应用数学和力学，第5卷第1期（1984年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

相关位函数和求解Maxwell方程的新方法*

李春宝　王百锁

（大连海运学院电子系，1983年2月25日收到）

摘　要

本文是文[1]的继续．

一、本文引入了一个新的位函数——相关位函数ψ．它与经典的Helmholtz的标位ϕ和矢位$\vec{A}$不同．由ψ，我们得到了求解方程组$\nabla\times\vec{f}=\vec{\omega}$，$\nabla\cdot\vec{f}=P$的新公式．

二、在交变电磁场中，我们引入了两个新的滞后位函数：滞后相关电位ψ_e和滞后相关磁位ψ_m．这两个位函数不同于经典的滞后位$\vec{A}$和ϕ．由ψ_e和ψ_m，我们得到了求解Maxwell方程组的新公式．

三、指出了构建具有给定旋度函数（旋涡）的涡旋场的方法．

在历史上，求解$\nabla\times\vec{f}=\vec{\omega}$，$\nabla\cdot\vec{f}=P$方程组是采用Helmholtz的方法．在这种方法中，是把一般的矢量场（有旋有散场）分解成三部分：有旋无散场（涡旋场），有散无旋场（位场）和无旋无散场（调和场）．为了得到$\vec{f}$，人们不仅要解四个Poisson方程，而且还要解一个Neumann边值问题．

本文引入了一种新方法．利用旋度函数和散度函数之间的转化，我们引入了一个新的位函数——相关位函数ψ．结果使求解问题得到简化．只要解一个Poisson方程和一个Neumann边值问题就能得到$\vec{f}$．

将本文的方法应用于求解Maxwell方程时，既不需要求解滞后位$\vec{A}$和ϕ的四个波动方程式（借助Lorentz条件可不必解ϕ），也不需要求解Hertz矢位$\vec{\pi}$的三个波动方程式，而只需要求解滞后相关电位ψ_e和滞后相关磁位ψ_m的两个波动方程式．

本文的方法简化了求解矢量场的问题，这将有利于采用数字计算机进行离散的数值计算．

在矢量场中，涡旋场占有极重要的位置．本文指出了构建具有给定强度旋涡的涡旋场的方法，这对于通过人工综合产生具有给定强度旋涡的涡旋场提供了可能性．

一、一般矢量场的方程组及其解

在区域V内和其封闭曲面S上，矢量场$\vec{f}$满足：

---

* 钱伟长推荐．

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{f}=\vec{\omega} & (\text{在}V\text{内}) & (1.1a) \\ \nabla\cdot\vec{f}=P & (\text{在}V\text{内}) & (1.1b) \\ \vec{n}\cdot\vec{f}=g(M) & (\text{在}S\text{上}) & (1.1c) \end{cases}$$

$$\vec{\omega}=\vec{e}_1\omega_1+\vec{e}_2\omega_2+\vec{e}_3\omega_3 \tag{1.2}$$

这里$\vec{\omega}$和P为已知函数，$\vec{n}$是S上的外指单位法向量，M是S上的点．如图1所示．函数$g(M)$和P满足关系式：

$$\oint_S g\ (M)\ dS=\int_V PdV \tag{1.3}$$

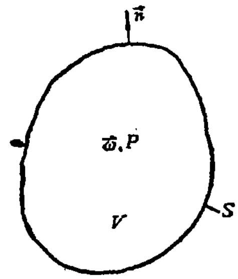

图　1

由(1.1a)可得

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{f})=\nabla\cdot\vec{\omega}=0 \tag{1.4}$$

由Helmholtz定理可知，方程组(1.1)的解是唯一的．

本文将证明，方程组(1.1)的解为：

$$\vec{f}=-\nabla\psi+\vec{e}_2\left(\frac{1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1\right)+\vec{e}_3\left(-\frac{1}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1\right)-\nabla\psi'=\vec{F}+\vec{F}' \tag{1.5}$$

其中

$$\vec{F}=\vec{e}_1\left(-\frac{1}{h_1}\ \frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\vec{e}_2\left(\frac{1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1-\frac{1}{h_2}\ \frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)$$

$$+\vec{e}_3\left(-\frac{1}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1-\frac{1}{h_3}\ \frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)$$

$$=-\nabla\psi+\vec{e}_2\left(\frac{1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1\right)+\vec{e}_3\left(-\frac{1}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1\right) \tag{1.6}$$

