0 \tag{2.8}$$

其中 $\mathbf{r}$ 是场中某一点的位置矢量。

以上所有变量都是相对于流动的位形来说的。尤其是场矢量$\mathbf{E}$,$\mathbf{D}$,$\mathbf{B}$和$\mathbf{H}$都是由观察者随着连续介质一起运动测量得到的量。假设整个结构对于一般的可极化和磁化的极性介质都有效。于是它构成了变形介质电动力学的基础。这里包含有电磁动量 $\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}$ 这一项，是因为机械的动量和电磁的动量各自都不守恒；但它们彼此是可转换的。

上面的方程与Truesdell和Toupin[8]以及Pao[19]所述的稍有些区别。在那些文献里，他们假设矢量$\mathbf{H}$和$\mathbf{E}$是相对于运动的连续介质；而矢量$\mathbf{B}$和$\mathbf{D}$是相对于固定（惯性）参考系。矢量$\mathbf{B}$和$\mathbf{D}$之所以要相对固定系是为了使局部形式的Maxwell方程组可以与Minkowski列的方程式一致（例如参阅 Pao[19]）。即是(2.1)～(2.4)化成静止介质时的 Maxwell 方程

$$\left.\begin{array}{ll}\operatorname{curl}\mathbf{E}'=-\left(\dfrac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t}\right)_{Q'}, & \operatorname{div}\mathbf{B}'=0\\[2ex] \operatorname{curl}\mathbf{H}'=\left(\dfrac{\partial\mathbf{D}'}{\partial t}\right)_{Q}, & \operatorname{div}\mathbf{D}'=q\end{array}\right\} \tag{2.9}$$

如果我们令

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}'+\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}',\quad \mathbf{H}=\mathbf{H}'-\mathbf{v}\wedge\mathbf{D}' \tag{2.10}$$

其中带“′”的字母表示相对于固定参考系的变量。(2.10)可被认为是Minkowski 变换（参阅Pao[19]）。尽管(2.9)肯定是成立的，然而(2.10)并不与 Minkowski 变换同义。因为在原来的 Minkowski 变换中，速度 $\mathbf{v}$ 是一个常矢量。而由(2.1)～(2.4)导出(2.9)和(2.10)时，速度 $\mathbf{v}$ 随着空间和时间都是变化的。正是由于这个原因，我们避开采用 Minkowski 变换。关于用Minkowski表述的式子建立起来的变形介质电动力学理论的其它缺点，可参阅 Pao[19]的评论性的论文。然而，今后要是证明 Minkowski 式子对于加速的参考系也是有效的话，则上面(2.1)～(2.4)式在非相对论近似的意义上仍然是成立的，因为 Minkowski 变换给出

$$\mathbf{D}=\mathbf{D}'+\frac{\mathbf{v}\wedge\mathbf{H}'}{c^2},\qquad \mathbf{B}=\mathbf{B}'-\frac{\mathbf{v}\wedge\mathbf{E}'}{c^2} \tag{2.11}$$

因此，对低速有　$\mathbf{D}\approx\mathbf{D}'$ 和 $\mathbf{B}\approx\mathbf{B}'$

最后，我们指出(2.1)～(2.4)式与Stratton[18]给出的式子是一样的。

为了将方程组(2.1)～(2.8)化成一种方便的局部的形式，我们需要用到矢量 $\mathbf{A}$ 的各种不同形式的通量定理：

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_S\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt}-\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v}+\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{v}\right]\cdot d\mathbf{S} \tag{2.12}$$

从(2.12)我们得到另外两种通量定理的形式：

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_S\left[\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_Q-\operatorname{curl}(\mathbf{v}\wedge\mathbf{A})+\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{A}\right]\cdot d\mathbf{S} \tag{2.13}$$

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_S\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt}-\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{A}+\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{v}\right]\cdot d\mathbf{S} \tag{2.14}$$

其中 $\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_Q$ ＝矢量$\mathbf{A}$在固定位置 Q 时对时间的导数。Q 点是变形介质的质点P瞬时占据的位置，且

$$\frac{d}{dt}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_Q+\operatorname{grad}$$

在(2.14)中，$\boldsymbol{\psi}$ 是应变率张量且 $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\operatorname{curl}\mathbf{v}$ 是旋度，对于具有瞬时的物质坐标 (ξ^i) 的质点 P，$\boldsymbol{\psi}$ 由下式给出

$$\boldsymbol{\psi}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^i\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^i}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^i}\mathbf{e}^i\right) \tag{2.15}$$

其中$(\mathbf{e}^i)$是$(\mathbf{e}_i)$的逆，而$(\mathbf{e}_i)$是与曲线ξ^i相切。此外，如果我们用$\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_P$ 表示$\mathbf{A}$参考质点P的导数，那末我们便有（参阅附录）：

$$\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_P=\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_Q+\operatorname{curl}(\mathbf{A}\wedge\mathbf{v})+\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{A}-\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{v} \tag{2.16}$$

利用(2.13)式，最后我们得到通量定理的另一种形式：

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\int_S\left[\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_P+\mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{v}\right]\cdot d\mathbf{S} \tag{2.17}$$

相应地应用(2.14)和(2.17)，于是方程组(2.1)～(2.4)化为如下两种可供选用的形式即：

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{E}=-\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{B}-\mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{2.18}$$

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{H}=\frac{d\mathbf{D}}{dt}-\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{D}+\mathbf{D}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}+\mathbf{J} \tag{2.19}$$

或者

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{E}=-\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)_P-\mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{2.20}$$

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{H}=\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)_P+\mathbf{D}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}+\mathbf{J} \tag{2.21}$$

方程组 (2.6)，(2.7)，(2.8) 的局部形式$\left(\text{消去}\frac{d\rho}{dt}\text{之后}\right)$是：

$$\mathrm{div}_o\boldsymbol{\sigma}=\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})+\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}-\rho\mathbf{f} \tag{2.22}$$

$$\mathrm{div}_o\boldsymbol{\mu}=\rho\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}+\mathbf{v}\wedge(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})+2\,\mathrm{vec}\,\boldsymbol{\sigma}-\rho\mathbf{c} \tag{2.23}$$

其中

$$\mathrm{div}_o\boldsymbol{\sigma}=\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\xi^\alpha}\mathbf{l}^\alpha$$

$$\mathrm{vec}\,\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_i\wedge\boldsymbol{\beta}_i\text{；如果}\quad\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\beta}_i$$

(2.23) 式特别的重要，因为没有 $\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{\phi}$ 和 $\mathbf{c}$ 时，应力张量仍然是不对称的，这是与纯粹力学效应的问题不同。这种非对称性是由于有 $\mathbf{v}\wedge(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})$ 这一项存在的原故。于是

$\mathbf{v}\cdot(2.22)+\boldsymbol{\omega}\cdot(2.23)+\mathbf{E}\cdot(2.19)-\mathbf{H}\cdot(2.18)\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&-\mathrm{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})+\mathrm{div}_o(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\sigma}_s:\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\sigma}_a:\boldsymbol{\Omega}+\mathrm{div}_o(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\mu}:\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\omega}\\&=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\rho\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}\cdot\boldsymbol{\omega}-\rho\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{\omega}\cdot\mathrm{vec}\,\boldsymbol{\sigma}-\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\\&+\left(\mathbf{H}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\mathbf{E}\frac{d\mathbf{D}}{dt}\right)+(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}-(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\psi}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\psi}\cdot\mathbf{E})\\&-(\mathbf{B}\wedge\mathbf{H}+\mathbf{D}\wedge\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\omega}+\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})+\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\end{aligned} \tag{2.24}$$

其中

$\boldsymbol{\sigma}_s=\boldsymbol{\sigma}$ 的对称部分；

$\boldsymbol{\sigma}_a=\boldsymbol{\sigma}$ 的反对称部分；

$\boldsymbol{\Omega}=\frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^i\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^i}-\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^i}\mathbf{e}^i\right)$是转动张量。

那末，既然 $\mathrm{div}\,\mathbf{v}=\mathbf{I}:\boldsymbol{\psi}$，这里的 $\mathbf{I}$ 是单位张量，因此，(2.24) 可以写成：

$$\begin{aligned}&-\mathrm{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})+\mathrm{div}_o(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})+\mathrm{div}_o(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\mu})\\&=(\boldsymbol{\sigma}_s+\boldsymbol{\sigma}_i):\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\sigma}_a:\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\mu}:\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\omega}\end{aligned}$$

$$+[2\,\mathrm{vec}\,\boldsymbol{\sigma}-\rho\mathbf{c}-(\mathbf{B}\wedge\mathbf{H}+\mathbf{D}\wedge\mathbf{E})]\cdot\boldsymbol{\omega}-\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\rho\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}\cdot\boldsymbol{\omega}+\left(\mathbf{H}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{D}}{dt}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}+\mathbf{v}\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})$$

$$+\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\wedge\mathbf{D} \tag{2.25}$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}_l=\frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\mathbf{I}-(\mathbf{B}\mathbf{H}+\mathbf{D}\mathbf{E})$$