ψ满足Poisson方程：

$$\Delta\psi=-P+\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1\right)-\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1\right)\right] \tag{1.7}$$

ψ称为矢量场的相关位．而

$$\vec{F}'=-\nabla\psi' \tag{1.8}$$

ψ'满足如下的Laplace方程和边界条件：

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\psi'=0 && (\text{在}V\text{内}) \\ &\vec{n}\cdot\vec{F}'=-\frac{\partial\psi'}{\partial n}=\vec{n}\cdot\vec{f}-\vec{n}\cdot\vec{F}=g(M)-\vec{n}\cdot\vec{F} && (\text{在}S\text{上}) \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

这里u_1，u_2，u_3是正交曲线坐标系中的坐标变量；$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$是其单位矢量；而$h_1$ h_2，h_3是其标度因子．

现在来证明上述结论．令

$$\vec{f}=\vec{F}+\vec{F}'$$

$\vec{F}$和$\vec{F}'$分别满足方程组：

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{F}=\vec{\omega} & (1.10a) \\ \nabla\cdot\vec{F}=P & (1.10b) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\vec{F}'=0\\&\nabla\cdot\vec{F}'=0\\&\vec{n}\cdot\vec{F}'=\vec{n}\cdot\vec{f}-\vec{n}\cdot\vec{F}=g(M)-\vec{n}\cdot\vec{F}\end{aligned}\right\}\tag{1.11}$$

方程(1.11) 是 Neumann 边值问题，其求解方法在一般矢量分析著作中都可找到，因此这里不再赘述．下面来求解方程(1.10)．

在正交曲线坐标系中，$\vec{F}=\vec{e}_1F_1+\vec{e}_2F_2+\vec{e}_3F_3$．方程(1.10)可以写成：

$$\frac{1}{h_2\,h_3}\left[\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial u_3}\right]=\omega_1\tag{1.12a}$$

$$\frac{1}{h_3\,h_1}\left[\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial u_3}-\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial u_1}\right]=\omega_2\tag{1.12b}$$

$$\frac{1}{h_1\,h_2}\left[\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial u_1}-\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial u_2}\right]=\omega_3\tag{1.12c}$$

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3F_1)}{\partial u_1}+\frac{\partial(h_3h_1F_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(h_1h_2F_3)}{\partial u_3}\right]=P\tag{1.12d}$$

设$\psi=\psi(u_1,u_2,u_3)$是我们所要寻求的相关标量位．令

$$h_1F_1=-\frac{\partial\psi}{\partial u_1},\ F_1=-\frac{1}{h_1}\ \frac{\partial\psi}{\partial u_1}\tag{1.13}$$

由(1.12b)和(1.13)得

$$\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial u_1}=-h_3h_1\omega_2+\frac{\partial(h_1F_1)}{\partial u_3}=-h_3h_1\omega_2-\frac{\partial^2\psi}{\partial u_3\,\partial u_1}$$

对u_1积分，得

$$F_3=-\frac{1}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1-\frac{1}{h_3}\ \frac{\partial\psi}{\partial u_3}\tag{1.14}$$

因是特解，可令积分常数为零（下同）．同理，由(1.12c)和(1.13)得

$$F_2=\frac{1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1-\frac{1}{h_2}\ \frac{\partial\psi}{\partial u_2}\tag{1.15}$$

由(1.13)、(1.14)和(1.15)所确定的$\vec{F}$显然满足(1.12b)和(1.12c)．下面来证明它满足(1.12a)．将(1.14)和(1.15)代入(1.12a)的左方，则

$$\frac{1}{h_2\,h_3}\left[\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial u_3}\right]$$

$$=-\frac{1}{h_2\,h_3}\int\frac{\partial(h_3h_1\omega_2)}{\partial u_2}\,du_1-\frac{\partial^2\psi}{\partial u_3\partial u_2}-\frac{1}{h_2\,h_3}\int\frac{\partial(h_1h_2\omega_3)}{\partial u_3}\,du_1+\frac{\partial^2\psi}{\partial u_2\partial u_3}$$

$$=-\frac{1}{h_2\,h_3}\int\left[\frac{\partial(h_3h_1\omega_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(h_1h_2\omega_3)}{\partial u_3}\right]du_1\tag{1.16}$$

由(1.4)式可得

$$\nabla\cdot\vec{\omega}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3\omega_1)}{\partial u_1}+\frac{\partial(h_3h_1\omega_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(h_1h_2\omega_3)}{\partial u_3}\right]=0$$

$$\frac{\partial(h_2h_3\omega_1)}{\partial u_1}=-\left[\frac{\partial(h_3h_1\omega_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(h_1h_2\omega_3)}{\partial u_3}\right]$$

将上式代入(1.16)式，得

$$\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3F_3)}{\partial u_2}-\frac{\partial(h_2F_2)}{\partial u_3}\right]=\frac{1}{h_2 h_3}\int\frac{\partial(h_2h_3\omega_1)}{\partial u_1}du_1=\omega_1$$

因此，由(1.13)、(1.14)和(1.15)所确定的矢量$\vec{F}$满足(1.10a)。

剩下的问题是：由 (1.13)、(1.14) 和 (1.15) 所确定的$\vec{F}$必须满足方程 (1.12d)。将(1.13)、(1.14)和(1.15)代入(1.12d)，得

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(-\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1-\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(-\frac{h_1 h_2}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1-\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right]=P$$

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1\right)-\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1\right)\right]=-P$$

上式左边第一项就是正交曲线坐标系中的Laplace算子，于是上式可以写成：

$$\Delta\psi=-P+\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1\right)-\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1\right)\right]\tag{1.17}$$

由上式可知，我们在(1.13)式中欲寻求的函数ψ乃是Poisson方程(1.17) 的解．这样，将(1.17)解出的ψ代入(1.13)、(1.14)和(1.15)即可求出F_1，F_2和F_3。于是

$$\vec{F}=\vec{e}_1\left(-\frac{1}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial u_1}\right)+\vec{e}_2\left(-\frac{1}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial u_2}+\frac{1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1\right)$$

$$+\vec{e}_3\left(-\frac{1}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial u_3}-\frac{1}{h_3}\int h_1h_3\omega_2du_1\right)$$

$$=-\nabla\psi+\vec{e}_2\left(\frac{1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1\right)+\vec{e}_3\left(-\frac{1}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1\right)$$

这就是(1.6)式，它就是满足方程(1.1)的特解．如果旋涡$\vec{\omega}$和源头P是分布在有限区域V'内的，而我们所讨论的空间V是无限大的，则$\vec{F}'=0$，于是$\vec{f}=\vec{F}$。如果空间V是有限的，则$\vec{F}$仅仅是全解$\vec{f}$中的一部分，即$\vec{f}=\vec{F}+\vec{F}'$。$\vec{F}'$满足方程组(1.11)。

下面我们将公式(1.13)、(1.14)、(1.15)和(1.17)分别在直角坐标系、柱坐标系和球坐标系中表出。

在直角坐标系中：

$$u_1=x,\qquad u_2=y,\qquad u_3=z$$

$$h_1=1,\qquad h_2=1,\qquad h_3=1$$

$$\Delta\psi=-P+\frac{\partial}{\partial y}\int\omega_z dx-\frac{\partial}{\partial z}\int\omega_y dx=-P+\int\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)dx\tag{1.18}$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ F_y &= \int\omega_z dx - \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ F_z &= -\int\omega_y dx - \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

在柱坐标系中：

$u_1=r,\qquad u_2=\phi,\qquad u_3=z$

$h_1=1,\qquad h_2=r,\qquad h_3=1$

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -P+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r}\int r\omega_z dr\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(r\int\omega_\phi dr\right)\right] \\ &= -P+\frac{1}{r^2}\int r\frac{\partial\omega_z}{\partial\phi}dr-\int\frac{\partial\omega_\phi}{\partial z}dr \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\left.\begin{aligned} F_r &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} \\ F_\phi &= \frac{1}{r}\int r\omega_z dr-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \\ F_z &= -\int\omega_\phi dr-\frac{\partial\psi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

在球坐标系中：

$u_1=r,\qquad u_2=\theta,\qquad u_3=\phi$

$h_1=1,\qquad h_2=r,\qquad h_3=r\sin\theta$

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -P+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\int r\omega_\phi dr\right)-\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\int r\sin\theta\,\omega_\theta dr\right)\right] \\ &= -P+\frac{1}{r^2\sin\theta}\int\frac{\partial(r\sin\theta\,\omega_\phi)}{\partial\theta}dr-\frac{1}{r^2\sin\theta}\int\frac{\partial(r\omega_\theta)}{\partial\phi}dr \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\left.\begin{aligned} F_r &= -\frac{\partial\psi}{\partial r} \\ F_\theta &= \frac{1}{r}\int r\omega_\phi dr-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ F_\phi &= -\frac{1}{r}\int r\omega_\theta dr-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