在区域V内积分(2.25)式，便得到

$$-\oint_{\partial V}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}+\oint_{\partial V}\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}dS+\oint_{\partial V}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{m}dS$$

$$=\int_V[(\boldsymbol{\sigma}_s+\boldsymbol{\sigma}_l):\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\sigma}_a:\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\mu}:\mathrm{grad}\,\boldsymbol{\omega}]dV$$

$$+\int_V[(2\mathrm{vec}\,\boldsymbol{\sigma}-\rho\mathbf{c})\cdot\boldsymbol{\omega}-\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}]dV$$

$$+\int_V\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\rho\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}\cdot\boldsymbol{\omega}+\left(\mathbf{H}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{D}}{dt}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right]dV$$

$$+\int_V\left[\mathbf{v}\cdot\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})+\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\right.$$

$$\left.-(\mathbf{B}\wedge\mathbf{H}+\mathbf{D}\wedge\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\omega}\right]dV \tag{2.26}$$

其中

$\mathbf{F}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}$是表面力；$\mathbf{m}=\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{n}$是表面力偶；$\mathbf{n}$=外法线单位矢量.

方程(2.26)就是电磁场和变形介质相互作用的广义Poynting定理. 严格地说，它是(2.18)，(2.19)，(2.22)和(2.23)等场方程的能量积分，因而不论给它什么样的解释在数学上它是正确的.

这个定理具有普遍性的特征，这就是它对于可逆过程和不可逆过程同样都是适用的. 而且它包括了具有可极化和可磁化的两种极性介质. 它又不是脱离了场方程独立地建立起来的. 因此，不能按照人们考虑能量一样去解释，任意地加入或减去一些项. 但是，既然它是个能量积分，因此，我们就可以把它看作是电磁场和变形介质之间能量传递的方程. 然而，至于某些特殊项的解释就必须特别地注意. 因为根据 Truesdell 和 Toupin[3]的观点，机械能和电磁能各自都不守恒的，但是彼此是可转换的. 正因为这个原因原来针对静止介质的Poynting定理就不能看作是运动方程了，除非将方程(2.26)作为一个整体来看.

在方程(2.26)可以被充分解析之前，无论如何首先得弄清两个能源项$\rho\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\omega}$和$\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}$. 因为体积力偶$\rho\mathbf{c}$和体积力$\rho\mathbf{f}$一部分是属于机械的，另一部分又属于电磁的. 体积力偶和体积力的电磁部分有个设想和假设的问题，关于它们实际的形式，目前尚未有普遍一致的看法（例如参阅 Pao[19]). 在下面第三节，我们对$\rho\mathbf{f}$将作特殊的假设. 从而得到另一种特殊形

式的广义 Poynting 定理.

使用前面同样步骤，由方程组(2.20)、(2.21)，(2.22)、(2.23)也可以推导出另外形式的广义 Poynting 定理:

$$-\operatorname{div}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})+\operatorname{div}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma})-\boldsymbol{\sigma}_s:\boldsymbol{\psi}-\boldsymbol{\sigma}_a:\boldsymbol{\Omega}+\operatorname{div}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{\mu}:\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega}$$

$$=\rho\mathbf{v}\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right)_P+\rho\boldsymbol{\omega}\left(\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial t}\right)_P-\rho\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\omega}+2\boldsymbol{\omega}\cdot\operatorname{vec}\boldsymbol{\sigma}-\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}$$

$$+\left[\mathbf{H}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)_P+\mathbf{E}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)_P\right]+\mathbf{v}\cdot\left[\frac{\partial(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})}{\partial t}\right]_P+\boldsymbol{\sigma}_m:\boldsymbol{\psi}+\mathbf{v}\wedge\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\phi} \tag{2.27}$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}_m=\mathbf{v}\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}+\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}+\boldsymbol{\phi})+[(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})-\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}]\mathbf{I} \tag{2.28}$$

在推导(2.27)时，我们应用了公式（参阅附录）:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_P+\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{A} \tag{2.29}$$