下面举例来说明(1.7)式的应用。

在真空(μ_0)中，沿z方向的电流密度为：

$$\vec{J}=\begin{cases}\vec{K}J_0 r & (r\leqslant R)\\ 0 & (r>R)\end{cases}$$

如图 2 所示。求柱内($r<R$)和柱外($r>R$)的磁场分布。

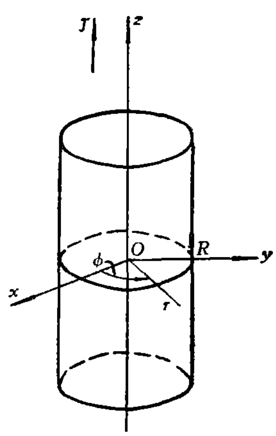

图 2

我们将柱内记为Ⅰ区，柱外记为Ⅱ区。在柱内、柱外磁场$\vec{H}$

分别满足方程：

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{H}_1&=\vec{K}J_0r\\ \nabla\cdot\vec{H}_1&=0\end{aligned}\right\}\tag{1.24}$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{H}_2&=0\\ \nabla\cdot\vec{H}_2&=0\end{aligned}\right\}\tag{1.25}$$

在柱面$S(r=R)$上，$\vec{H}$的边界条件为：

$$\vec{e}_r\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)=0\tag{1.26}$$

在本问题中，ψ与r，z无关，ψ仅仅是ϕ的函数．先讨论柱内情况．由(1.20)式，得

$$\Delta\psi_1=\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2\psi_1}{\partial\phi^2}=0$$

解得

$$\psi_1=A_1\phi+B_1$$

这里A_1和B_1是积分常数．由(1.21)式得

$$\begin{cases}H_{1r}=0\\ H_{1\phi}=\dfrac{1}{r}\displaystyle\int r^2J_0dr-\dfrac{1}{r}\ \dfrac{\partial}{\partial\phi}(A_1\phi+B_1)=\dfrac{1}{3}J_0r^2-\dfrac{A_1}{r}\\ H_{1z}=0\end{cases}$$

考虑到在柱内$r=0$处，$\vec{H}_1$应当有限，这就要求常数$A_1=0$，于是

$$\vec{H}_1=\vec{e}_\phi\frac{1}{3}J_0r^2\tag{1.27}$$

在柱外，电流密度为零，ψ_2的解应当是

$$\Delta\psi_2=\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2\psi_2}{\partial\phi^2}=0$$

$$\psi_2=A_2\phi+B_2$$

$$\begin{cases}H_{2r}=0\\ H_{2\phi}=-\dfrac{1}{r}\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\phi}=-\dfrac{A_2}{r}\\ H_{2z}=0\end{cases}$$

$$\vec{H}_2=-\vec{e}_\phi\frac{A_2}{r}\tag{1.28}$$

使(1.27)和(1.28)满足边界条件(1.26)，得

$$\vec{e}_r\times\vec{e}_\phi\left(-\frac{A_2}{R}-\frac{1}{3}J_0R^2\right)=0$$

解得A_2为：

$$A_2=-\frac{1}{3}J_0R^3$$

于是，我们所要求的柱内、外磁场分别为：

$$\vec{H}_1=\vec{e}_\phi\frac{1}{3}J_0r^2\tag{1.29}$$

$$\vec{H}_2=\vec{e}_\phi\frac{1}{3}J_0R^3\frac{1}{r} \tag{1.30}$$

这与经典方法所得结果相同.因为我们是在无限大空间中讨论问题的,因此不必考虑Neumann边值问题.