在区域V 上积分，我们有:

$$-\oint_{\partial V}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})d\mathbf{S}+\oint_{\partial V}\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}dS+\oint_{\partial V}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{m}dS$$

$$=\int_V[(\boldsymbol{\sigma}_s+\boldsymbol{\sigma}_m):\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\sigma}_a:\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{\mu}:\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega}]\,dV$$

$$+\int_V\left\{\rho\mathbf{v}\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right)_P+\rho\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\phi}}{\partial t}\right)_P+\left[\mathbf{H}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)_P+\mathbf{E}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)_P\right]\right.$$

$$\left.+\mathbf{v}\cdot\left[\frac{\partial(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})}{\partial t}\right]_P\right\}dV+\int_V[(2\operatorname{vec}\boldsymbol{\sigma}-\rho\mathbf{c}+\boldsymbol{\phi}\wedge\mathbf{v})\cdot\boldsymbol{\omega}-\rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}]dV \tag{2.30}$$

采用形式(2.30)时，定理难以给予解释. 因为迁移微商$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_P$不遵守 Leibnitz 法则，因而象$\int_V\left[\mathbf{H}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)_P+\mathbf{E}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)_P\right]dV$ 这些项不可称作为总电磁能的增加率，我们在这里推导出这种形式是为了方便，因为在文献里有时应用到场矢量的迁移率的概念.

三、广义 Poynting 定理的一些特殊形式

根据电磁体积力的不同假设，我们便可以得到广义 Poynting 定理的不同的特殊形式，在这里我们简略地论述一下它的做法.

我们使

$\mathbf{D}\wedge(2.18)+\mathbf{B}\wedge(2.19)\Rightarrow$

$$\mathbf{D}\wedge\operatorname{curl}\mathbf{E}+\mathbf{B}\wedge\operatorname{curl}\mathbf{H}=\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})+\mathbf{D}\wedge(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\psi})-\mathbf{B}\wedge(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\psi})-\mathbf{B}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{D})$$

$$+\mathbf{D}\wedge(\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{B})+2\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\operatorname{div}\mathbf{v}+\mathbf{B}\wedge\mathbf{J} \tag{3.1}$$

进行适当的矢量变换后，我们便得出

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_l+q\mathbf{E}+\mathbf{J}\wedge\mathbf{B}+\frac{1}{2}[(\operatorname{grad}\mathbf{E})\cdot\mathbf{D}-(\operatorname{grad}\mathbf{D})\cdot\mathbf{E}]$$

$$+\frac{1}{2}[(\operatorname{grad}\mathbf{H})\cdot\mathbf{B}-(\operatorname{grad}\mathbf{B})\cdot\mathbf{H}]+\mathbf{D}\wedge(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\psi})-\mathbf{B}\wedge(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\psi})$$

$$+2\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\operatorname{div}\mathbf{v}+(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})\wedge\boldsymbol{\omega}=\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}) \tag{3.2}$$

类似于 (3.2) 的式子通常解释为电磁（线）动量守恒定律．但是，正如早已说明过的，电磁的和机械的动量各自都不守恒的．因此，尽管 (3.2) 具有平衡方程的“形式”，但显然不能看作是守恒的定律．我们在这里只不过把它看成是矢量的恒等式，仅仅是为了用一些场量来表示电磁体积力罢了．那末，例如我们可以假设体积力是由下式给出：

$$\rho\mathbf{f}=q\mathbf{E}+\mathbf{J}\wedge\mathbf{B}+\frac{1}{2}[(\operatorname{grad}\mathbf{E})\cdot\mathbf{D}-(\operatorname{grad}\mathbf{D})\mathbf{E}]$$

$$+\frac{1}{2}[(\operatorname{grad}\mathbf{H})\mathbf{B}-(\operatorname{grad}\mathbf{B})\cdot\mathbf{H}] \tag{3.3}$$

于是，恒等式(3.2)使我们能够写成：

$$\rho\mathbf{f}=\frac{d}{dt}(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D})-\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}_l+\mathbf{B}\wedge(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\psi})-\mathbf{D}\wedge(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\psi})-2\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\operatorname{div}\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\wedge(\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}) \tag{3.4}$$