二、用相关位求解 Maxwell 方程

假设在真空(μ_0, ε_0)中，施加的电流密度

$$\vec{J}=\vec{i}J_x+\vec{j}J_y+\vec{k}J_z$$

和电荷密度ρ的分布已知时，则经典的滞后位$\vec{A}$，ϕ和场量$\vec{E}$，$\vec{H}$满足:

$$\Delta\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J} \tag{2.1a}$$

$$\Delta\phi-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.1b}$$

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\phi \tag{2.1c}$$

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A} \tag{2.1d}$$

因此，为了求得$\vec{E}$和$\vec{H}$，我们至少得解$\vec{A}$的三个波动方程式．采用本文的方法，只需要求解两个标量ψ_e和ψ_m的两个波动方程式，就可以求得$\vec{E}$和$\vec{H}$．这些方程是:

$$\Delta\psi_e-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\psi_e}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}-\mu_0\int\frac{\partial J_x}{\partial t}dx \tag{2.2}$$

$$\Delta\psi_m-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\psi_m}{\partial t^2}=\int\left(\frac{\partial J_y}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial y}\right)dz \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}=&-\nabla\psi_e+\vec{j}\mu_0\int\frac{\partial^2\psi_m}{\partial z\partial t}dx\\&+\vec{k}\left[-\mu_0\iint\frac{\partial J_x}{\partial t}dzdx+\mu_0\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial t^2}dz-\mu_0\int\frac{\partial^2\psi_m}{\partial y\partial t}dx\right]\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}=&-\nabla\psi_m+\vec{i}\left[\int J_ydz+\mu_0\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_m}{\partial t^2}dx-\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial y\partial t}dz\right]\\&+\vec{j}\left[-\int J_xdz+\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial x\partial t}dz\right]\end{aligned} \tag{2.5}$$

在以上各式中足码x，y和z可以按右手系顺序轮换．下面我们来证明 (2.2)～(2.5) 式．在真空中，Maxwell方程组为:

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\vec{\xi} & (2.6)\\[2ex] \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{\eta} & (2.7)\end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (2.8)\\ \nabla\cdot\vec{H}=0 \qquad (2.9)\end{array}\right.$$

借助于公式(1.18)和(1.19)，可由(2.6)和(2.8)得到：

$$E_x=-\frac{\partial\psi_e}{\partial x} \tag{2.10}$$

这里$\psi_e=\psi_e(x,y,z,t)$是第一个标位函数，称为滞后相关电位。

$$E_y=\int\xi_z dx-\frac{\partial\psi_e}{\partial y}=-\mu_0\int\frac{\partial H_z}{\partial t}dx-\frac{\partial\psi_e}{\partial y} \tag{2.11}$$

$$E_z=-\int\xi_y dx-\frac{\partial\psi_e}{\partial z}=\mu_0\int\frac{\partial H_y}{\partial t}dx-\frac{\partial\psi_e}{\partial z} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\Delta\psi_e&=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}+\int\left(\frac{\partial\xi_z}{\partial y}-\frac{\partial\xi_y}{\partial z}\right)dx\\ &=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}-\mu_0\int\left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial y\partial t}-\frac{\partial^2 H_y}{\partial z\partial t}\right)dx\\ &=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)dx\\ &=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\int\eta_x dx\\ &=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\int\left(J_x+\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)dx\\ &=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}-\mu_0\int\frac{\partial J_x}{\partial t}dx+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\psi_e}{\partial t^2}\end{aligned}$$

于是

$$\Delta\psi_e-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\psi_e}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}-\mu_0\int\frac{\partial J_x}{\partial t}dx \tag{2.13}$$

这就是(2.2)式。同理由(2.7)和(2.9)式可得：

$$H_z=-\frac{\partial\psi_m}{\partial z} \tag{2.14}$$

这里$\psi_m=\psi_m(x,y,z,t)$是第二个标位函数，称为滞后相关磁位。

$$H_x=\int\eta_y dz-\frac{\partial\psi_m}{\partial x}=\int J_y dz+\varepsilon_0\int\frac{\partial E_y}{\partial t}dz-\frac{\partial\psi_m}{\partial x} \tag{2.15}$$

$$H_y=-\int\eta_x dz-\frac{\partial\psi_m}{\partial y}=-\int J_x dz-\varepsilon_0\int\frac{\partial E_x}{\partial t}dz-\frac{\partial\psi_m}{\partial y} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\Delta\psi_m&=\int\left(\frac{\partial\eta_y}{\partial x}-\frac{\partial\eta_x}{\partial y}\right)dz\\ &=\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(J_y+\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(J_x+\varepsilon_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)\right]dz\end{aligned}$$

$$=\int\left(\frac{\partial J_y}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial y}\right)dz+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)dz$$

$$=\int\left(\frac{\partial J_y}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial y}\right)dz+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int-\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}dz$$

$$=\int\left(\frac{\partial J_y}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial y}\right)dz+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{\partial^2\psi_m}{\partial z\partial t}dz$$

$$=\int\left(\frac{\partial J_y}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial y}\right)dz+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\psi_m}{\partial t^2}$$

于是

$$\Delta\psi_m-\psi_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\psi_m}{\partial t^2}=\int\left(\frac{\partial J_y}{\partial x}-\frac{\partial J_x}{\partial y}\right)dz \tag{2.17}$$

这就是(2.3)式。为了求得$\vec{E}$和$\vec{H}$，我们还需要将(2.11)、(2.12)、(2.15)和(2.16)中的H_z, H_y, E_y和E_x用ψ_e和ψ_m来代替。将(2.14)式代入(2.11)式，得

$$E_y=-\mu_0\int\frac{\partial H_z}{\partial t}dx-\frac{\partial\psi_e}{\partial y}=\mu_0\int\frac{\partial^2\psi_m}{\partial z\partial t}dx-\frac{\partial\psi_e}{\partial y} \tag{2.18}$$

将(2.10)式代入(2.16)式，得

$$H_y=-\int J_x dz-\varepsilon_0\int\frac{\partial E_x}{\partial t}dz-\frac{\partial\psi_m}{\partial y}$$

$$=-\int J_x dz+\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial x\partial t}dz-\frac{\partial\psi_m}{\partial y} \tag{2.19}$$

将(2.19)式代入(2.12)式，得

$$E_z=\mu_0\int\frac{\partial H_y}{\partial t}dx-\frac{\partial\psi_e}{\partial z}$$

$$=\mu_0\int\frac{\partial}{\partial t}\left[-\int J_x dz+\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial x\partial t}dz-\frac{\partial\psi_m}{\partial y}\right]dx-\frac{\partial\psi_e}{\partial z}$$

$$=-\mu_0\iint\frac{\partial J_x}{\partial t}dzdx+\mu_0\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial t^2}dz-\mu_0\int\frac{\partial^2\psi_m}{\partial y\partial t}dx-\frac{\partial\psi_e}{\partial z} \tag{2.20}$$

将(2.18)式代入(2.15)式，得

$$H_x=\int J_y dz+\varepsilon_0\int\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu_0\int\frac{\partial^2\psi_m}{\partial z\partial t}dx-\frac{\partial\psi_e}{\partial y}\right]dz-\frac{\partial\psi_m}{\partial x}$$

$$=\int J_y dz+\mu_0\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_m}{\partial t^2}dx-\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial y\partial t}dz-\frac{\partial\psi_m}{\partial x} \tag{2.21}$$

(2.10)、(2.18)和(2.20)就是$\vec{E}$的三个分量表示式，而(2.21)、(2.19)和(2.14)就是$\vec{H}$的三个分量表示式。

作为公式(2.2)～(2.5)的应用，我们来求解Hertz偶极子的场。

Hertz偶极子是一个长度为l的线电流元：

$$I=I_0\exp(j\omega t)$$

这里ω是角频率。电流元沿z轴放置，且位于原点。如图3所示。为方便计，假设I_0是一个实常数。在电流元的上、下两端分别积聚了电荷$\pm q$，$q=\frac{1}{j\omega}I_0$。

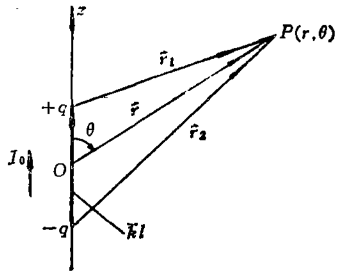

图 3

由于$\frac{\partial J_x}{\partial t}=0$，$\frac{\partial J_y}{\partial x}=0$，$\frac{\partial J_x}{\partial y}=0$，此时方程(2.2)和(2.3)简化成：

$$\Delta\psi_e-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\psi_e}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.22a}$$

$$\Delta\psi_m-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\psi_m}{\partial t^2}=0 \tag{2.22b}$$

在球坐标系中，ψ_e为：

$$\psi_e=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\theta}{r^2}+\frac{jK_0\cos\theta}{r}\right)\exp(-jK_0r) \tag{2.23a}$$