将(3.4)代入(2.26)，我们得到广义 Poynting 定理的一种特殊形式：

$$-\oint_{\partial V}(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})d\mathbf{S}+\oint_{\partial V}(\mathbf{F}-\mathbf{F}_l)\cdot\mathbf{v}dS+\oint_{\partial V}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{m}dS$$

$$=\int_V\Big[\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\rho v^2\Big)+\rho\frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}\cdot\boldsymbol{\omega}+\Big(\mathbf{H}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{D}}{dt}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\cdot\operatorname{div}\mathbf{v}\Big]dV+\int_V(\boldsymbol{\sigma}_s:\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\sigma}_a:\boldsymbol{\Omega}$$

$$+\boldsymbol{\mu}:\operatorname{grad}\boldsymbol{\omega})dV+\int_V[(2\operatorname{vec}\boldsymbol{\sigma}-\rho\mathbf{c})\cdot\boldsymbol{\omega}+\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}]dV$$

$$+\int_V[\mathbf{v}\wedge\mathbf{D}\cdot(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\psi})-\mathbf{v}\wedge\mathbf{B}\cdot(\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\psi})+3\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}\operatorname{div}\mathbf{v}$$

$$+2\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}-(\mathbf{B}\wedge\mathbf{H}+\mathbf{D}\wedge\mathbf{E})\cdot\boldsymbol{\omega}]dV \tag{3.5}$$

其中 $\mathbf{F}_l=\boldsymbol{\sigma}_l\cdot\mathbf{n}$

当然，将(3.3)式代入到(2.26)就可以得到上述方程的另外一种形式．但这里从略．

引进由下面定义的极化矢量 **P** 和磁化矢量 **M**：

$$\mathbf{P}=\mathbf{D}-\epsilon_0\mathbf{E},\qquad \mathbf{M}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{H} \tag{3.6}$$

我们可以得到这定理又一种特殊的形式．于是，特别地我们有：

$$\int_V\Big[\Big(\mathbf{H}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt}+\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{D}}{dt}\Big)+\frac{1}{2}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})\operatorname{div}\mathbf{v}\Big]dV$$

$$=\frac{d}{dt}\int_V\frac{1}{2}(\mu_0\mathbf{H}^2+\epsilon_0\mathbf{E}^2)dV+\int_V\Big[\Big(\mu_0\mathbf{H}\frac{d\mathbf{M}}{dt}+\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{P}}{dt}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}(\mu_0\mathbf{M}\cdot\mathbf{H}+\mathbf{P}\cdot\mathbf{E})\operatorname{div}\mathbf{v}\Big]dV \tag{3.7}$$

$$\mathbf{B}\wedge\mathbf{H}+\mathbf{D}\wedge\mathbf{E}=\mu_0\mathbf{M}\wedge\mathbf{H}+\mathbf{P}\wedge\mathbf{E} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{B}\wedge\mathbf{D}=\mu_0(\mathbf{P}\wedge\mathbf{M}+\mathbf{P}\wedge\mathbf{H}+\epsilon_0\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}+\epsilon_0\mathbf{E}\wedge\mathbf{M}) \tag{3.9}$$

将表达式(3.7)、(3.8)和(3.9)代入(2.26)和上面的(3.5)我们便得到用极化矢量和磁化矢量表示的广义 Poynting 定理。

附 录

为了推导(2.16)式和(2.29)式，我们必须确定变形体的运动．首先，让我们将物体的每一个质点 P 用三个有序的实数组（ξ^α）注上记号，并且在整个运动过程中，质点都保留着这样的记号．又如果 $\mathbf{r}$ 是质点P在时刻 t 占据E^3 空间中的Q点的位置矢量的话，那末，基本关系式

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(\xi^\alpha,\ t) \tag{1}$$

就完全描述出物体的运动．且这函数瞬时地嵌入E^3空间内的质点．它也可以称之为物体的流动位形．

设

$$\mathbf{e}_\alpha=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi^\alpha} \tag{2}$$

这样使得 $0<\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3<\infty$

可是，既然（ξ^α）追随着物体的运动是不变的，因此，我们必须有

$$\frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt}=\frac{\partial}{\partial\xi^\alpha}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{\xi^\alpha-\text{const}}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^\alpha} \tag{3}$$

其中 $\mathbf{v}$ 是 P 的速度矢量．

因为我们有，$\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}^\beta=\delta_\alpha^\beta$．因此(3)式也可以写成：

$$\frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt}=\mathbf{e}_\alpha\cdot\mathbf{e}^\beta\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi^\beta}=\mathbf{e}_\alpha\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v} \tag{4}$$

当涉及到变形体时，任何矢量场$\mathbf{A}$可以表示成

$$\mathbf{A}=A^\alpha\mathbf{e}_\alpha \tag{5}$$

考虑到(4)式，于是

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\frac{dA^\alpha}{dt}\mathbf{e}_\alpha+A^\alpha\frac{d\mathbf{e}_\alpha}{dt}=\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_P+\mathbf{A}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v} \tag{6}$$