在上式中省去了时间因子$\exp(j\omega t)$，$K_0=\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\omega$是自由空间波数，$r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$是从原点到场点的距离。在角坐标系中，(2.23a)变成：

$$\psi_e=A\left(\frac{z}{r^3}+jK_0\frac{z}{r^2}\right)\exp(-jK_0r) \tag{2.23b}$$

其中$A=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}$。因为产生电磁场的源仅仅分布在原点附近，而我们是在无限大空间内讨论问题的，所以，我们只需要求出(2.22)式的特解，即偶极子本身所产生的场。齐次波动方程的解是由无限远处的源产生的，而不是由偶极子产生的。因此，对本问题来说，我们可以令齐次波动方程的解为零。鉴于上述理由，对于(2.22b)，我们有

$$\psi_m=0 \tag{2.24}$$

在求得了二标位ψ_e和ψ_m之后，我们便可通过(2.4)和(2.5)来计算$\vec{H}$和$\vec{E}$。先来计算$\vec{H}$。由(2.5)式得

$$\vec{H}=-\vec{i}\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial y\partial t}dz+\vec{j}\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial x\partial t}dz \tag{2.25}$$

$$\frac{\partial\psi_e}{\partial y}=-A\left(\frac{3yz}{r^5}+jK_0\frac{3yz}{r^4}-K_0^2\frac{yz}{r}\right)\exp(-jK_0r)$$

$$\frac{\partial^2\psi_e}{\partial y\partial t}=-j\omega A\left(\frac{3yz}{r^5}+jK_0\frac{3yz}{r^4}-K_0^2\frac{yz}{r}\right)\exp(-jK_0r)$$

$$\frac{\partial\psi_e}{\partial x}=-A\left(\frac{3zx}{r^5}+jK_0\frac{3zx}{r^4}-K_0^2\frac{zx}{r}\right)\exp(-jK_0r)$$

$$\frac{\partial^2\psi_e}{\partial x\partial t}=-j\omega A\left(\frac{3zx}{r^5}+jK_0\frac{3zx}{r^4}-K_0^2\frac{zx}{r}\right)\exp(-jK_0r)$$

于是

$$H_x=-\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial y\partial t}dz=-j\omega\varepsilon_0A\left(\frac{y}{r^3}+jK_0\frac{y}{r^2}\right)\exp(-jK_0r)$$

$$=-j\frac{\omega ql}{4\pi}\left(\frac{y}{r^3}+jK_0\frac{y}{r^2}\right)\exp(-jK_0r)$$

$$H_y=\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial x\partial t}dz=j\frac{\omega ql}{4\pi}\left(\frac{x}{r^3}+jK_0\frac{x}{r^2}\right)\exp(-jK_0r)$$

$$H_z=0$$

由变换公式，

$$\begin{pmatrix}H_r\\H_\theta\\H_\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_x\\H_y\\H_z\end{pmatrix}$$

可得$\vec{H}$在球坐标系中的表示式为：

$$H_r=0$$

$$H_\theta=0$$

$$H_\phi=-\sin\phi H_x+\cos\phi H_y=j\frac{\omega ql}{4\pi}\sin\theta\left(\frac{1}{r^2}+\frac{jK_0}{r}\right)\exp(-jK_0r)$$

$$=\frac{I_0l}{4\pi}\sin\theta\left(\frac{jK_0}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\exp(-jK_0r) \tag{2.26}$$

而由(2.4)式可求得$\vec{E}$是：

$$\vec{E}=-\nabla\psi_e+\vec{k}\mu_0\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial t^2}dz \tag{2.27}$$

经过计算，$\vec{E}$在球坐标系中为：

$$\vec{E}=-j\frac{I_0l}{2\pi\omega\varepsilon_0}\cos\theta\left(\frac{jK_0}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)\exp(-jK_0r)\vec{e}_r$$

$$-j\frac{I_0l}{4\pi\omega\varepsilon_0}\sin\theta\left(-\frac{K_0^2}{r}+\frac{jK_0}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)\exp(-jK_0r)\vec{e}_\theta \tag{2.28}$$

以上结果与经典方法所得相同。我们还能更直截了当地证明，用(2.4)式和用经典的(2.1c)所算得的$\vec{E}$相同。考虑到$\psi_e=\phi$，由(2.1c)和(2.27)可知，只要能证明

$$-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\vec{k}\mu_0\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial t^2}dz$$

那末就可以说明两种方法所算得的$\vec{E}$相同。Hertz偶极子的矢位为：

$$\vec{A}=\vec{k}\frac{\mu_0I_0l}{4\pi r}\exp(-jK_0r)=\vec{k}\frac{j\omega\mu_0ql}{4\pi r}\exp(-jK_0r)$$

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\vec{k}\frac{\omega^2\mu_0ql}{4\pi r}\exp(-jK_0r)$$

而

$$\vec{k}\mu_0\varepsilon_0\int\frac{\partial^2\psi_e}{\partial t^2}dz=\vec{k}\frac{\mu_0\varepsilon_0ql}{4\pi\varepsilon_0}(j\omega)^2\int\left(\frac{z}{r^3}+jK_0\frac{z}{r^2}\right)\exp(-jK_0r)\,dz$$

$$=-\vec{k}\frac{\omega^2\mu_0ql}{4\pi}\left(-\frac{1}{r}\exp(-jK_0r)\right)$$

$$=\vec{k}\frac{\omega^2\mu_0ql}{4\pi r}\exp(-jK_0r)$$

于是得证。

三、几点推论

(1)由(1.6)和(1.7)式可知，$\vec{F}$ 包含两部分：$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$。一部分是位场 $\vec{F}_1=-\nabla\psi$；另一部分是与$\vec{e}_2-\vec{e}_3$平面平行的有旋有散场$\vec{F}_2$

$$\vec{F}_2=\vec{e}_2\left(\frac{1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1\right)+\vec{e}_3\left(-\frac{1}{h_2}\int h_3h_1\omega_2du_1\right)$$

$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$分别满足方程：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{F}_1=0\\ \nabla\cdot\vec{F}_1=P-\dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{h_3h_1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1\right)-\dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{h_1h_2}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1\right)\right]\end{cases}$$

$$\nabla\times\vec{F}_2=\vec{\omega}$$

$$\nabla\cdot\vec{F}_2=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\int h_1h_2\omega_3du_1\right)-\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\int h_3h_1\omega_2du_1\right)\right]$$

由此可见，在$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$的源头中都含有由旋涡$\vec{\omega}$转化来的量，但二者符号相反。

(2) 因此，对于一个给定旋涡强度为$\vec{\omega}$的涡旋场$\vec{F}$，它可以由上面的位场$\vec{F}_1$(此时 $P=0$)和只具有两个分量的有旋有散场$\vec{F}_2$综合而成。这对于人工构建涡旋场提供了可能性。

(3) 与(2.1)式中的$\vec{A}$和ϕ相比，(2.2)～(2.5)式中的ψ_e和ψ_m处于更对称的地位。这与Maxwell方程组中$\vec{E}$和$\vec{H}$的对称性是一致的。如果我们引入磁流和磁荷，则对称性更为明显。

(4) 对于交变场，也存在推论(2)中所说的人工产生涡旋场的可能性。

参考文献

[1] 李春宝，从给定的旋度函数和散度函数构造矢量场，应用数学和力学，2，5(1981)，557—562.

[2] Plosey, R. and R. E. Collin, *Principles and Application of Electromagnetic Fields*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, (1961), 19, 393, 516.

[3] Кочин, Н. Е., *Векторное Исчисление и Начала Тензорного Исчисоения* (1965), 214.

[4] Coffin, J. G., *Vector Analysis* (1911), 160.

[5] 复旦大学数学系编，《流体力学》，上海科学技术出版社(1960).

[6] Popovic, B. D., *IEE Proc.*, 128, Part A., 1(Jan. 1981), 47.

[7] Collin, R. E., *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York(1960), 22.

The Correlative Potential Function and a New Method for Solving Maxwell Equations

Li Chun-bao Wang Bai-suo

(Dalian Marine College, Liaoning)

Abstract

This paper is a continuation of paper [1].

1. A new potential ψ which is defined as the correlative potential has been developed in this paper. The potential ψ is different from the classical scalar potential ϕ and vector potential $\vec{A}$ developed by Helmholtz. The new formulae of the solution of eqs. $\nabla\times\vec{f}=\vec{\omega}$, $\nabla\cdot\vec{f}=P$ are given in terms of ψ.

2. In time varying electromagnetic field, two new retarded potentials, the electric-type retarded correlative potential ψ_e and the magnetic-type retarded correlative potential ψ_m, which are distinct from the classical retarded potentials $\vec{A}$ and ϕ, have been used to solve Maxwell equations. The new formulae of solution of Maxwell equation are given in terms of ψ_e and ψ_m.

3. The methods for constructing a rotational field with given curl function (vorticity) have been proposed.