其中

$$\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_P=\frac{dA^\alpha}{dt}\mathbf{e}_\alpha$$

称为追随 P 运动 $\mathbf{A}$ 的改变率．但是，我们也有：

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}=\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)_Q+\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{A} \tag{7}$$

将(6)和(7)两式的右边相等起来并应用矢量恒等式

$$\operatorname{curl}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})=\mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v}-\mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{u}+\mathbf{v}\operatorname{grad}\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v} \tag{8}$$

我们便得到(2.16)。

因为 $\operatorname{grad}\mathbf{v}=\psi-\frac{1}{2}\mathbf{I}\wedge\operatorname{curl}\mathbf{v}$

故方程(2.29)直接从(6)式得到。

参 考 文 献

[1] Toupin, R. A., The elastic dielectric, *J. Rat. Mech. Anai.*, 5(1956), 849—915

[2] Toupin, R. A., A dynamical theory of dielectrics, *Int J Engr. Sci.*, 1(1963), 101—126.

[3] Truesdell, C. A. and R. A. Toupin, The Classical Field Theories, *Handbuch Der Physik*, Band III/1, Springer-Verlag, Berlin(1960).

[4] Dixon, R. C. and A. C. Eringen, A dynamical theory of polar dielectrics, I and II, *Int. J. Engr. Sci.*, 3(1965), 359—398.

[5] Hutter, K. and Y H. Pao, A dynamical theory for magnetizable elastic solids with thermal and electrical conductions, *J. of Elasticity*, 4(1974), 89—114.

[6] Pao, Y. H. and K. Hutter, Electrodynamics for moving elastic solids and viscous fluids, *Proc. I. E.E.E.*, 63(1975), 1011—1021.

[7] Maugin, G. A., A phenomenological theory of ferroliquids, *Int. J Eng. Sci.*, 16 (1978), 1029—1044.

[8] Ersoy, Y. and E. Kiral, A dynamical theory for polarizable and magnetizable magneto-electro thermovisco-elastic, electrically conductive anisotropic solids having magnetic symmetry, *Int. J. Engr. Sci.*, 16(1978), 483—492.

[9] Collet, B. et G. Maugin, Sur l'electrodynamique des milieux continus avec interaction, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 279(1974), Serie B, 379—382.

[10] Maugin, B. et B. Collet, Thermodynamique des milieux continu electromagnetiques avec interactions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t 279(1974), Serie B, 439—442.

[11] Collet, B., Higher order surface couplings in elastic ferromagnets, *Int. J Engr. Sci.*,16(1978), 349—364.

[12] Sedov, L. I., Mathematical method of constructing new models of continuous media, *Uspekhi Matem. Nank.*, 20, 5(1965).

[13] Sedov, L. I., On the pondermotive forces of interaction between an electromagnetic field and an accelerating material continuum taking into account finite deformations, *PMM*, 29, 6(1965), 4—17.

[14] Shetein, A A., Models of polarizable media and the averaged relations which correspond to these in the case of high-frequency electromagnetic field, *PMM*, 41,2(1977), 271—281.

[15] Tsypkin, A. G., On a model of continuous medium with electromagnetic effects taken into account, *PMM*, 41, 1(1977),34—40.

[16] Zhelnorovich, V. A. and L. I. Sekov, On the variational method of derivation of equation of state of a material medium and gravitational field, *PMM*, 42, 5(1978). 771—780.

[17] Sedov, L. I. and A. G. Tsypkin, On the construction of models of continuous media interacting with an electromagnetic field, *PMM*, 43, 3(1979), 387—400.

[18] Stratton, J. A., *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill, N. Y.(1941).

[19] Pao, Y. H., Electromagnetic forces in deformable continua, *Mechanics Today*, Vol. 4, ed. by S. Nemat-Nasser, Pergamon, Oxford(1978).

On the Law of Energy Conservation in the Classical Electrodynamics of Deformable Media——A Generalization of the Poynting Theorem

Yu Xin

(South China Institute of Technology, Guangzhou)

Abstract

This paper establishes the generalized pointing theorem for the electrodynamics of deformable media with a view to shedding some light on the detailed mechanism of energy transfer between the electromagnetic field and the deformable media. Global field equations are chosen as the starting point and specialized forms of the theorem are derived based on the special postulates for the electromagnetic body force.